SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

DEGRADATION DU GAIN ASSOCIEE AUX INCOHERENCES DE LA PROPAGATION OU AUX DEFORMATIONS ALEATOIRES D'UNE ANTENNE LINEAIRE

Robert LAVAL

Société d'Etudes et Conseils AERO - 3 avenue de l'Opéra - 75001 PARIS

RESUME

On présente une méthode qui permet de calculer la dégradation de gain d'une antenne linéaire soumise au traitement classique de formation de voies directives lorsque la cohérence spatiale du signal se trouve limitée, soit par un processus de diffusion dans le milieu de propagation, soit par les déformations aléatoires qui peuvent affecter la linéarité de l'antenne.

Un rappel des propriétés générales de l'antenne linéaire conduit à une expression du gain d'antenne idéal qui fait intervenir la fonction de pondération de l'antenne elle-même et la fonction de corrélation spatiale du bruit.

Lorsqu'on se trouve en présence d'un signal imparfaitement cohérent le gain est réduit par un certain "facteur de dégradation" que l'on peut calculer à partir de la fonction de cohérence spatiale du signal et de la fonction de pondération de l'antenne.

Dans le cas d'un milieu diffusant, la fonction de cohérence spatiale peut être déduite de résultats d'expérience. On montre sur un exemple que le gain tend vers une valeur limite lorsque la longueur de l'antenne est très supérieure à la distance de corrélation effective du signal.

Dans le cas des déformations aléatoires de l'antenne, une fonction de cohérence spatiale apparente du signal peut être calculée à partir du modèle stochastique qui caractérise ces déformations. On peut en déduire l'expression du facteur de dégradation en fonction de paramètres réduits qui dépendent de la longueur de l'antenne, de la fréquence, de la direction du signal, et des paramètres statistiques qui caractérisent les déformations.

SUMMARY

A method is given that allows the gain degradation of a linear array processed by a conventional beam former to be computed when the signal spatial coherence is reduced, either by a diffusion process within the propagation medium, or by the random deformations of the line supporting the array.

The general properties of linear arrays are briefly recalled and an expression is given which relates the ideal antenna gain to the noise spatial coherence function and the array weighting function.

When dealing with an imperfectly coherent signal, the gain is reduced by a so called "Gain Degradation Factor" which can be computed from the signal spatial coherence function and the array weighting function.

In the diffusion case, the signals coherence function may be deduced from experimental results. It is shown on a practical example that the degraded gain tends to a finite value when the array length becomes larger than the signals effective correlation distance.

In the antenna random deformations case, an apparent signals spatial coherence function may be computed from the stochastic model which characterize the deformations. An expression of the gain degradation factor can then be deduced as a function of some reduced parameters which depend of frequency, antenna length, signal direction, and the statistical parameters which characterize the deformations.

DEGRADATION DU GAIN ASSOCIEE AUX INCOHERENCES DE LA PROPAGATION OU AUX DEFORMATIONS ALEATOIRES D'UNE ANTENNE LINEAIRE

1. PROPRIETES GENERALES DE L'ANTENNE LINEAIRE

Le diagramme de directivité énergétique d'une antenne quelconque est la représentation de la pondération angulaire introduite par cette antenne sur l'énergie incidente. Ce diagramme s'exprime normalement en fonction de trois variables :

. la fréquence f ,
. la direction d'arrivée du signal $\vec{\theta_s}$,
. la direction $\vec{\theta_0}$ dans laquelle l'antenne est électroniquement pointée.

Le diagramme de directivité s'écrit donc :

$$D(f, \vec{\theta_s}, \vec{\theta_0})$$

$\vec{\theta_s}$ et $\vec{\theta_0}$ étant des vecteurs unitaires que l'on peut définir par leur cosinus directeurs.

Dans le cas d'une antenne linéaire le diagramme de directivité présente une symétrie de révolution et est complètement défini par sa section dans le plan de l'antenne et de la source. Il ne sera donc sensible qu'aux projections des vecteurs $\vec{\theta_s}$ et $\vec{\theta_0}$ sur l'axe de l'antenne, soit $\sin\theta_s$ et $\sin\theta_0$ si l'on appelle θ_s et θ_0 les angles formés par les vecteurs $\vec{\theta_s}$ et $\vec{\theta_0}$ avec un plan perpendiculaire à l'antenne.

On montre facilement que le diagramme de directivité d'une antenne linéaire peut se ramener à une fonction de deux variables seulement :

. la fréquence f ,
. la variable $u = \frac{f}{c}(\sin\theta_0 - \sin\theta_s) = \frac{1}{\lambda}(\sin\theta_0 - \sin\theta_s)$

où c est la vitesse de propagation des ondes et la longueur d'onde.

