

# SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

SUR LA POSSIBILITE D'UTILISER LA REPRESENTATION CONJOINTE EN TEMPS ET FRE-  
QUENCE DANS L'ANALYSE DES SIGNAUX MODULES EN FREQUENCE EMIS EN VIBROSISMIQUE

B. BOUACHACHE<sup>(1)</sup> B. ESCUDIE<sup>(1)</sup> J.M. KOMATITSCH<sup>(2)</sup>

1 - Laboratoire Traitement du Signal  
I.C.P.I. , 25, rue du Plat - LYON

2 - Centre de Recherche - Dpt Géophysique  
ELF - AQUITAINE - 64000 PAU.

## RESUME

Parmi les différentes Représentations en temps et fréquence des signaux d'énergie finie, la Représentation définie par J.VILLE présente des avantages pratiques de calcul. L'étude est conduite pour des signaux  $S(t)$  à valeur réelle, causaux et de durée finie. Le calcul du signal analytique  $Z(t)$  associé à  $S(t)$  est réalisé dans le domaine fréquentiel. Les signaux étudiés ont un produit durée-bande passante élevé :  $50 \leq BT \leq 150$ .

Les exemples traitent de signaux à modulation de fréquence linéaire et hyperbolique. Ces signaux sont à modulation croissante ou décroissante correspondant aux types utilisés en vibrosismique. On étudie le cas d'un signal à modulation mixte obéissant à la condition de LEVINE. La Représentation de VILLE met alors en évidence la répartition d'énergie d'interaction entre deux signaux à lois de modulation symétriques.

Il apparaît donc qu'on peut obtenir pratiquement la loi de modulation de fréquence  $\nu_i(t)$  du signal par le moment d'ordre un de  $\rho(t, \nu)$ . Une estimation pratique et rapide de  $\nu_i(t)$  utilise les propriétés d'une section de la surface  $\rho(t, \nu)$  à date donnée. Une modulation d'amplitude du signal  $S(t)$ , correctement choisie,  $A(t)$ , permet d'obtenir une lecture directe et aisée de  $\nu_i(t)$  vu la grande valeur du produit  $BT$ .

## SUMMARY

Among the different time frequency representation of finite energy signals, the J.VILLE's one presents practical computing advantages. The study is led for real, causal and time limited signals  $S(t)$ . The associated analytic signal  $Z(t)$  is computed in the frequency domain. The studied signals have a high product Duration-Bandwidth :  $50 \leq BT \leq 100$ . The examples deal with linear and hyperbolic FM signals. Their modulations laws are increasing or decreasing ones corresponding to those used in vibroseismic techniques. We also study the case of a mixed modulation which obeys the LEVINE'S conditions. The VILLE's representation shows the interaction energy distribution between two signals the modulation laws of which are symmetric. We can obtain the frequency-time law of the signal,  $\nu_i(t)$ , by computing the first order  $\rho(t, \nu)$  moment. Projecting the maxima of the three-dimensional surface onto the frequency time plane gives a good estimation of  $\nu_i(t)$ . Amplitude modulation of the signal by a properly chosen function  $A(t)$  enables a better reading of  $\nu_i(t)$ , given the high value of the  $BT$  product.



SUR LA POSSIBILITE D'UTILISER LA REPRESENTATION CONJOINTE EN TEMPS ET  
FREQUENCE DANS L'ANALYSE DES SIGNAUX MODULES EN FREQUENCE EMIS EN VIBROSISMIQUE

0) RAPPELS

La formulation générale de la Représentation conjointe en temps et en fréquence s'écrit : [1]

$$\rho_f(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{i2\pi n(u-t)} f(n, \tau) Z(u + \frac{\tau}{2}) Z^*(u - \frac{\tau}{2}) e^{-2i\pi \nu \tau} dndud\tau$$

Z(t) est le signal analytique associé à S(t) qui est supposé à durée finie et d'énergie finie. f(n, τ) est la fonction liée au mode d'observation ; nous l'appellerons "fenêtre d'observation". [2].

