SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

FONCTION D'AMBIGUITE GENERALISEE INTERVENANT DANS LES SYSTEMES DE DETECTION ACTIVE UTILISANT LES TESTS OPTIMAUX DE NEYMAN-PEARSON.

GENERALIZED AMBIGUITY FUNCTION INTERVENING IN ACTIVE DETECTION SYSTEMS USING THE NEYMAN-PEARSON OPTIMAL TESTS.

Alfred FORSTER

UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR

RESUME

Dans le cas d'un bruit gaussien non stationnaire mais localement stationnaire de covariance de base dépendant d'un paramètre vectoriel "$\vec{\rho}$" aléatoire, le test de Neyman-Pearson optimal à probabilité de fausse alarme conditionnelle constante fait intervenir une covariance $C(\overleftrightarrow{\theta}' ,\overleftrightarrow{\theta}'')$ normée et hermitique. ($\overleftrightarrow{\theta}\{\tau;\xi\}$ paramètre aléatoire du signal ; τ retard et ξ coefficient Doppler).

Cette covariance $C(\overleftrightarrow{\theta}', \overleftrightarrow{\theta}'')$ peut s'interpréter comme une fonction d'ambiguïté généralisée.

Le présent exposé portera sur la formulation de cette fonction d'ambiguïté et sur l'étude de ses propriétés par l'utilisation de variables réduites. On montrera en particulier que les diagrammes d'ambiguïté simplifiés sont toujours des ellipses dont les trois coefficients sont déterminés par six coefficients élaborés à partir du signal.

SUMMARY

In the case of a non-stationary but locally stationary gaussian noise of basic covariance depending on an aleatory vectorial parameter "$\vec{\rho}$", the optimal Neyman-Pearson test, having a constant conditional false-alarm probability, causes a normalized hermitic covariance to intervene $C(\overleftrightarrow{\theta}' , \overleftrightarrow{\theta}'')$. ($\overleftrightarrow{\theta}\{\tau;\xi\}$ is a hazardous parameter of the signal ; τ is the time delay and ξ is the Doppler coefficient).

This covariance $C(\overleftrightarrow{\theta}', \overleftrightarrow{\theta}'')$ can be interpreted as a generalized ambiguity function.

The following expose deals with the formulation of this ambiguity function and considers its properties through the use of reduced variables. The simplified ambiguity diagrams, as show in the following text are always the ellipses whose three coefficients are determined by six factors depending on the signal.

FONCTION D'AMBIGUITE GENERALISEE INTERVENANT DANS LES SYSTEMES DE DETECTION ACTIVE UTILISANT LES TESTS OPTIMAUX DE NEYMAN-PEARSON.
GENERALIZED AMBIGUITY FUNCTION INTERVENING IN ACTIVE DETECTION SYSTEMS USING THE NEYMAN-PEARSON OPTIMAL TESTS.

Si l'on se place dans le cas d'un bruit gaussien non stationnaire mais localement stationnaire soit uniquement de puissance moyenne "a" aléatoire ou soit plus généralement de covariance de base de forme connue mais dépendant d'un paramètre vectoriel "$\vec{\rho}$" aléatoire, le test de Neyman-Pearson optimal à probabilité de fausse alarme conditionnelle constante fait intervenir, dans le cas où l'estimateur parfait asymptotique de a ou de $\vec{\rho}$ existe, une covariance $C(\overleftrightarrow{\theta}',\overleftrightarrow{\theta}'')$ normée et hermitique. ($\overleftrightarrow{\theta}\{\tau;\xi\}$ paramètre aléatoire ou inconnu du signal ; τ retard et ξ coefficient Doppler).
(Ceci est également vrai pour le test de Neyman-Pearson dans le cas d'un bruit gaussien stationnaire ou non stationnaire de covariance totalement connue).

Cette covariance $C(\overleftrightarrow{\theta}',\overleftrightarrow{\theta}'')$ qui détermine entièrement les erreurs d'estimation du paramètre $\overleftrightarrow{\theta}$ peut s'interpréter en cas de possibilité de factorisation de la covariance de base du bruit comme une fonction d'ambiguïté généralisée construite sur un signal modifié. Elle ne coïncide avec celle de Woodward que dans le cas limite de la bande étroite. |4|

On sait par ailleurs pour un tel test que dans le cas d'un rapport signal sur bruit fort les erreurs d'estimation des paramètres du signal s'expriment à partir des coefficients du développement limité au deuxième ordre en τ et ξ de la fonction d'ambiguïté. Ce développement conduit également à la mise en place d'un diagramme d'ambiguïté simplifié qui permet une comparaison sélective et rapide des propriétés des signaux quant à la précision d'estimation simultanée de τ et de ξ.

Le présent exposé portera sur la formulation déduite du test de cette fonction d'ambiguïté et sur l'étude de ses propriétés par l'utilisation de variables réduites. On montrera en particulier que les diagrammes d'ambiguïté simplifiés sont toujours des ellipses dont les trois coefficients sont déterminés eux-mêmes par six coefficients élaborés simplement à partir du signal.

|4| - FORSTER A.
Aspects particuliers des tests optimaux d'hypothèses multiples en détection active - Colloque GRETSI NICE 1977 - p. 22/1 à 22/8.

I - TEST DE NEYMAN-PEARSON OPTIMAL A PROBABILITE DE FAUSSE ALARME CONDITIONNELLE CONSTANTE DANS LE CAS D'UN BRUIT GAUSSIEN NON STATIONNAIRE DE COVARIANCE INCONNUE A MODELE STATIONNAIRE TANGENT DEPENDANT D'UN PARAMETRE ALEATOIRE VECTORIEL

Réf. |2| |3|

Nous considèrerons le cas où la covariance inconnue du bruit gaussien (de forme générale $\Gamma'_{\vec{\rho}}(\tau)$ connue) dépend d'un paramètre aléatoire vectoriel $\vec{\rho}$ (variable aléatoire sur l'intervalle de temps de stationnarité locale ; fonction aléatoire du temps sur des temps plus longs). Pour la simplicité de l'exposé nous ferons comme si le temps de stationnarité était au moins égal à la durée d'analyse $\mathcal{T}$ + T.