On peut donc définir la directivité sous la forme :

$$D(f, u)$$

dans laquelle u peut aussi s'écrire :

$$u = u_0 - u_s \quad \text{avec} \quad u_0 = \frac{f}{c}\sin\theta_0 \quad \text{et} \quad u_s = \frac{f}{c}\sin\theta_s$$

où u_s est la "fréquence spatiale" sur l'axe de l'antenne d'un signal monochromatique de fréquence f provenant de la direction θ_s , et u_0 représente la fréquence spatiale sur laquelle l'antenne est "accordée". u représente donc le "dépointage" de l'antenne sur l'échelle des fréquences spatiales.

$D(f,u)$ se calcule à partir de la fonction de pondération (ou fonction fenêtre) de l'antenne.

Soit $\mathcal{P}(f,x)$ cette fonction de pondération qui représente le gain linéaire par lequel est multiplié le signal capté au point x. La longueur totale de l'antenne supposée centrée sur l'origine de l'axe des x étant L nous aurons :

$$\mathcal{P}(f,x) = 0 \text{ pour } x < -L/2 \quad \text{et} \quad x > +L/2$$

$D(f,u)$ sera relié à $\mathcal{P}(x)$ par :

$$D(f,u) = \left| T.F._x\{\mathcal{P}(f,x)\}\right|^2 = T.F._{\delta x}\{\gamma(f,\delta x)\}$$

où :

$$\gamma(f,\delta x) = \int \mathcal{P}(f,x)\, \mathcal{P}^*(f, x-\delta x)\, dx$$

que nous pourrons noter sous la forme symbolique :

$$\gamma(f,\delta x) = \mathcal{P}(x) \overset{x}{\circledast} \mathcal{P}^*(x)$$

où $\circledast$ représente une opération de convolution sur la variable x . $\gamma(f,\delta x)$ est donc la fonction d'autoconvolution de la fonction de pondération $\mathcal{P}$.

Notons que :

$$\gamma(f,\delta x) = 0 \text{ pour } \delta x < -L \quad \text{et} \quad \delta x > +L$$

Dans le cas d'une antenne constituée de N éléments ponctuels discrets $\mathcal{P}(x)$ prendra la forme d'une série de fonctions de Dirac :

$$\mathcal{P}(x) = p_1\,\delta(x-x_1) + p_2\,\delta(x-x_2) + \dots + p_N\,\delta(x-x_N)$$

et :

$$\gamma(\delta x) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_i\, p_j^*\, \delta[\delta x - (x_j - x_i)]$$

où les termes p_i sont les coefficients de pondération (éventuellement fonctions de la fréquence) qui sont associés aux éléments correspondants de l'antenne.

Supposons maintenant que l'antenne reçoive un bruit aléatoire, la direction d'arrivée de l'énergie étant distribuée de façon continue ou discontinue dans l'espace. Nous supposerons, de plus, que les énergies provenant de directions différentes ne sont pas corrélées entre elles, et qu'il s'agit d'un champ lointain, c'est-à-dire que le champ peut être décomposé en ondes planes élémentaires provenant de directions réelles. Un tel champ peut être caractérisé par sa fonction de directivité, qui exprime sa densité angulaire énergétique dans l'espace à trois dimensions en fonction de l'angle $\vec{\theta}$ et de la fréquence f soit :

$$W(f, \vec{\theta})$$

L'angle $\vec{\theta}$ pouvant s'exprimer en fonction des deux angles θ et Φ couramment utilisés en coordonnées sphériques, où θ (défini précédemment) représente la "latitude" et Φ la "longitude" sur la sphère de rayon 1 ayant l'axe des x pour axe polaire.

L'antenne linéaire n'est sensible qu'à la projection de $W(f,\vec{\theta})$ sur l'axe Ox . On peut définir sur cet axe une densité énergétique fonction de deux variables : la fréquence temporelle f et la fréquence spatiale u , soit $W_x(f,u)$ qui se déduira de $W(f,\theta,\Phi)$ par :

$$W_x(f,u) = \frac{f}{c}\int_0^{2\pi} W(f,\theta,\Phi)\, d\Phi$$

W_x est en fait le spectre de puissance spatio-temporel de la fonction aléatoire $b(x,t)$ qui correspond à la valeur du champ de bruit reçu le long de l'antenne.

Dans le cas d'un champ lointain :

$$W_x(f,u) = 0 \text{ pour } u < -f/c \quad \text{et} \quad u > f/c$$

Dans le cas d'un champ proche cette condition n'existe pas, et une partie de l'énergie (correspondant à des angles θ imaginaires) peut se trouver à l'extérieur de l'intervalle $-f/c, +f/c$.