1) REPRESENTATION DE VILLE ET ANALYSE EN TEMPS ET FREQUENCE

Si f = 1, on obtient la Représentation définie par VILLE (analogue à celle de WIGNER en mécanique quantique) [3][4]

$$\rho(t, \nu) = \int_{\mathbb{R}} Z(t + \frac{\tau}{2}) \cdot Z^*(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-2i\pi \nu \tau} d\tau$$

Dans tout ce qui suit, on désignera par R C V la Représentation de VILLE (représentation conjointe). Cette R C V n'est pas définie positive car f = 1 n'appartient pas à la classe des fonctions d'Ambiguïté [5]. Par contre, on peut extraire les paramètres  $\nu_i(t)$ , fréquence instantanée, et  $Z_g(\nu)$ , retard de groupe associés au signal analytique Z(t) à l'aide des moments d'ordre un de la R C V [6].

On a  $\rho(t, \nu) = 2 \int_{\mathbb{R}} Z(t+\theta) \cdot Z^*(t-\theta) \cdot e^{-4i\pi \nu \theta} d\theta$

Donc  $\rho(t, \nu) \xrightarrow{2\nu=0} 2 \cdot Z(t+\theta) \cdot Z^*(t-\theta)$

Le signal analytique Z(t) est construit comme suit à partir du signal S(t) :

$$S(t) \xrightarrow{\delta} \Delta(\nu) \rightarrow Z_g(\nu) = 2 U(\nu) \cdot \Delta(\nu) \rightarrow Z_t = S_t + iQ_{S_t}$$

U est la pseudofonction unité d'HEAVISIDE; Qs(t) est le signal en quadrature de S(t).

Les signaux analysés sont sans composante continue : Δ(0) = 0 et s'écrivent :  
 $S(t) = \Pi_T(t - \frac{T}{2}) \cdot \cos \Phi(t)$  où Φ(t) est la phase instantanée. Sous la condition de grand produit durée-bande (BT ≫ 1), le signal analytique pourra s'écrire,  
 $Z(t) = \Pi_T(t - \frac{T}{2}) \cdot e^{i\Phi(t)}$

Le signal Z(t) est à "durée et bande limitées" sous l'hypothèse BT ≫ 1. Donc pour t = t<sub>i</sub>, le produit Z(t+θ) · Z\*(t-θ) étant aussi à durée limitée, on calcule ρ(t<sub>i</sub>, ν) par voie numérique. Faisant varier t<sub>i</sub> de 0 à T, on calcule ainsi la RCV de S(t). Les signaux analysés sont des signaux modulés en fréquence avec ou sans modulation d'amplitude.

2) R C V des Signaux modulés en fréquence : étude analytique.

a) Signaux modulés sans lois de modulation multiples

Nous définissons ainsi des signaux du type :

$$S(t) = A_T(t) \cdot \cos \Phi(t) \begin{cases} \Phi(t) = 2\pi(\nu_0 t + \frac{B}{2T} t^2) \\ \Phi(t) = \frac{2\pi \nu_0}{a} \cdot \text{Log} |1 + at| \\ \Phi(t) = 2\pi(\nu_0 t + a \cdot \sin 2\pi \nu_c t) \end{cases}$$

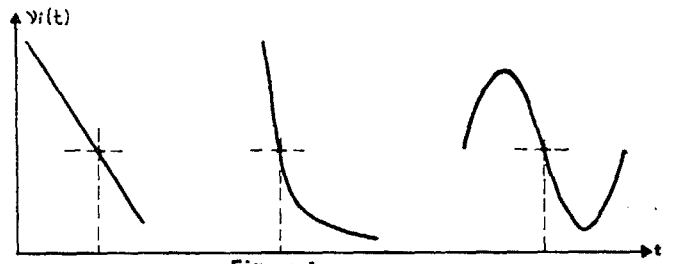


Figure 1

La loi  $\nu_i(t)$  est une fonction possédant une détermination et une seule comme la figure 1 le montre. Des calculs classiques conduisent dans le cas d'un signal à grand produit B.T aux résultats simples suivants :

$$\rho_z(t, \nu) = \Pi_T(t) \cdot \frac{\sin 2\pi[(T-2t)|(\nu - \nu_i(t))]}{\pi(\nu - \nu_i(t))} ; -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$$\nu_i(t) = \nu_0 + \frac{B}{T} \cdot t ; A_T(t) = \Pi_T(t)$$

Dans le cas d'une modulation hyperbolique, il n'est pas possible d'obtenir directement une expression analytique de ρ<sub>z</sub>(t, ν) même sous l'hypothèse de grande valeur du produit BT. Il en est de même pour l'expression de ρ<sub>z</sub>(t, ν) dans le cas d'une modulation de fréquence sinusoïdale. C'est pourquoi la suite de l'étude aborde ce problème par voie numérique.