La loi de l'observation conditionnelle à $\Gamma'_{\vec{\rho}}$ sous l'hypothèse $\tilde{H}_0$ est

$$p_{0\vec{\rho}}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \cdot \sqrt{\text{dét}\, \Gamma'^{-1}_{\vec{\rho}}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^T \Gamma'^{-1}_{\vec{\rho}} \vec{x}}$$

$\Gamma'_{\vec{\rho}}$ définie positive symétrique

$$E_S\{x(t)\underline{x(t')}_{\vec{\rho}}\} = \Gamma'_{\vec{\rho}}(t-t') = a\Gamma_{\overleftrightarrow{\rho}}(t-t')$$

avec $\Gamma_{\overleftrightarrow{\rho}}(0) = 1$

Plaçons nous dans le cas où l'estimateur asymptotique de $\vec{\rho}$ existe et que la détection soit non singulière. (Une condition nécessaire mais hélas non suffisante pour cela est que le signal est d'énergie finie conjointement à une puissance moyenne de bruit finie). Cet estimateur de $\vec{\rho}$ est parfait.
(l'estimation $\hat{\vec{\rho}}, \hat{\Gamma}'_{\hat{\vec{\rho}}}$ sous hypothèse bruit seul coïncide avec l'estimation sous hypothèse signal).

I.1 - Formulation du test dans le cas d'une loi à priori de $\vec{\theta}$ uniforme (loi de $\vec{\rho}$ quelconque)

L'estimateur parfait fournit $\hat{\Gamma}'_{\hat{\vec{\rho}}}$ et en particulier par une décomposition

$$\zeta = \hat{\Gamma}'_{\hat{\vec{\rho}}}(0) = \hat{a}; \Gamma(\tau) = \frac{\hat{\Gamma}'_{\hat{\vec{\rho}}}(\tau)}{\hat{\Gamma}'_{\hat{\vec{\rho}}}(0)} = \hat{\Gamma}_{\hat{\overleftrightarrow{\rho}}}(\tau)$$

En faisant le rapport des maximas des probabilités à postériori utilisant l'estimateur parfait on obtient

$$\Lambda(X(t)) = \underset{\vec{\theta}}{\text{Max}}\, e^{\frac{1}{2}\frac{G_{\vec{\theta}}}{\zeta}}$$

qui se réduit à

$$\Lambda(X(t)) = \underset{\vec\theta}{\mathrm{Max}}\; e^{\frac{1}{2}\cdot\frac{R^2_{\vec\theta}}{\zeta\psi_{\vec\theta}}} \quad R_{\vec\theta} = \int_{T_1}^{t_0} X(t)\cdot Q_{\vec\theta}(t)\,dt$$

où

$$\int_{T_1}^{t_0} \Gamma(t-t')\cdot Q_{\vec\theta}(t')\,dt' = \xi_{\vec\theta}(t)$$

$$\psi_{\vec\theta} = \int_{T_1}^{t_0} \xi_{\vec\theta}(t)\cdot Q_{\vec\theta}(t)\,dt$$

La probabilité de fausse alarme conditionnelle à $\vec\rho$ ou $\Gamma'_{\vec\rho}$ est constante si l'on choisi un seuil de test fixe t_c. Le test est donc :

$$\underset{\vec\theta}{\mathrm{Max}}\; \frac{1}{2}\left(\frac{R_{\vec\theta}}{\sqrt{\zeta}\,\sqrt{\psi_{\vec\theta}}}\right)^2 \underset{\tilde H_0}{\overset{\tilde H_1,\hat{\vec\theta}}{\gtrless}} t_c \quad \text{ou} \quad \underset{\vec\theta}{\mathrm{Max}}\; \frac{1}{2} V^2_{\vec\theta} \underset{\tilde H_0}{\overset{\tilde H_1,\hat{\vec\theta}}{\gtrless}} t_c$$

Si l'on peut factoriser $\gamma(\nu) \rightleftharpoons \Gamma(\tau)$ $\gamma(\nu) = h(\nu)\cdot h^*(\nu)$ où $h(\nu)$ est le gain complexe d'un filtre linéaire homogène causal dont le filtre inverse existe, on peut mettre $R_{\vec\theta}$ et $\psi_{\vec\theta}$ sous la forme

$$R_{\vec\theta} = \int_{T_1}^{t_0} \tilde X(t)\cdot\tilde\xi_{\vec\theta}(t)\,dt \qquad \psi_{\vec\theta} = \int_{T_1}^{t_0} \tilde\xi_{\vec\theta}(t)\cdot\tilde\xi_{\vec\theta}(t)\cdot dt$$

avec

$$\tilde X(t) = \int_{T_1}^{t_0} H^{-1}(t-t')\cdot X(t')\,dt'$$

$$\tilde\xi_{\vec\theta}(t) = \int_{T_1}^{t_0} H^{-1}(t-t')\cdot\xi_{\vec\theta}(t')\,dt'$$

Les erreurs d'estimation des paramètres $\vec\theta$ sont entièrement déterminées par la fonction d'ambiguïté hermitique

$$C(\vec\theta',\vec\theta'') = \frac{\psi_{\vec\theta',\vec\theta''}}{\sqrt{\psi_{\vec\theta',\vec\theta'}}\,\sqrt{\psi_{\vec\theta'',\vec\theta''}}} \quad \text{avec} \quad \int_{T_1}^{t_0} \tilde\xi_{\vec\theta'}(t)\cdot\tilde\xi^*_{\vec\theta''}(t)\cdot dt = \psi_{\vec\theta',\vec\theta''}$$

qui est en plus symétrique dans notre cas de signal réel et de bruit de covariance définie positive symétrique.

