SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU
SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

PROCESSUS DE DECISION ET STRUCTURE HIERARCHISEE

Jean-Claude LEVY

DPMM/PA 3 Avenue Octave Gréard 75007 PARIS

RESUME

On considère, pour la clarté de l'exposé, une structure à deux niveaux:
- un dispositif d'analyse du signal et de décision automatique.
- un opérateur humain chargé d'intervenir quand l'automatisme risque de se tromper.

En cas d'incertitude, on utilise un processus dont le formalisme mathématique est voisin de celui de l'entropie au sens de SHANNON. La validité des équations est discutée et les hypothèses de base sont modifiées de façon à introduire une nouvelle notion de l'entropie appelée: "entropie subjective" la quelle est surtout une variable d'état mais reste valable comme une approximation de l'entropie.

On démontre que le but du système est de minimiser l'entropie subjective, ce qui revient, grosso modo, à rechercher le maximum d'organisation.

Le présent modèle dérive d'un modèle de structure de l'activité mentale, il se retrouve dans "Le Concept d'Angoisse" de KIERKEGAARD.

Des applications doivent pouvoir être trouvées dans le problème des relations homme-machine, la machine alertant elle même l'opérateur au cas où elle risquerait de se tromper.

Une telle opération est courante pour les ordinateurs, dans le cas présent, le problème traité est différent.

-=oO§Oo=-

SUMMARY

DECISION MAKING AND MULTILEVELED STRUCTURE

For the sake of clarity, a two-leveled structural model is presented:
- A device for signal analysis and automatic decision making.
- A human operator who intervenes when the automatism runs the risk of error.

In case of uncertainty, a process is used whose mathemetical formalism is similar to that of SHANNON's concept of entropy. The validity of equations is discussed and basis hypothèses are modified in order to introduce a new notion of entropy. This "subjective entropy" is a descriptive variable of the physical state of the system although it remains valid as an approximation of entropy.

The purpose of the system is demonstrated to be the reduction of subjective entropy to a minimum value, which essentially means seeking the maximum level of organisation.

This process was studied as a model for the structure of mental activity. It can be found in the "anxiety concept" of KIERKEGAARD. Application of that principle should allow resolution of problems concerning machine-man relationships, the machine itself warning the operator when it runs the risk of error.

Such operation is common practice for computer but the present problem is completly different.

-=oO§Oo=-

PROCESSUS DE DECISION ET STRUCTURE HIERARCHISEE

Introduction

Le modèle présenté ici dérive de considérations relatives à la hiérarchisation des fonctions mentales et au rôle de mécanismes destinés à éveiller l'attention des niveaux supérieurs d'intégration psychologique.

Une façon imagée d'introduire cette notion consiste à comparer l'organisation de notre structure mentale à celle d'une hiérarchie administrative.

A un certain niveau, se trouve un employé qui juge de l'éventualité d'un événement déterminé: s'il a la certitude que le dit événement se produira ou ne se produira pas, il prendra seul une décision en conséquence, ceci à tort ou à raison. S'il éprouve un doute, il en référera à l'autorité supérieure la quelle effectuera un supplément de vérification.

Dans le premier cas, il s'agit d'une réaction automatique et il faut noter que si l'employé éprouve une certitude, il ne se donnera même pas la peine de vérifier si l'événement en question s'est réellement produit ou non, celà n'est d'ailleurs pas son affaire.

Nous pouvons effectuer un rapprochement entre le doute et un terme composant l'entropie: quand le doute est levé, il y a annulation d'un terme d'entropie, donc, gain en néguentropie.

Si donc notre employé n'a pas la possibilité de poser à son supérieur autant de questions qu'il le voudrait, il devra choisir celles présentant le maximum de doute et se décider lui même tant bien que mal dans les autres cas.

Supposons maintenant que tous les événements prévisibles constituent un alphabet, soit p_i la probabilité pour que se produise l'événement e_i; nous pouvons, bien que nous ne soyons pas dans son domaine d'application exprimer l'entropie au sens de SHANNON:

$$H = -\sum p_i \mathrm{Log} p_i \qquad (1)$$

nous appellerons l'élément d'entropie le terme: $h_i = -p_i \mathrm{Log} p_i$

La référence au niveau supérieur sera conditionnée par la valeur de h_i.