SUR LA POSSIBILITE D'UTILISER LA REPRESENTATION CONJOINTE EN TEMPS ET FRE-  
 QUENCE DANS L'ANALYSE DES SIGNAUX MODULES EN FREQUENCE EMIS EN VIBROSISMIQUE.

b) Signaux à lois de modulation multiples

Considérons le cas d'un signal à loi de modulation mixte définie par la somme de deux signaux :  $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$

$$S_1(t) = \Pi_T(t) \cdot \cos 2\pi \left( \nu_0 t + \frac{B}{2T} t^2 \right)$$

$$S_2(t) = \Pi_T(t) \cdot \cos 2\pi \left( \nu_0 t - \frac{B}{2T} t^2 \right) \text{ avec } BT \gg 1$$

$$S(t) = 2 \Pi_T(t) \cdot \cos 2\pi \nu_0 t \cdot \cos 2\pi \frac{B}{2T} t^2$$

Le calcul fait ainsi apparaît un signal de fréquence porteuse  $\nu_0$  modulé par produit avec un signal modulé linéairement en fréquence (figure 2).

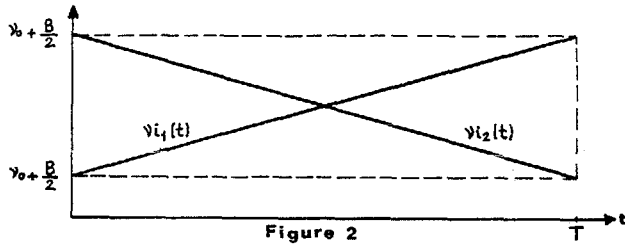


Figure 2

Compte tenu des remarques faites en 1), il vient :  $\rho_Z(t, \nu) = \rho_{Z_1}(t, \nu) + \rho_{Z_2}(t, \nu) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_{Z_1 Z_2}(t, \nu) \right\}$

avec  $\rho_{Z_1 Z_2}(t, \nu) = \int_R Z_1 \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \cdot Z_2^* \left( t - \frac{\tau}{2} \right) \cdot e^{i 2\pi \nu \tau} d\tau$

Les expressions de  $\rho_{Z_1}$  et  $\rho_{Z_2}$  ont été explicitées au paragraphe précédent. Compte tenu de la propriété d'invariance par translation temporelle et fréquentielle des Représentations Conjointes, il vient en posant  $\nu_0 = 0$  [5] :

$$\rho_{Z_1 Z_2}(t, \nu) = \Pi_T(t) \cdot e^{i 2\pi \nu t} \cdot \int_R \Pi_{T-2|\tau|}(\tau) \cdot e^{i \pi \left( \frac{\tau^2}{2} - 2\tau \nu \right)} \cdot d\tau$$

Soit en utilisant la définition des fonctions C et S de FRESNEL, soit en utilisant le principe de la phase stationnaire [7], on obtient :

$$\rho_{Z_1 Z_2}(t, \nu) = \left\{ \frac{\Pi(\nu)}{\frac{B}{2} - B|\nu|} \cdot \frac{\Pi(t)}{T} \sqrt{\frac{2T}{B}} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}} \cdot e^{i 2\pi B T \left[ \left( \frac{t}{T} \right)^2 + \left( \frac{\nu}{B} \right)^2 \right]} \right\}$$

Cette expression permet d'obtenir  $\rho_Z(t, \nu)$  compte tenu de  $\rho_{Z_1}$  et  $\rho_{Z_2}$ . Remarquons tout de suite que  $BT \gg 1$  conduit à une exponentielle complexe "rapidement oscillante" en fonction de  $t$  et  $\nu$ . L'énergie d'interaction  $E_{12}$  est telle que :

$$E_{12} = \int_{R^2} 2 \operatorname{Re} \left\{ \rho_{Z_1 Z_2}(t, \nu) \right\} dt \cdot d\nu \ll E_1 \text{ et } E_2$$

avec  $E_1 = \|Z_1\|^2$  ;  $E_2 = \|Z_2\|^2$

$\rho_{Z_1}$  et  $\rho_{Z_2}$  sont maximales pour  $t = 0$   $|t| \leq T/2$  tandis que  $\operatorname{Re} \rho_{Z_1 Z_2}$  est un terme du type cosinus borné par l'unité dans le domaine considéré. Pour  $|t| \approx \frac{T}{2}$ ,  $\rho_{Z_1}$  et  $\rho_{Z_2}$  ont des valeurs faibles par rapport à leur maximum et le terme  $\Pi_B(\nu) B' = \frac{B}{2} - B \frac{|t|}{T}$  conduit à des valeurs négligeables de  $\operatorname{Re} \rho_{Z_1 Z_2}$ . Au voisinage de  $t = 0$ , on a :

$$\frac{\max \rho_{Z_1 Z_2}(t, \nu)}{\rho_{Z_1}(t, \nu = \nu_i(t))} \approx \frac{1}{2\sqrt{BT}}$$