I.1.1 - Loi de probabilité multidimensionnelle de $V(\vec\theta)$

Soit $V(\vec\theta') = \dfrac{R(\vec\theta')}{\sqrt{\psi_{\vec\theta',\vec\theta'}}\,\sqrt{\zeta}}$

- Sous $\tilde H_{0,\vec\rho}$ $V(\vec\theta')$ fonction aléatoire gaussienne non stationnaire de la variable $\vec\theta'$
    - de moyenne nulle
    - de variance 1

La loi de probabilité multidimensionnelle conditionnelle à $\tilde H_0,\vec\rho$ est donc

$$p_{0\vec\rho}(\vec V) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\,\frac{1}{\sqrt{\mathrm{d\acute{e}t}\;C}}\; e^{-\frac{1}{2}\vec V^T C^{-1}\vec V}$$

où $C = [C_{ij}]$ et $C_{ij} = C(\vec\theta'_i, \vec\theta'_j)$

Covariance

$$C(\vec\theta',\vec\theta'') = \frac{\psi_{\vec\theta',\vec\theta''}}{\sqrt{\psi_{\vec\theta',\vec\theta'}}\,\sqrt{\psi_{\vec\theta'',\vec\theta''}}}$$

- Sous $\tilde H_1,\vec\rho,\vec\theta$

$$V(\vec\theta') = \frac{R_0(\vec\theta')}{\sqrt{\psi_{\vec\theta',\vec\theta'}}\,\sqrt{a}} + d.C(\vec\theta',\vec\theta) \qquad d = \frac{A\sqrt{\psi_{\vec\theta,\vec\theta}}}{\sqrt{a}}$$

$V(\vec\theta')$ fonction aléatoire gaussienne non stationnaire

- de moyenne $d.C(\vec\theta',\vec\theta)$
- de variance 1

La loi de probabilité est donc liée à

$$-\frac{1}{2}(\vec V - d\vec C_{\vec\theta})^T C^{-1}(\vec V - d\vec C_{\vec\theta})$$

$$p_{1\vec\rho\vec\theta}(\vec V) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\mathrm{d\acute{e}t}\;C}}\; e^{-\frac{1}{2}(\vec V - d\vec C_{\vec\theta})^T C^{-1}(\vec V - d\vec C_{\vec\theta})}$$

I.1.2 - Loi de probabilité conjointe de $V(\vec\theta)$ et de ses dérivées partielles premières

Considérons le vecteur $\vec V$ $\begin{bmatrix} V(\vec\theta') \\ V^{(1)}_{\tau'}(\vec\theta') \\ V^{(1)}_{k'}(\vec\theta') \end{bmatrix}$ (1) veut dire dérivée partielle τ' première par rapport à τ'

La matrice de covariance calculée pour une même valeur de paramètre $\vec\theta'$ est

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \underset{=1}{C(\vec\theta',\vec\theta')} & 0 & 0 \\ 0 & \left[\dfrac{\partial C(\vec\theta',\vec\theta'')}{\partial\tau'\,\partial\tau''}\right]_{\vec\theta''=\vec\theta'} & \left[\dfrac{\partial C(\vec\theta',\vec\theta'')}{\partial\tau'\,\partial k''}\right]_{\vec\theta''=\vec\theta'} \\ 0 & \left[\dfrac{\partial C(\vec\theta',\vec\theta'')}{\partial\tau''\,\partial k'}\right]_{\vec\theta''=\vec\theta'} & \left[\dfrac{\partial C(\vec\theta',\vec\theta'')}{\partial k',\partial k''}\right]_{\vec\theta''=\vec\theta'} \end{bmatrix}$$

Le vecteur $\vec M$ valeur moyenne est ; ($\pi(\vec\theta)$ uniforme)

hypothèse $\tilde H_0\ \vec\rho$ hypothèse $\tilde H_1\ \vec\rho\ \vec\theta$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} dC(\vec\theta,\vec\theta') \\ d\,\dfrac{\partial C(\vec\theta,\vec\theta')}{\partial\tau'} \\ d\,\dfrac{\partial C(\vec\theta,\vec\theta')}{\partial k'} \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow m \\ \leftarrow m^{(1)}_{\tau'} \\ \leftarrow m^{(1)}_{k'} \end{matrix}$$

La densité de probabilité conjointe calculée pour une même valeur du paramètre $\vec\theta'$ est

FONCTION D'AMBIGUITE GENERALISEE INTERVENANT DANS LES SYSTEMES DE DETECTION ACTIVE UTILISANT LES TESTS OPTIMAUX DE NEYMAN-PEARSON.
GENERALIZED AMBIGUITY FUNCTION INTERVENING IN ACTIVE DETECTION SYSTEMS USING THE NEYMAN-PEARSON OPTIMAL TESTS.

$$p_{1\vec{\theta}\vec{\rho}}(V(\vec{\theta}'),V^{(1)}_{\tau'}(\vec{\theta}'),V^{(1)}_{k'}(\vec{\theta}')) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\text{dét}\,\Gamma'}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(\vec{V}'-\vec{M})^T\,\Gamma'^{-1}(\vec{V}'-\vec{M})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}(V_1-M_1)^2}\cdot\frac{1}{2\pi\sqrt{\text{dét}\,(\Gamma'_{\text{réduit}})}}\cdot e^{-\frac{1}{2}(\vec{V}'-\vec{M})^T\Gamma'^{-1}_{ré}(\vec{V}'-\vec{M})}$$

I.2 - Fonction d'ambiguïté

Changement de notation pour l'étude $C\,(\vec{\theta}',\vec{\theta}'')$:

- on change $\check{\mathcal{S}}$ en S
- on réutilise ψ pour la fonction d'ambiguïté de l'amplitude complexe.