Remarque

L'entropie au sens de SHANNON est un coefficient par le quel on multiplie le nombre de caractères d'un message pour en calculer la capacité d'information, il donne donc la capacité moyenne de chaque caractère. La probabilité p_i définit la proportion de rencontres du caractère d'indice i, cette proportion n'étant définie que si le nombre de caractères du message est assez grand: il s'agit là d'une hypothèse d'ergodicité.

Dans le cas présent, la probabilité p_i est celle d'un événement unique et le terme h_i définit, dans une optique analogue à celle de la théorie des jeux, le gain en néguentropie correspondant à la vérification de l'événement e_i.

$$p_i = 0 \text{ ou } p_i = 1 \Rightarrow h_i = 0$$

celà veut dire qu'il n'y a aucun intéret à se donner la peine de vérifier l'arrivée d'un événement jugé impossible ou certain.

Remarque

H ne s'appelle une entropie que tant que le message n'a pas été déchiffré et que nous en ignorons le contenu: quand ce message est lu, H s'annulle, la capacité d'information du message est utilisée, le gain en néguentropie est H.

Supposons maintenant qu'on ne puisse lire que quelques caractères, il y aura intéret à choisir ceux pour les quels la valeur de h est la plus grande.

Mais alors:

$$p_i = 1 \Rightarrow \forall j \neq i,\ p_j = 0$$

d'où $H = 0$

Pour $p_i = 0$ il doit se faire une redistribution des p_i et nul ne peut affirmer que le gain en néguentropie soit h_i.

Nous pouvons alors considérer des événements e_i° de probabilités q_i et définir des entropies élémentaires:

$$h_i^\circ = -q_i \mathrm{Log} q_i - (1-q_i)\mathrm{Log}(1-q_i)) \qquad (1 \text{ bis})$$

avec : $H^\circ = \sum h_i^\circ$

Après vérification de l'événement e_i° le gain en néguentropie est h_i°.

En pratique, tous les événements ne sont pas indépendants, mais nous pouvons considérer qu'ils le sont dans un premier stade de l'opération, une opération suivante consistant à déterminer leurs influences réciproques. Il y a donc toujours, en premier lieu, un gain en néguentropie.

Par exemple, nous gagnons toujours, en premier lieu, à prendre connaissance du contenu d'un message, mais si la nature de ce contenu nous trouble, il peut y avoir, tout compte fait une importante augmentation d'entropie.

Nous verrons que dans les cas réels la vérité tient des deux expressions de l'entropie.

Exemple concret

Nous allons donner ici un exemple concret qui rentre bien dans le cadre du présent colloque:

Une région est protégée par un certain nombre de SONAR ou de RADAR dont chacun est chargé de surveiller un secteur déterminé.

Pour rester dans le domaine des définitions mathématiques, nous supposerons que ces secteurs constituent une partition de l'espace à couvrir et que d'autre part, on sait qu'il va survenir une attaque et une seule.

L'arrivée de l'assaillant dans le secteur s_i correspond à l'événement e_i de probabilité p_i.

Soit x_i le signal reçu par chaque RADAR la probabilité de présence d'un ennemi dans son secteur sera:

$$p_i = p(x_i)$$

qui, d'une façon très générale sera représentée par une courbe sigmoïde telle que celle représentée ci dessous.

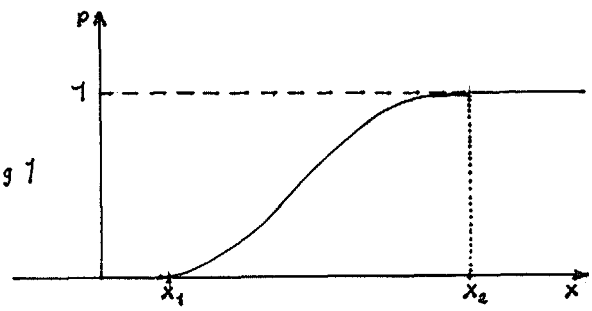


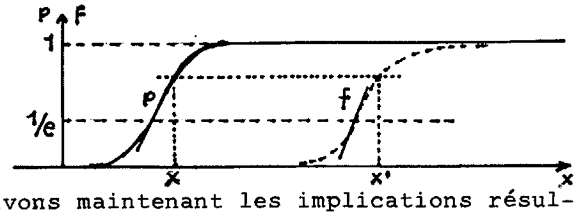
Fig 1

pour $x < x_1$ $p=0$
le système prend alors la décision:pas d'alerte dans ce secteur.
pour $x > x_2$ la décision est:alerte dans le secteur : $p=1$
Si $x_1 < x < x_2$,le système ne prend pas de décision et alerte l'opérateur.
Ce cas est facile à reconnaitre parce que:
$$\frac{dp}{dx} > 0$$