Pour des grandes valeurs du produit durée bande ( $100 \leq BT$ ), on peut admettre que  $\rho_Z \approx \rho_{Z_1} + \rho_{Z_2}$

avec  $\operatorname{Re} \rho_{Z_1 Z_2} \ll \rho_{Z_k}$ ,  $k = 1, 2$ .

Remarquons que lors du calcul de la Transformée de FOURIER intervenant dans  $\rho_Z$ , il est possible d'introduire une modulation d'amplitude  $A(t)$  qui réduit les oscillations dues au fait que :

$$\Pi_T(t) \Leftrightarrow \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu}$$

3) R C V DES SIGNAUX MODULES EN FREQUENCE : SIMULATION NUMERIQUE.

Afin de vérifier expérimentalement les résultats théoriques et pour obtenir certaines représentations conjointes non calculables directement, nous avons étudié les exemples suivants par voie numérique

a)  $S_1(t) = \Pi_T(t) \cdot \cos 2\pi \left( \nu_0 t + \frac{B}{2T} t^2 \right)$   
 $B = 50 \text{ Hz}, T = 2 \text{ s}, BT = 100, \nu_0 = 35 \text{ Hz}$ .

C'est un signal du type modulation linéaire analogue à ceux utilisés en VIBROSISMIQUE pour la géophysique pétrolière.

b)  $S_3(t) = \Pi_T \left( t - \frac{T}{2} \right) \cdot \cos \left( \frac{2\pi \nu_0}{a} \cdot \log |1 + at| + 2\pi \nu_1 t \right)$

avec  $T = 1 \text{ ms}, B = 90 \text{ kHz}, \nu_0 = 100 \text{ kHz}, \nu_1 = 50 \text{ kHz}$

$BT = 90$ . Ce signal est d'un type voisin de ceux qu'émettent les chauve-souris dans leur système SONAR. La modulation de fréquence est de type hyperbolique.

c)  $S_4(t) = \Pi_T \left( t - \frac{T}{2} \right) \cdot \cos 2\pi \left( \nu_0 t + a \sin 2\pi \nu_1 t \right)$   
 $\nu_0 = 100 \text{ Hz}, \nu_1 = 4 \text{ Hz}, a = 2, T = 0,512 \text{ s}, BT \sim 96$   
 $\nu_i(t) = \nu_0 + 2\pi \nu_1 \cdot a \cdot \cos 2\pi \nu_1 t$



SUR LA POSSIBILITE D'UTILISER LA REPRESENTATION CONJOINTE EN TEMPS ET FRE-  
QUENCE DANS L'ANALYSE DES SIGNAUX MODULES EN FREQUENCE EMIS EN VIBROSISMIQUE.

d)  $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$  défini au paragraphe 2 avec  $B = 80 \text{ Hz}$ ,  $T = 2 \text{ s}$ ,  $\nu_0 = 50 \text{ Hz}$ ,  $BT = 160$ .  
Ce signal est le résultat de l'addition de deux signaux de type VIBROSISMIQUE à lois de modulation linéaire respectivement croissante et décroissante. Un tel signal possède la propriété suivante :

$$\lambda_L - \langle \nu \rangle \langle t \rangle = 0$$

avec  $\lambda_L = \int t \cdot A^2 \cdot \dot{\Phi}^2 \cdot dt$  ;  $\langle \nu \rangle = \int \nu \cdot |z(\nu)|^2 \cdot d\nu$  ;  $\langle t \rangle = \int t \cdot |z(t)|^2 \cdot dt$

Cette propriété est mise à profit dans l'estimation conjointe date et fréquence centrale en SONAR [9] .

e)  $S(t) = S_1(t) + S_3(t)$

$$\nu_{i_1}(t) = \nu_0 + \frac{B}{T}t, \quad B = 99 \text{ Hz}, T = 2 \text{ s}, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\nu_{i_3}(t) = \nu_1 + \frac{\nu_0}{1+at}, \quad \nu_1 = 0, \nu_0 = 100 \text{ Hz}, a = \frac{9}{T}, T = 2 \text{ s}.$$

C'est l'addition de deux signaux l'un étant du type VIBROSISMIQUE l'autre étant de modulation hyperbolique.