I.2.1 - Fonction d'ambiguïté du signal

$$\mathcal{C}_{SS}(\tau,\xi) = \int S\left[e^{-\text{Arsh}\,\xi/2}\cdot(t+\tfrac{\tau}{2})\right]\cdot S^*\left[e^{\text{Arsh}\,\xi/2}\cdot(t-\tfrac{\tau}{2})\right]\cdot dt$$

obtenu à partir de

$$\mathcal{C}_{SS}(\tau_1,\tau_2,k_1,k_2) = \sqrt{k_1}\sqrt{k_2}\int S\left[k_1(t-\tau_1)\right]\cdot S^*\left[k_2(t-\tau_2)\right]dt$$

en posant

$$\xi = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} - \sqrt{\frac{k_1}{k_2}} \qquad \tau = \sqrt{k_1k_2}\cdot(\tau_2-\tau_1)$$

I.2.2 - Fonction d'ambiguïté de l'amplitude complexe

$A(t)=Ge^{i\phi}$; $S(t)=\mathbb{R}_e\left[Ae^{i\omega_0 t}\right]$; $\psi_{AA}=\rho e^{i\varphi}$;

$$\mathcal{C}_{SS} = \rho\cos(\omega_0\tau+\varphi)$$

$$\psi_{AA}(\tau,\xi) = e^{i2\pi\tau\nu_0\left[\sqrt{1+(\xi/2)^2}-1\right]}\cdot\int A\left[e^{-\text{Arsh}\,\xi/2}\cdot(t+\tfrac{\tau}{2})\right]\cdot A^*\left[e^{\text{Arsh}\,\xi/2}\cdot(t-\tfrac{\tau}{2})\right]\cdot e^{-i2\pi\nu_0\xi t}dt$$

On peut également introduire la variable Doppler $\Omega = \xi\omega_0$

I.2.3 - Développement limité aux termes du deuxième ordre de la fonction d'ambiguïté de l'amplitude complexe au voisinage du maximum

$$\psi_{AA} \simeq 1-\frac{\xi^2}{2}\left[R_{22}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right]-\omega_0\xi^2R^{\phi}_{12}-\frac{\omega_0^2\xi^2}{2}T_2^2-\frac{\tau^2}{2}\,\Omega_2^2$$

$$+\ \tau\xi\,R_{21} + \omega_0\xi\tau\,R_2 - i\,\xi\,R_2$$

Ce qui donne pour le module en faisant intervenir la variable $\Omega = \omega_0\xi$

$$\rho = |\psi_{AA}| \simeq 1-\frac{\Omega^2}{2}\left[T_2^2+2\,\frac{R^{\phi}_{12}}{\omega_0}-\frac{R_2^2}{\omega_0^2}+\frac{R_{22}}{\omega_0^2}-\frac{1}{4\omega_0^2}\right]$$

$$-\ \frac{\tau^2}{2}\left[\Omega_2^2\right]+\Omega\cdot\tau\cdot\left[R_2+\frac{R_{21}}{\omega_0}\right]$$

Les définitions de coefficients intervenant dans ces développements limités figurent sur le tableau suivant. Y sont également explicitées les inégalités qu'ils vérifient.

$$\int A\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot t^2\cdot dt = R_{12}\cdot\rho_0$$

$$\mathbb{R}_e\int A\cdot\frac{d^2A^*}{dt^2}\cdot t\cdot dt = -\int\frac{dA}{dt}\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot t\cdot dt = -\rho_0\cdot R_{21}$$

$$\int A\cdot\frac{d^2A^*}{dt^2}\cdot dt = -\int\frac{dA}{dt}\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot dt = -\Omega_2^2\cdot\rho_0$$

$$\mathbb{R}_e\int A\cdot\frac{d^2A^*}{dt^2}\cdot t^2dt = \int AA^*dt - \int\frac{dA}{dt}\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot t^2\cdot dt = \rho_0-\rho_0R_{22}$$

$$\mathbb{R}_e\int A\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot t\cdot dt = \rho_0R_1 = -\frac{\rho_0}{2}$$

$$\mathbb{J}_m\int A\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot t\cdot dt = -\rho_0\cdot R_2$$

$$\int AA^*\cdot t^2\cdot dt = \rho_0\cdot T_2^2$$

$$\int AA^*\cdot dt = \rho_0$$

$$\int A\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot dt = i\cdot\mathbb{J}_m\int A\frac{dA^*}{dt}\cdot dt = -i\cdot\rho_0\cdot\Omega_1$$

$$\int A\cdot\frac{d^2A^*}{dt^2}\cdot dt = -\rho_0\cdot\Omega_2^2 = \mathbb{R}_e\int A\frac{d^2A^*}{dt^2}\cdot dt$$

$$\int AA^*\cdot t\cdot dt = \rho_0\cdot T_1$$

$$\int\left[\frac{dG}{dt}\right]^2\cdot dt = \rho_0\Omega_G^2 \qquad R_1^2\leqslant\Omega_G^2\cdot T_2^2$$

$$\int\left[\frac{d\phi}{dt}\right]^2\cdot G^2\cdot dt = \rho_0\Omega_\phi^2 \qquad R_2^2\leqslant\Omega_\phi^2\cdot T_2^2$$

$$\int\left[\frac{dG}{dt}\right]^2\cdot t\cdot dt = \rho_0R^G_{21} \qquad (R^{\phi}_{12})^2\leqslant R^{\phi}_{22}\cdot T_2^2$$

$$\int\left[\frac{d\phi}{dt}\right]^2\cdot t\cdot G^2\cdot dt = \rho_0R^{\phi}_{21} \qquad R_1^2\leqslant R^G_{22}$$

$$\int\left[\frac{dG}{dt}\right]^2\cdot t^2\cdot dt = \rho_0\cdot R^G_{22} \qquad R_2^2\leqslant R^{\phi}_{22}$$

$$\int\left[\frac{d\phi}{dt}\right]^2\cdot t^2\cdot G^2\cdot dt = \rho_0R^{\phi}_{22} \qquad |R|^2\leqslant R_{22}$$

$$\Omega_2^2 = \Omega_G^2 + \Omega_\phi^2$$

$$\int G\cdot\frac{dG}{dt}\cdot t\cdot dt = -\rho_0/2 \qquad \int G^2\cdot dt = \rho_0$$

$$\int\frac{d\phi}{dt}\cdot t\cdot G^2\cdot dt = \rho_0\cdot R_2$$

$$\int\frac{d\phi}{dt}\cdot t^2G^2\cdot dt = \rho_0\cdot R^{\phi}_{12}$$

$$\left|\int\frac{dA}{dt}\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot t\cdot dt\right|^2 \leqslant \int\frac{dA}{dt}\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot dt\cdot\int\frac{dA}{dt}\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot t^2\cdot dt$$