Remarque
Dans presque tous les cas,la courbe: $y=p(x)$ dérive de considérations statistiques et se calcule à partir d'une loi normale,le point d'inflexion a pour ordonnée $1/e$.

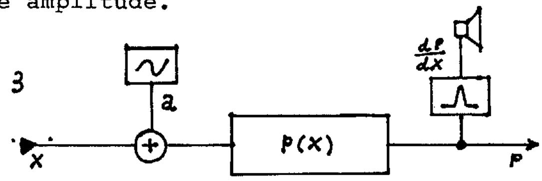
Théorème
Si la courbe $y=p(x)$ ne comporte qu'un point d'inflexion d'ordonnée $1/e$,sa dérivée est fonction croissante monotone de $h=-p\text{Log}p$

Il suffit de considérer la fonction:
$$f(x) = e^{-e^{-x}}$$
qu'on peut vérifier comme étant une solution de l'équation différentielle:
$$\frac{df}{dx} = -f.\text{Ln } f \quad (\text{où} \quad \text{Ln } f = \text{Log}.f/\text{Log } e)$$
On vérifie également que:
$$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to 0$$
$$x \to \infty \Rightarrow f(x) \to 1$$
et que $\frac{df}{dx}$ prend sa valeur maximale pour
$x = 1/e$.
Représentons sur un même graphe les deux courbes $p(x)$ et $f(x)$,seules les ordonnées coïncident.
Soient x_o et x'_o les abcisses des points d'inflexion dont les ordonnées sont égales toutes les deux à $1/e$.
Soient x et x' tels que:
$p(x) = f(x')$
x et x' sont du même coté du point d'inflexion,il en résulte que:
$$\frac{d^2p}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right) \quad \text{et} \quad \frac{d^2f}{dx'^2} = \frac{d}{dx'}\left(\frac{df}{dx'}\right)$$
sont du même signe,donc que $\frac{dp}{dx}$ et $\frac{df}{dx'}$ sont fonctions croissantes l'une de l'autre.

Fig 2


Ecrivons maintenant les implications résultant de ceci:
$$f(x')=p(x) \Rightarrow -p(x)\text{Log}p(x)=-f(x')\text{Log}f(x')=$$
$$=\frac{df(x')}{dx'} \nearrow \frac{dp(x)}{dx} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$
D'où ce résultat:
Le maximum du terme d'entropie correspond au maximum de la pente de la réponse du système.

Signal d'alarme
Représentons par une boite noire le système générant la fonction $p(x)$.
A l'entrée nous plaçons un oscillateur de fréquence donnée et dont l'amplitude du signal reste petite à côté de x_2-x_1,soit a cette amplitude.

Fig 3


Il suffira de placer à la sortie un filtre à bande étroite accordé sur la même fréquence dont le signal de sortie sera:
$$s = a.\frac{dp}{dx}$$

Remarque
Ce procédé est couramment utilisé en matière de psychologie:
Un feu clignotant attire l'attention plus qu'un feu continu.
Le "vibrato" d'une note la rend plus expressive,il en est de même du "trémolo" de la voix.Toute fois,dans ce dernier cas,il ne s'agit pas d'un procédé,car le trémolo et même le vibrato peuvent être interprétés comme des manifestations émotives.