Interprétation graphique des R C V obtenues

La figure 3 nous permet de vérifier le calcul théorique dans le cas d'un signal modulé linéairement en fréquence et modulé en amplitude par une arche de sinus :  $S'_1(t) = S_1(t) \cdot \sin \frac{\pi \cdot t}{T}$

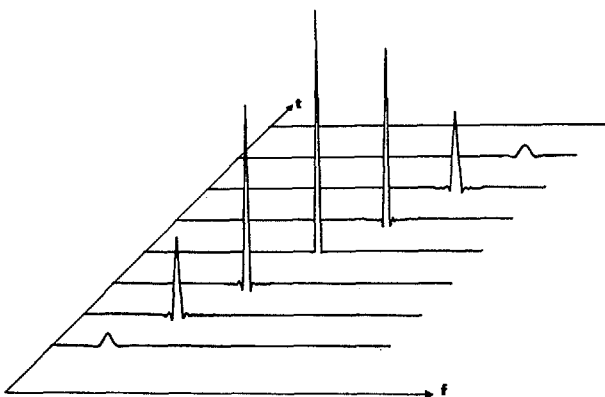


Figure 3

On observe effectivement une muraille triangulaire d'autant plus "pincée" que BT est grand. La modulation d'amplitude a pour effet d'atténuer les oscillations de part et d'autre de l'arête caractéristique de la loi de modulation du signal.

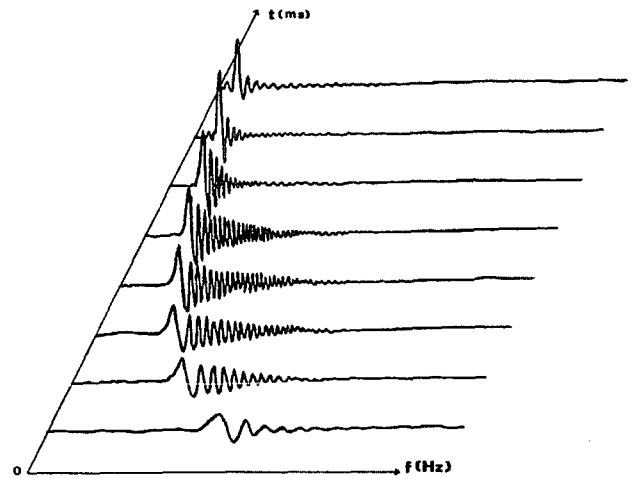


Figure 4a

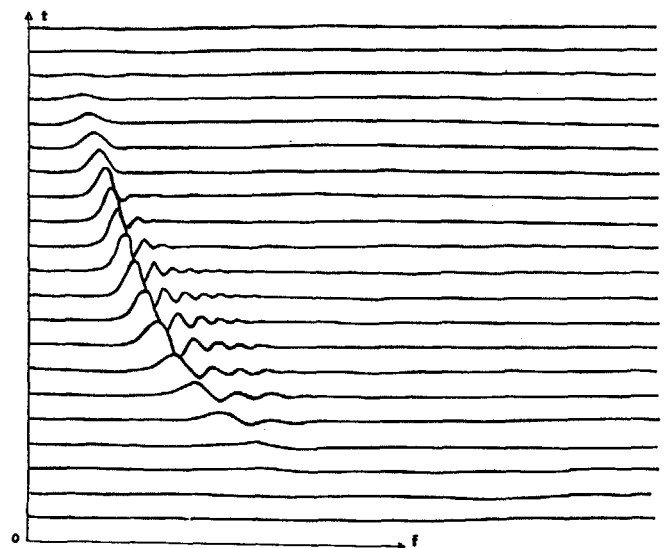


Figure 4b

La figure 4a montre un résultat similaire dans le cas du signal  $S_3(t)$ . La RCV traduit la loi de modulation hyperbolique en fréquence par le lieu des maxima. Les oscillations qui apparaissent d'un côté de cette courbe peuvent être atténuées en pondérant le signal comme précédemment (figure 4b). Cela suggère d'utiliser cette RCV pour l'analyse de signaux sonars animaux où l'on observe ce genre de modulation de fréquence.