$$\left|\int A\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot t^2dt\right|^2 \leqslant \int AA^*t^2dt\cdot\int\frac{dA}{dt}\cdot\frac{dA^*}{dt}\cdot t^2\cdot dt$$

$$R_{21}^2\leqslant\Omega_2^2\cdot R_{22}$$

$$|R_{12}|^2\leqslant T_2^2\cdot R_{22}$$

$$R_{21} = R^G_{21} + R^\phi_{21}$$

$$R_{22} = R^G_{22} + R^\phi_{22}$$

$$\mathcal{I}m\, R_{12} = -R^\phi_{12} \qquad (R^G_{21})^2 \leqslant \Omega_G^2 \cdot R^G_{22} \qquad (R^\phi_{21})^2 \leqslant \Omega_\phi^2 \cdot R_{22}$$

I.2.4 - Montrons que les courbes d'égale amplitude ρ sont toujours des ellipses.

1) Préliminaires -

a) $T_2^2 + \frac{2R^\phi_{12}}{\omega_0} + \frac{R^\phi_{22}}{\omega_0^2} - \frac{R_2^2}{\omega_0^2} =$

$$\frac{\int G^2 dt \cdot \int \left(\frac{d\phi}{dt}\frac{1}{\omega_0} + 1\right)^2 G^2 t^2 dt - \left(\int \frac{G^2 t}{\omega_0}\cdot\frac{d\phi}{dt}\, dt\right)^2}{\left(\int G^2 \cdot dt\right)^2}$$

l'inégalité de Schwartz donne

$$\left(\int G\left(\frac{d\phi}{dt}\frac{1}{\omega_0} + 1\right) G\cdot t\cdot dt\right)^2 = \left(\int G^2\frac{d\phi}{dt}\cdot\frac{1}{\omega_0}\cdot dt\right)^2 \leqslant \int G^2 dt \cdot \int\left(\frac{d\phi}{dt}\cdot\frac{1}{\omega_0} + 1\right)^2 \cdot G^2 t^2 dt$$

d'où $T_2^2 + 2\frac{R^\phi_{12}}{\omega_0} + \frac{R^\phi_{22}}{\omega_0^2} - \frac{R_2^2}{\omega_0^2} \geqslant 0$

b) $\frac{R^G_{22}}{\omega_0^2} - \frac{1}{4\omega_0^2} =$

$$\frac{\int G^2 dt\cdot\int\left(\frac{t}{\omega_0}\cdot\frac{dG}{dt}\right)^2 dt - \left(\int G\cdot\frac{dG}{dt}\cdot\frac{t}{\omega_0}\cdot dt\right)^2}{\left(\int G^2 dt\right)^2}$$

l'inégalité de Schwartz donne

$$\left(\int G\cdot\frac{dG}{dt}\cdot\frac{t}{\omega_0}\cdot dt\right)^2 \leqslant \int G^2 dt\cdot\int\left(\frac{t}{\omega_0}\cdot\frac{dG}{dt}\right)^2\cdot dt$$

d'où $\frac{R^G_{22}}{\omega_0^2} - \frac{1}{4\omega_0^2} \geqslant 0$

d'où finalement

$$T'^2_2 = T_2^2 + 2\frac{R^\phi_{12}}{\omega_0} + \frac{R_{22}}{\omega_0^2} - \frac{R_2^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{4\omega_0^2} \geqslant 0$$

2) Résultat définitif -

$$\left(T_2^2 + 2\frac{R^\phi_{12}}{\omega_0} - \frac{R_2^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{4\omega_0^2} + \frac{R_{22}}{\omega_0^2}\right)\lambda^2 \pm 2\lambda\left(R_2 + \frac{R_{21}}{\omega_0}\right) + \Omega_2^2 =$$

$$\frac{\int G^2 dt \cdot \int\left[\left(\lambda G t + G\cdot\frac{d\phi}{dt}\left[\frac{\lambda t}{\omega_0}\pm 1\right]\right)^2 + \left(\frac{dG}{dt}\cdot\left[\frac{\lambda t}{\omega_0}\pm 1\right]\right)^2\right]dt}{\left[\int G^2\cdot dt\right]^2} - \left(\frac{\int G^2\frac{d\phi}{dt}\cdot\frac{t\lambda}{\omega_0}\cdot dt}{\int G^2\cdot dt}\right)^2 - \left(\frac{\int G\cdot\frac{dG}{dt}\cdot\frac{t\lambda}{\omega_0}\cdot dt}{\int G^2\cdot dt}\right)^2$$

Montrons que le 2e Membre est positif pour tout λ. Envisageons successivement les grandeurs suivantes

a) $\int G\cdot\left[\lambda G t + G\cdot\frac{d\phi}{dt}\cdot\left[\frac{\lambda t}{\omega_0}\pm 1\right]\right]dt = \int G^2\cdot\frac{d\phi}{dt}\cdot\frac{t\lambda}{\omega_0}\cdot dt$

Appliquons l'inégalité de Schwartz

$$\left(\int G\left[\lambda G t + G\cdot\frac{d\phi}{dt}\cdot\left[\frac{\lambda t}{\omega_0}\pm 1\right]\right]dt\right)^2 \leqslant \int G^2 dt\cdot\int\left(\lambda G t + G\cdot\frac{d\phi}{dt}\cdot\left[\frac{t\lambda}{\omega_0}\pm 1\right]\right)^2\cdot dt$$

b) $\int G\left[\frac{dG}{dt}\cdot\left[\frac{\lambda t}{\omega_0}\pm 1\right]\right]dt = \int G\cdot\frac{dG}{dt}\cdot\frac{t\lambda}{\omega_0}\cdot dt$