Généralisation de la notion d'entropie.
Dans tous les cas réels,la valeur de p n'est pas prise comme une probabilité au sens mathématique du mot,il s'agit plutôt d'une vraissemblance ou d'un coefficient de prédiction assimilable à un coefficient d'appartenance à un sous ensemble "flou" au sens de ZADEH.
Nous le considérerons ici comme une variable d'état c'est à dire comme une mise en condition en vue de répondre à un événement attendu.Celà est vrai pour les êtres vivants comme pour les systèmes technologiques ou les systèmes mixtes.
Remarquons que nous avons employé la formule (1) dans un sens différent de celui de l'entropie au sens de SHANNON en ce sens qu'il ne s'agit pas d'un ensemble d'éventualités constituant un alphabet,mais de vérifications d'événements que nous effectuons indépendemment les uns des autres.
des l'ors la condition:
$$\sum p_i = 1$$
ne joue plus aucun rôle si ce n'est pour nous permettre de raisonner sur l'entropie.
Dans les systèmes biologiques la somme des p est maintenue au voisinage d'une certaine valeur par un asservissement.D'après un modèle étudié par l'auteur,les oscillations résiduelles de cet asservissement seraient à l'origine des rythmes Electroencéphalographiques.
Dans ces conditions,nous appellerons H: "entropie subjective" et nous postulerons que cette expression peut être prise comme une approximation de l'entropie.L'essentiel étant que l'annulation d'un élément d'entropie subjective h_i puisse être considéré comme une bonne estimation du gain en néguentropie,c'est à dire en organisation.

Remarque
Il s'agit plus exactement de l'espérance de gain en néguentropie,ceci dans l'optique de la théorie des jeux.

Coefficients de pondération

Si nous revenons à l'exemple choisi,il ne suffira pas de décider d'envoyer un engin de reconnaissance en fonction du seul doute h ou h°,certains secteurs peuvent être plus ou moins importants à protèger,certaines attaques peuvent être plus ou moins dangereuses.

Autrement dit,nous ne devons pas seulement tenir compte de la probabilité d'erreur,mais encore du cout de l'erreur;celà nous conduit à la formule suivante:

$$S=-\sum\left[u_i p_i \mathrm{Log}.p_i + v_i(1-p_i)\mathrm{Log}(1-p_i)\right]$$

Les coefficients u et v sont différents,il suffit pour s'en rendre compte de savoir que l'importance de la non-alerte est bien moindre que celle de l'alerte.

S ne représente plus une entropie,mais comme tous les coefficients u_i et v_i sont positifs,nous pouvons énoncer les résultats suivants:

si $\forall i, v_i=0$,H et S considérés comme fonctions linéaires des h_i varient dans le même sens en fonction de chaque élément d'entropie.

Si $\forall i, v_i=u_i$,H° et S varient dans le même sens en fonction de chaque entropie élémentaire h_i°.

S peut donc être considéré comme une fonction croissante de l'entropie,toute diminution de S correspondant à une diminution de H donc à un gain en néguentropie.

Seul le choix de l'hypothèse à controler peut ne pas être le meilleur pour S et pour H car le terme $u_i h_i$ de valeur maximale ne correspond pas forcément à l'élément h_j de plus grande valeur.

Autrement dit,en minimisant l'entropie subjective S on minimise l'entropie ,mais la stratégie appliquée n'est pas forcément la meilleure.

Concept d'angoisse

Le terme de "concept d'angoisse" emprunté au philosophe danois KIERKEGAARD sert à exprimer l'idée suivante:

Les niveaux supérieurs de notre activité mentale ne peuvent être atteints que par des messages dont l'interprétation est incertaine.Le mot angoisse,un peu forcé,exprime plutôt le doute.

Cette idée correspond parfaitement au modèle exposé ici,le doute correspondant à une probabilité intermédiaire entre 0 et 1 correspond bien à un terme d'entropie non nul.

Les niveaux supérieurs alertés en cas de doute cherchent à lever ce doute,en ce faisant,cherchant à annuler le plus grand élément d'entropie possible,ils cherchent à obtenir le maximum de néguentropie,c'est à dire le maximum d'organisation,disons plutôt d'enrichissement.

Celà revient simplement à dire que,ne pouvant chercher la réponse à toutes les questions qu'il pourrait se poser,l'esprit se borne à choisir les plus interessantes.Les questions les plus interessantes étant,en général les plus importantes pour la survie de l'individu ou de l'espèce.

Une telle opération est rendue possible grace au nombre énorme de neurones de notre cerveau,neurones ayant chacun une individualité.