Remarque : La structure des oscillations apparaissant dans un cas non linéaire peut être justifiées par une méthode d'approximation uniforme [10] .

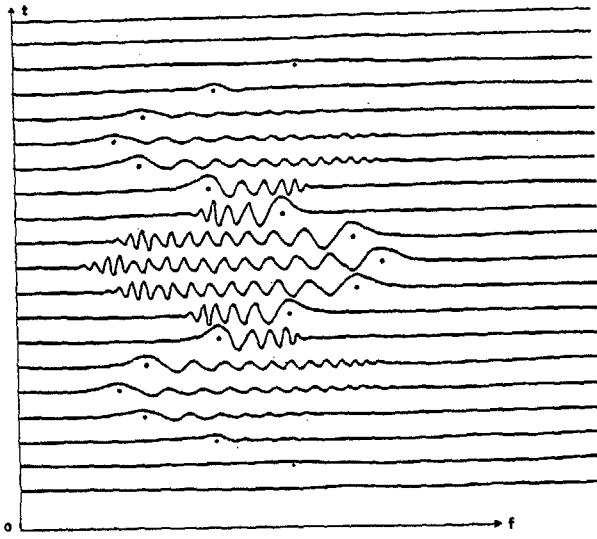


Figure 5

La figure 5 représente la RCV de

$S_4(t) = S_4(t) \cdot \sin \frac{\pi t}{T}$ . Pour interpréter celle-ci, on utilise l'argument suivant dit de la phase stationnaire : étant donné que la concentration énergétique de  $\rho(t, \nu)$  est représentée par le volume sous la surface de  $\rho(t, \nu)$ , on définit une courbe par le lieu des points stationnaires de cette surface à date donnée. Cette courbe qui n'est autre que  $\nu = \nu_i(t)$ , fréquence instantanée du signal caractérise donc la loi de modulation en fréquence du signal.

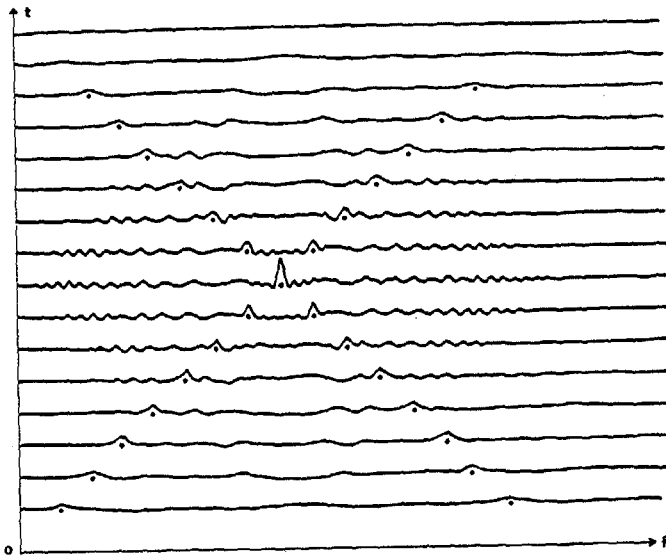


Figure 6

La figure 6 nous permet de vérifier le calcul théorique de la RCV du signal  $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$  (paragraphe 2-b) ; le lieu des maxima de  $\rho(t, \nu)$  permet de retrouver deux droites sécantes au point  $(\nu = \nu_0, t = \frac{T}{2})$  et de pentes opposées qui caractérisent respectivement les lois de modulation en fréquence de  $S_1(t)$  et  $S_2(t)$ .

On retrouve les effets de la Représentation d'interaction en temps et en fréquence surtout sensibles au voisinage de  $t = T/2$ , ce qui est en accord avec la théorie.