Appliquons l'inégalité de Schwartz

$$\left(\int G\left[\frac{dG}{dt}\cdot\left[\frac{\lambda t}{\omega_0}\pm 1\right]\right]dt\right)^2 \leqslant \int G^2 dt\cdot\int\left(\frac{dG}{dt}\cdot\left[\frac{\lambda t}{\omega_0}\pm 1\right]\right)^2\cdot dt$$

On en déduit que le 2e Membre est positif ou nul et successivement

$$\lambda^2\cdot\left[T_2^2 + \frac{2R^\phi_{12}}{\omega_0} - \frac{R_2^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{4\omega_0^2} + \frac{R_{22}}{\omega_0^2}\right] \pm 2\lambda\cdot\left(R_2 + \frac{R_{21}}{\omega_0}\right) + \Omega_2^2 \geqslant 0 \quad \forall\lambda$$

il en découle que le trinôme n'a pas de racines réelles distinctes et que

$$\left(R_2 + \frac{R_{21}}{\omega_0}\right)^2 \leqslant \Omega_2^2\left[T_2^2 + \frac{2R^\phi_{12}}{\omega_0} - \frac{R_2^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{4\omega_0^2} + \frac{R_{22}}{\omega_0^2}\right]$$

On en déduit que les courbes d'égale amplitude de K de la fonction d'ambiguïté dans le plan τ,Ω qui ont pour équations

$$\frac{\Omega^2}{2}\underbrace{\left[T_2^2 + \frac{2R^\phi_{12}}{\omega_0} - \frac{R_2^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{4\omega_0^2} + \frac{R_{22}}{\omega_0^2}\right]}_{T'^2_2} + \frac{\tau^2}{2}\underbrace{\Omega_2^2}_{\Omega'^2_2} - \Omega\tau\underbrace{\left[R_2 + \frac{R_{21}}{\omega_0}\right]}_{R'^2_2} = 1-K$$

dans l'approximation du 2e Ordre sont des ellipses puisque la condition pour qu'il en soit ainsi $T'^2_2\cdot\Omega'^2_2 \geqslant R'^2_2$ est précisement vérifiée comme on l'a établi ci-dessus

$$\lambda^2\cdot\left[T'^2_2\right] \pm 2\lambda\cdot\left[R'_2\right] + \left[\Omega'^2_2\right] \geqslant 0 \quad \forall\lambda$$

$$R'^2_2 \leqslant T'^2_2\cdot\Omega'^2_2$$

I.3 - Estimation des paramètres.

Nous donnons ici un traitement mathématique aboutissant à une formule approchée des précisions d'estimation des paramètres et leur plage de dispersion.

Conservons à l'instar de M.Helstrom le cadre de la recherche de la position et des dispersions des extremums de G lorsqu'on a τ et k suivant les diverses réalisations

FONCTION D'AMBIGUITE GENERALISEE INTERVENANT DANS LES SYSTEMES DE DETECTION ACTIVE UTILISANT LES TESTS OPTIMAUX DE NEYMAN-PEARSON.
GENERALIZED AMBIGUITY FUNCTION INTERVENING IN ACTIVE DETECTION SYSTEMS USING THE NEYMAN-PEARSON OPTIMAL TESTS.

de $\vec{B}$, mais inversement au lieu de formuler dès l'abord une expression approchée des solutions $\vec{\theta}'$ de l'équation $\frac{\partial G}{\partial \vec{\theta}} = 0$ nous ne le ferons qu'à la fin.
Les calculs précédents ont montré que

$$p(u,v) = p(V^{(1)}_{B\tau'}(\tau') = u ; V^{(1)}_{Bk'}(k') = v)$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{\det \Gamma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(u,v)\,\Gamma^{-1}\binom{u}{v}}$$

$$P_r(u,v) = p(u,v)\cdot du \cdot dv = P_r\Big[V^{(1)}_{B\tau'}(\tau') \in [u,u+du] \;; V^{(1)}_{Bk'}(k') \in [v,v+dv]\Big]$$

Considérons

$$P_r(m^{(1)}_{\tau'}(\tau^{\tau',k'},k^{\tau',k'}), m^{(1)}_{k'}(\tau^{\tau',k'},k^{\tau',k'}))$$

$$= P_r\Big[V^{(1)}_{B\tau'}(\tau') \in [m^{(1)}_{\tau'}, m^{(1)}_{\tau'}+dm^{(1)}_{\tau'}] ; V^{(1)}_{Bk'}(k') \in [m^{(1)}_{k'}, m^{(1)}_{k'}+dm^{(1)}_{k'}]\Big]$$

$$= P_r\Big[V^{(1)}_{\tau'} \in [0,0+dm^{(1)}_{\tau'}] ; V^{(1)}_{k'} \in [0,0+dm^{(1)}_{k'}] \;/\tau,k\Big]$$

$$= K_m P_r\Big[\tau_{ext} \in [\tau',\tau'+d\tau'] \;;\; k_{ext} \in [k',k'+dk'] \;/\tau,k\Big]$$

donc

$$p_{\tau,k}(\tau',k') = \text{densi } P_r[\tau_{ex}=\tau', k_{ex}=k'/_{\tau,k}]$$

$$p_{\tau,k}(\tau',k') = \frac{K_m}{2\pi\sqrt{\det\Gamma}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(m^{(1)}_{\tau'} m^{(1)}_{k'})\Gamma^{-1}\begin{pmatrix} m^{(1)}_{\tau'} \\ m^{(1)}_{k'} \end{pmatrix}} \cdot \left| \frac{\partial m^{(1)}_{\tau'}}{\partial \tau'} \cdot \frac{\partial m^{(1)}_{k'}}{\partial k'} - \frac{\partial m^{(1)}_{\tau'}}{\partial k'} \cdot \frac{\partial m^{(1)}_{k'}}{\partial \tau'} \right|$$

on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} p_{\tau k}(\tau',k') \cdot d\tau' \cdot dk' = 1$$

Nous envisagerons 4 cas :

- <u>Cas d'un signal sans structure fine suivant τ</u>

$$C = 1 - \frac{\Omega_2'^2}{2}\cdot\tau^2 - \frac{\tilde{T}_2'^2}{2}\cdot\xi^2 + \tilde{R}'_2 \cdot \tau\cdot\xi$$