Nous pouvons identifier un processus visant à concentrer de l'information,ce que nous pourrions appeler un "Démon de MAXWELL".Il s'agit d'un des procédés utilisés par les êtres vivants pour accroitre leur niveau d'organisation.

Valeurs esthétiques

Supposons que nous écoutions un morceau de musique,compte tenu des mesures et des notes que nous avons déjà entendues,compte tenu de notre culture musicale,nous avons tendance à prévoir les notes,les mesures,les phrases qui vont suivre.

Si la note que nous entendons avait été prévue avec une probabilité 0 elle nous semblera aberrante et la musique nous semblera cacophonique et incohérente.Si cette même note,ou une autre,avait été prévue avec une probabilité égale à 1,elle semblerait insipide et la mélodie banale et ininteressante.

C'est entre ces deux extrèmes quand h ou h° prennent des valeurs non négligeables,que la note,la mesure,la mélodie apportent le maximum d'enrichissement.Celà correspond bien à la définition de la beauté qui exige un juste milieu entre la banalité et l'incohérence:la beauté doit obéir à certains: "canons",mais une oeuvre d'art doit reflèter une certaine personnalité.

Bien que constituant un art pouvant être qualifié de non figuratif,(terme réservé à la peinture)la musique constitue le codage le plus rationel qui soit pour franchir les différentes serrures défendant les niveaux supérieurs de notre psychisme.

Nous pouvons généraliser ce raisonnement à des représentations spaciales telles que des tableaux,des signes graphiques,des motifs architecturaux,e.t.c. En effet on sait que l'observation d'un objet n'est pas instantannée,et que l'oeil parcourt le tableau sans même que l'observateur s'en apperçoive:l'observation d'une oeuvre intemporelle peut donc se ramener à un séquence temporelle et le processus de décision peut être encore invoqué.

Remarque

Le "nombre d'or" qui sert à définir les proportions les plus esthétiques a pour valeur 0,612 ,son complément à l'unité est 0,388 très voisin de 1/e = 0,365. Or nous savons que c'est pour cette valeur que la probabilité p maximise l'élement d'entropie h qui conditionne l'attention des niveaux supérieurs.Il n'y a là qu'une observation que nous ne pouvons pas encore justifier d'une façon rigoureuse.

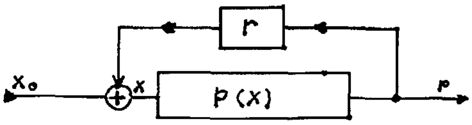
Auto-oscillations

En matière de psychologie,nous savons qu'il n'est pas nécessaire de faire vibrer une note pour la rendre expressive,une telle vibration peut se produire spontannément si la pente de la caractéristique p(x) atteint une valeur suffisante.

Nous savons qu'il existe dans le cerveau des circuits réverbérants,nous allons les introduire sous la forme d'une boucle de réaction.Soir r le taux de réaction,le système sera instable si:

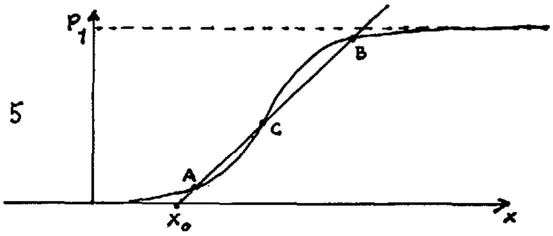
$$r.\frac{dp}{dx} > 1$$

fig 4



La réponse du système n'étant pas linéaire, le gain de la boucle dépend de la valeur de x, ce qui est clairement représenté par la figure ci dessous.

fig 5



-Le point C est un point d'équilibre instable, les points A et B sont des points d'équilibre stables correspondant à la non alerte ($p=\varepsilon$) ou à l'alerte ($p=1-\varepsilon'$)

On voit que, même en cas de doute, le système finira par prendre une décision, mais il aura au paravant prévenu l'opérateur.
L'équation du système s'écrit:

$$x(t)=x_0+r.p(x(t-\theta))$$

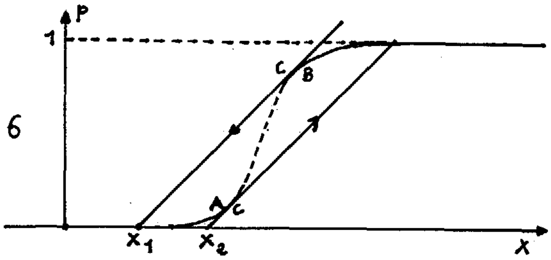
où x_0 représente le signal d'entrée supposé variant lentement, et où θ représente un délai de réponse relativement faible.
x(t) varie en fonction du temps d'apres cette formule de récurrence, cette variation pouvant être utilisée pour alerter les niveaux supérieurs: si ceux ci n'interviennent pas en temps utile, la décision, bonne ou mauvaise, se prend sans eux. En matière de psychologie, celà s'appelle un "blocage".