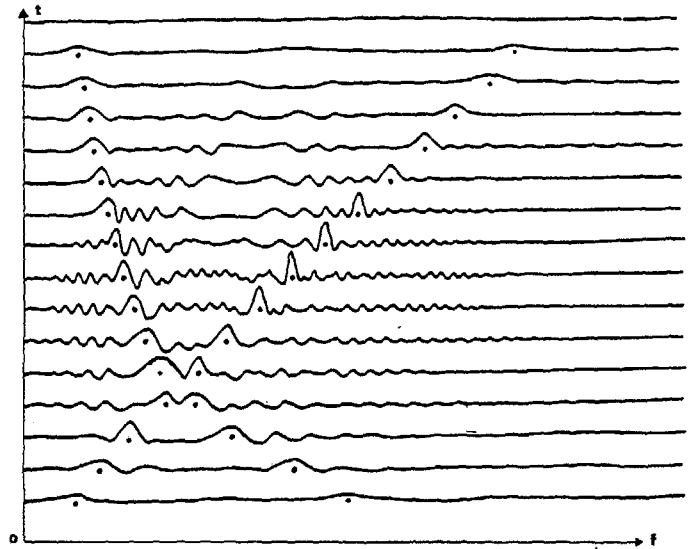


Figure 7

On observe un phénomène semblable (figure 7) pour la RCV du signal  $S(t)$  somme de  $S_1(t)$  et  $S_3(t)$ , modulés en fréquence respectivement suivant une loi linéaire et hyperbolique. Notons qu'on peut améliorer la lisibilité des deux dernières RCV en adoptant comme auparavant une fenêtre de pondération.

#### 4) APPLICATION A LA GEOPHYSIQUE

Une technique très fréquemment utilisée en géophysique pétrolière consiste à exciter le sol à l'aide de vibrateurs pilotés par un signal modulé linéairement en fréquence ; à la réception les signaux sismiques sont pour l'instant corrélés par le signal émis et interprétés. Nous pensons que la comparaison des RCV des signaux (qui sont à grand produit BT) émis et reçus doit nous apporter de l'information supplémentaire sur la nature des terrains traversés et en particulier sur l'absorption de ces terrains. Des simulations sont actuellement en cours, la réponse du terrain étant calculé en intégrant une équation des ondes comportant des termes d'amortissement.

#### CONCLUSION

La Représentation Conjointe en temps et fréquence définie par J.VILLE est apte à traduire la modulation de fréquence d'un signal par la direction de l'arête principale avec une précision d'autant meilleure que BT est grand.



Elle est de plus apte à séparer dans certains cas deux signaux à grand produit BT de même durée, de même bande spectrale mais de modulations de fréquence différentes.

#### 6) BIBLIOGRAPHIE

- 1 B. ESCUDIE, J. GREY, Comptes Rendus Académie des Sciences, PARIS série A, t. 283 p. 1049, 1051, 1976.

"Sur une formulation générale de la représentation en temps et en fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie."

- 2 B. BOUACHACHE, P. FLANDRIN, Travail de fin d'études, I.C.P.I., 1978.

"Etude de la Représentation Conjointe en temps et en fréquence des signaux d'énergie finie."

- 3 J. VILLE, Câbles et Transmissions, tome 2 n° 1, p.61-74, 1948.

- 4 E. P. WIGNER, Phys. Rev. , 40, 749, 1932.

- 5 B. BOUACHACHE, B. ESCUDIE, P. FLANDRIN, J. GREY, Comptes Rendus Acad. Sciences, PARIS, série A, t. 288, p. 307-309, 1979.

"Sur une condition nécessaire et suffisante de positivité de la Représentation Conjointe en temps et fréquence des signaux d'énergie finie."

- 6 B. ESCUDIE, J. GREY, 6è Colloque National Traitement du Signal, NICE, Avril 1977, p 51-56.

"Représentation Hilbertienne et représentation conjointe en temps et en fréquence des signaux d'énergie finie."

- 7 B. ESCUDIE, B. GRANDJANNY, A. HELLION, Revue du Cethedec, 12è année, 4è trimestre, N° 45, 1975.

"Sur les propriétés spectrales des signaux à grand produit BT."

- 8 M. CHIOLLAZ, Annales Télécommunications n° 33 n° 1-2, 1978.  
 "Une condition nécessaire et suffisante pour l'écriture du modèle exponentiel des signaux d'énergie finie."
- 9 B. LEVINE, Radiotechnique Statistiques, tome 2, Ed. MIR, MOSCOU, 1973.
- 10 M.V. BERRY, phyl. trans of the Roy. Soc., série A, t. 287, p 237-271, 1977

#### ANNEXE

Cette étude a porté sur l'une des nombreuses représentations conjointes en temps et fréquence définies par les différents auteurs [1]. La figure ci-dessous représente la Représentation en temps et fréquence définie par A.W. RIHACZECK dans le cas du signal modulé linéairement en fréquence  $S_1(t)$ . La comparaison avec la figure 3 permet de comprendre le choix de la Représentation de VILLE [2] [5].