$\Omega'^2_2 = \Omega^2_2$ $\qquad S(t) = A(t)$ réel

$\tilde{T}'^2_2 = R_{22} - \frac{1}{4}$ $\qquad C_{SS} \equiv \psi_{AA}$

$\tilde{R}'_2 = R_{21}$

Ce cas se déduit de celui avec structure fine en passant à la limite $\omega_0 \to 0$

- <u>Signaux avec structure fine</u>

$$\frac{\Omega_2^2}{\omega_0^2} \leqslant \frac{1}{3} \qquad C_{SS} = \mathbb{R}_e\,(e^{i\omega_0\tau} \cdot \psi_{AA})$$

$$C_{SS} = \rho\cdot\cos(\omega_0\tau + \varphi)$$

$$C = \rho\cdot\cos(\omega_0\tau + \varphi) \quad ; \quad \Omega = \xi\omega_0$$

a) <u>Largeur de bande relative faible</u>
le développement limité

$$C = (1 - \frac{\Omega_2'^2}{2}\cdot\tau^2 - \frac{T_2'^2}{2}\cdot\Omega^2 + R'_2\cdot\Omega\cdot\tau)\cdot\cos(\omega_0\tau - \frac{R_2}{\omega_0}\cdot\Omega)$$

$$\Omega_2'^2 = \Omega_2^2$$

$$T_2'^2 = T_2^2 + \frac{2R_{12}^2}{\omega_0} + \frac{R_{22}}{\omega_0^2} - \frac{R_2^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{4\omega_0^2}$$

$$R'_2 = (R_2 + \frac{R_{21}}{\omega_0})$$

b) <u>Largeur de bande relative grande</u> : le cos évolue aussi rapidement que ρ (la structure fine disparaît)

$$C = (1 - \frac{\Omega_2'^2\tau^2}{2} - \frac{T_2'^2}{2}\cdot\Omega^2 + R'_2\cdot\Omega\tau)$$

$$\Omega_2'^2 = \Omega_2^2 + \omega_0^2$$

$$T_2'^2 = T_2^2 + \frac{2R_{12}^2}{\omega_0} + \frac{R_{22}}{\omega_0^2} - \frac{1}{4\omega_0^2}$$

$$R'_2 = 2\,R_2 + \frac{R_{21}}{\omega_0}$$

c) <u>Cas de la bande très étroite</u>.

$$T_2'^2 = T_2^2 + \frac{2R_{12}^{\phi}}{\omega_0} + \frac{R_{22}}{\omega_0^2} - \frac{R_2^2}{\omega_0^2} - \frac{1}{4\omega_0^2} \to T_2^2$$

$$R'_2 = R_2 + \frac{R_{21}}{\omega_0} \to R_2$$

les termes en $\frac{1}{\omega_0}$ tendent vers 0

$$C = (1 - \frac{\Omega_2^2\tau^2}{2} - \frac{T_2^2}{2}\cdot\Omega^2 + R_2\cdot\tau\Omega)\cdot\cos(\omega_0\tau)$$

$$\psi_{AA} \to \psi_{AA_{Woodward}}$$

I.3.1 - <u>Cas du signal sans structure fine</u>

$$p(\tau,\xi) = p_{\tau'',k''}(\tau',k') =$$

$$\frac{d^2\cdot\sqrt{\tilde{T}_2'^2\cdot\Omega_2'^2 - \tilde{R}_2'^2}}{2\pi}\, e^{-\frac{d^2}{2}[\Omega_2'^2\tau^2 + \tilde{T}_2'^2\cdot\xi^2 - 2\tilde{R}'_2\cdot\tau\cdot\xi]}$$

$$\simeq p_{\tau'',k''}(\hat{\tau} = \tau' \;,\; \hat{k} = k')$$ si d rapport signal sur bruit fort

Mettons sous la forme canonique

$$p(\tau,\xi) = \frac{1}{2\pi\sigma_\tau\cdot\sigma_\xi\sqrt{1-\rho_c^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-\rho_c^2)}\left(\frac{\tau^2}{\sigma_\tau^2} + \frac{\xi^2}{\sigma_\xi^2} - \frac{2\tau\cdot\xi\cdot\rho_c}{\sigma_\tau\sigma_\xi}\right)}$$

FONCTION D'AMBIGUITE GENERALISEE INTERVENANT DANS LES SYSTEMES DE DETECTION ACTIVE UTILISANT LES TESTS OPTIMAUX DE NEYMAN-PEARSON.
GENERALIZED AMBIGUITY FUNCTION INTERVENING IN ACTIVE DETECTION SYSTEMS USING THE NEYMAN-PEARSON OPTIMAL TESTS.

On en déduit

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\Omega_2'^2}{d^2[\Omega_2'^2 \cdot \tilde{T}_2'^2 - \tilde{R}_2'^2]} \quad \text{si } \tilde{R}_2' = 0 \text{ alors } \sigma_\xi^2 = \frac{1}{d^2 \cdot \tilde{T}_2'^2}$$

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\tilde{T}_2'^2}{d^2[\Omega_2'^2 \cdot \tilde{T}_2'^2 - \tilde{R}_2'^2]} \quad \text{si } \tilde{R}_2' = 0 \text{ alors } \sigma_\tau^2 = \frac{1}{d^2 \cdot \Omega_2'^2}$$

$$\rho_c^2 = \frac{\tilde{R}_2'^2}{\Omega_2'^2 \cdot \tilde{T}_2'^2}$$

Du fait de la corrélation ρ_c les précisions d'estimation simultanée de ξ et τ sont diminuées (déterminées par les lois marginales)

I.3.2 - Cas général

Le cas extrême simple abordé précédemment nous indique la ligne à suivre pour traiter du cas le plus rencontré en pratique où la fonction d'ambiguïté présente une structure fine.

a) Cas où ρ joue le rôle d'une enveloppe

$\frac{\Omega_2}{\omega_0} \ll 1$ et dans le cas d'un rapport signal sur bruit $d \gg 1$.