Remarque

En fait, l'évolution du système se fait d'une manière différente de celle décrite plus haut.

Le signal d'entrée du système n'est plus x mais x_0 que nous supposerons être le niveau de sortie d'un récepteur RADAR ou SONAR. La figure 6 montre clairement le mécanisme de l'opération.

fig 6



Supposons que x_0 croisse lentement, quand il aura atteint la valeur x_2, la probabilité d'alerte varira très rapidement de ε à $1-\varepsilon'$, il s'agit de ce qu'on appelle: une "catastrophe élémentaire". L'opérateur est prévenu au début de l'alerte puis, s'il n'intervient pas, le système reste bloqué en position d'alerte.

Si x_0 retombe en dessous de x_1, il se produit une nouvelle catastrophe élémentaire, p retombe rapidement à la valeur ε et l'opérateur en est averti par cette brusque diminution de p.

On voit qu'avec une telle disposition, l'opérateur est alerté, non pas par manque d'éléments de décision, mais par un changement de situation, c'est à dire par la prise de chaque nouvelle décision. Suivant les cas, l'une ou l'autre des solutions peut être jugée la meilleure.

Ces deux solutions peuvent d'ailleurs se rejoindre si le signal x_0 fluctue et traverse souvent la zône de catastrophe x_1 — x_2; l'opérateur est alors continuellement alerté.

Conclusion

Des considérations générales sur l'entropie nous permettent d'entrevoir la façon dont les psychismes supérieurs peuvent accroitre leur niveau d'organisation en recherchant les informations qui leur apportent le maximum d'enrichissement. Cette sélection se fait en fonction des fluctuations des signaux transmis par les étages inférieurs, fluctuations liées aux difficultés de prise de décision se traduisant par l'augmentation de termes composant l'entropie.

L'organisation mentale de chaque individu se comporte comme une hiérarchie administrative remarquable dans la quelle chaque employé ne dérangerait son patron que quand il se trouverait en difficulté, le reste du temps, il agit de som propre chef, ce qui, du point de vue des étages supérieurs sera considéré comme une action automatique.

Ces considérations nous conduisent à imaginer un principe très simple: un dispositif automatique n'alerterait l'opérateur qu'au cas où il risquerait de se tromper. Dans les exemples donnés au cours du présent essai, il s'agit de détecteurs RADAR ou SONAR qui pourraient se trouver à la limite de sensibilité.

Par opérateur, nous pouvons entendre un automatisme plus élaboré dont l'entrée en action, plus couteuse, ne se ferait qu'en cas de besoin.

Comme le formalisme mathématique de l'entropie au sens de SHANNON ne s'applique pas rigoureusement, nous introduisons une notion d'entropie généralisée que nous considérons surtout comme une "variable d'état" et qui se trouve, pratiquement, être toujours une fonction croissante de l'entropie.

On sait que l'entropie au sens de SHANNON est reliée à l'entropie au sens thermodynamique par le constante de BOLTZMANN, les résultats relatifs à la décroissance de l'entropie, c'est à dire à la néguentropie restent valables malgré les approximations consenties.

-=oO§Oo=-

BIBLIOGRAPHIE

L.BRILLOIN: "Science and Information Theory" Academic Press New York 1956

L.BRILLOIN: "Scientific Uncertainty and Information" Academic Press New York 1964

H.ATLAN: "L'organisation biologique et la théorie de l'information." Hermann 1972

DE LUCA et TERMINI: "Entropie et flou" Information and Control, Jan.1974

J.C.LEVY: "Le temps psychologique" Dunod 1969 (Epuisé)

J.C.LEVY: "Structures mentales et réseaux neuroniques" A paraitre...éventuellement.