Les dérivées peuvent être calculées à partir de l'expression $C = \rho \cos(\omega_0 \cdot \tau)$

Le domaine τ, Ω, intéressé est de l'ordre de $d^2\ (\tau^2 \cdot \Omega_2'^2 + \Omega^2 \cdot T_2'^2 - 2R_2' \cdot \tau\Omega) \leqslant 4$

c'est à dire $\tau^2 \cdot \Omega_2'^2 + \Omega^2 T_2'^2 - 2R_2' \cdot \tau\Omega \ll 1$

L'évolution d'un terme $\cos(\omega_0\tau)$ est de plusieurs alternances dans les limites du domaine $\tau^2 \cdot \Omega_2'^2 + \Omega^2 \cdot T_2'^2 - 2R_2' \cdot \tau\Omega = 1$

L'expression approchée de $p(\tau,\Omega)$ valable dans les régions de valeur appréciable de $p(\tau,\Omega)$ se déduit de $p_{\tau'',k''}(\tau',k')$.

Les points d'égale probabilité maximale p_0 d'être des maximums sont les points d'intersection entre des droites τ et les ellipses telles que

$$p(\tau,\Omega) = p_0 = cte = e^{-\frac{1}{2} d^2 (\Omega_2'^2 \cdot \tau^2 + T_2'^2 \cdot \Omega^2 - 2R_2' \cdot \tau\Omega)}$$

$$\frac{\sqrt{\Omega_2'^2 \cdot T_2'^2 - R_2'^2}}{2\pi} \cdot d^2 \left[1 + \frac{\omega_0^2\, T_2'^2 (1 - (1-\rho))}{\Omega_2'^2\, T_2'^2 - R_2'^2}\right]$$

Soit approximativement puisque

$$\tau^2 \cdot \Omega_2'^2 + \Omega^2 \cdot T_2'^2 - 2R_2' \cdot \tau\Omega \ll 1$$

$$p_M(\tau,\Omega) = e^{-\frac{1}{2} d^2 (\tau^2 \cdot \Omega_2'^2 + \Omega^2 \cdot T_2'^2 - 2R_2' \cdot \tau\Omega)} \cdot \frac{\sqrt{\Omega_2'^2\, T_2'^2 - R_2'^2}}{2\pi} \cdot d^2 \cdot \left[\frac{\omega_0^2\, T_2'^2}{\Omega_2'^2\, T_2'^2 - R_2'^2}\right]$$

$$(\tau^2 \cdot \Omega_2'^2 + \Omega^2 \cdot T_2'^2 - 2R_2'^2 \cdot \tau\Omega = \frac{K'}{d^2} = 2 \cdot (1-\rho))$$

Cette courbe $z = P_M(\tau,\Omega)$ constitue l'enveloppe de la répartition de probabilité $p(\tau,\Omega)$. Elle conditionne le domaine de dispersion, due à la présence du bruit, du Maxi des Maximums.

Il reste à introduire $P_{M_m}(\tau,\Omega)$ qui est la distribution précédente normée parfaitement équivalente du point de vue dispersion mais qui ne donne bien sur plus les valeurs des probabilités maximales

$$p_{M_m}(\tau,\Omega) = \frac{\sqrt{\Omega_2'^2 T_2'^2 - R_2'^2}}{2\pi} \cdot d^2\, e^{-\frac{1}{2} d^2 (\tau^2 \Omega_2'^2 + \Omega^2 T_2'^2 - 2R_2'^2 \cdot \tau\Omega)}$$

Elle est gaussienne.

Ce résultat montre que la structure fine de C ne modifie pas sensiblement les modalités de dispersion. La structure fine a pour effet de concentrer la probabilité pour qu'un point soit un maximum autour de certains points, ces points se dispersant en probabilité de la même manière que précédemment.

Ce résultat qui demeure approximativement valable pour

$$\frac{\Omega_2}{\omega_0} \leqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$$

montre nettement l'influence de la fréquence porteuse ω_0 (indépendamment de la nécessité de son introduction dans le système pour des raisons de propagation).

A largeur de bande B.F. égale un signal avec porteuse est plus performant en précision ξ qu'un signal sans porteuse.

$$\sigma_\Omega^2 = \frac{\Omega_2'^2}{d^2(\Omega_2'^2 \cdot T_2'^2 - R_2'^2)} \qquad (\Omega = \xi\, \omega_0)$$

avec porteuse (M.A) $\quad \sigma_\xi^2 = \frac{\Omega_2'^2}{\omega_0^2 \cdot d^2 \cdot (\Omega_2'^2\, T_2'^2 - R_2'^2)}$

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\Omega_G^2}{d^2 \cdot [(R_{22} - \frac{1}{4}) \cdot \Omega_G^2 - R_{21}^{G^2}] + \omega_0^2 d^2 \cdot \Omega_G^2 T_2^2}$$

sans porteuse $\quad \sigma_\xi^2 = \frac{\Omega_G^2}{d^2 \cdot [(R_{22} - \frac{1}{4}) \cdot \Omega_G^2 - R_{21}^{G^2}]}$

CONCLUSION -

Les six coefficients précités permettent une mise en place rapide d'un diagramme d'ambiguïté simplifié. Ainsi par exemple l'ambiguïté existante ou non d'un signal modulé en fréquence par une loi quelconque apparaît immédiatement. Dans le texte les dispersions ont été déterminées de manière approchée et se présentent sous une forme analytique facilement utilisable ; le calcul rigoureux n'est exploitable que numériquement.

BIBLIOGRAPHIE - |1| - HELSTROM C.W.-Statistical theory of signal detection - Second Edition - Pergamon Press.
|2|-PICINBONO B.-VEZZOSI G.-Extension du critère de Neyman-Pearson en détection d'hypothèses multiples-Colloque GRETSI juin 75 NICE, p.455 à 462
|3|-VEZZOSI G.-Détection d'un signal dans un bruit de loi incertaine. Thèse de Doctorat d'Etat-Université de Paris Sud-Centre d'Orsay - Mai 1976.