La Transformée de FOURIER inverse de $W_x(f,u)$ par rapport à u est la fonction de corrélation spatiale du signal mesuré sur l'axe des x , soit :

$$\Gamma_x(f,\delta x) = T.F^{-1}_u\{W(f,u)\}$$

DEGRADATION DU GAIN ASSOCIEE AUX INCOHERENCES DE LA PROPAGATION
OU AUX DEFORMATIONS ALEATOIRES D'UNE ANTENNE LINEAIRE

Ainsi qu'il a été montré dans les références [1 et 2] Γ_x représente la section sur l'axe des x de la fonction de corrélation spatiale $\Gamma(f, \delta x, \delta y, \delta z)$ qui caractérise le bruit dans l'espace à trois dimensions (laquelle est reliée à $W(\vec{\theta}, f)$ par une transformation de FOURIER à trois dimensions).

$$\Gamma_x(f, \delta x) = \Gamma(f, \delta x, \delta y, \delta z)\Big|_{\substack{\delta y = 0 \\ \delta z = 0}}$$

Soit b^2 le niveau énergétique du bruit dans l'espace, tel qu'il serait mesuré par un capteur omnidirectionnel. Il sera relié aux fonctions Γ_x et W_x par :

$$\Gamma_x(f, \delta x)_{\delta x = 0} = \int W_x(f, u)\, du = b^2$$

Le niveau énergétique du bruit délivré par l'antenne pourra s'exprimer en fonction de f et de la variable $u_0 = f/c \sin\theta_0$, où θ_0 est toujours la direction de pointage de l'antenne, soit :

$$B(f, u_0) = \int W_x(f, u)\, D(f, u_0 - u) . du$$

que l'on peut écrire sous la forme symbolique d'un produit de convolution sur la variable u :

$$B(f, u_0) = W_x(f, u) \overset{u}{\circledast} D(f, u)$$

Si l'on considère maintenant que l'antenne reçoit à la fois un signal provenant d'une direction $\vec{\theta}_s$ fixe et bien définie (sa densité angulaire énergétique étant un Dirac dans l'espace des $\vec{\theta}$), et un bruit possédant les propriétés définies ci-dessus, on définira le "gain d'antenne" comme le rapport entre les deux quantités suivantes :

. le rapport signal/bruit énergétique à la sortie de l'antenne pointée dans la direction du signal,

. le rapport signal/bruit énergétique dans le milieu, tel qu'il peut être mesuré avec un capteur omnidirectionnel.

En fait, il revient au même de définir le gain d'antenne comme le rapport entre les deux quantités suivantes :

. Le gain énergétique de l'antenne relatif au niveau du signal (lorsqu'elle est pointée sur la source) soit :

$$G_s(f) = D(f, u)\big|_{u=0} \quad \text{avec} \quad u = \frac{f}{c}(\sin\theta_0 - \sin\theta_s)$$

lequel ne dépend pas de la direction θ_s de la source.

. Le gain énergétique de l'antenne relatif au niveau du bruit, l'antenne étant toujours pointée dans la direction θ_s du signal, soit :

$$G_B(f, u_s) = \frac{1}{b^2} B(f, u_s)$$

Si l'on explicite B et b^2 on aura :

$$G_B(f, u_s) = \frac{W_x(f, u) \overset{u}{\circledast} D(f, u)}{\int W_x(f, u)\, du}$$

Le gain d'antenne proprement dit aura finalement pour expression $G = G_s / G_B$ c'est-à-dire :

$$G(f, u_s) = \frac{\int W_x(f, u)\, du \; . \; D(f . u)\big|_{u=0}}{W(f, u) \overset{u}{\circledast} D(f, u)}$$

On peut aussi exprimer $G(f, u)$ en fonction des transformées de FOURIER inverses $\Gamma_x(f, \delta x)$ de $W_x(f, u)$ et $\gamma(f, \delta x)$ de $D(f, u)$ ce qui conduit à l'expression :

$$G(f, u_s) = \frac{\Gamma_x(f, \delta x)\big|_{\delta x = 0} \cdot \int_{-L}^{+L} \gamma(\delta)\, d(\delta x)}{\int \Gamma(f, \delta x)\, \gamma(f, \delta x)\, e^{2\pi i u_s \delta x} d(\delta x)}$$

Les deux termes du numérateur étant des facteurs de normalisations qui sont égaux à 1 si W exprime la densité spectrale normalisée du bruit et $D(f, u)$ la fonction de directivité normalisée de l'antenne.

Dans le cas particulier d'un bruit omnidirectionnel sphérique, la fonction de directivité s'écrit:

$$W(f, \theta, \Phi) = \frac{b^2}{4\pi} \quad \text{quels que soient } \theta \text{ et } \Phi$$

On en déduit :

$$W_x(f, u) = \frac{b^2}{4\pi} \frac{f}{c} \int_0^{2\pi} W(f, \theta, \Phi)\, d\Phi$$

c'est-à-dire :

$$W_x(f, u) = \frac{1}{2} b^2 \frac{f}{c} \quad \text{pour } -\frac{f}{c} \leqslant u \leqslant +\frac{f}{c}$$
$$= 0 \quad \text{pour } u < -\frac{f}{c} \text{ ou } u > \frac{f}{c}$$

c'est une fonction rectangulaire de largeur $2f/c$ et de niveau $1/2\, b^2\, f/c$ dont la transformée de FOURIER sera la fonction de corrélation spatiale :

$$\Gamma_x(f, \delta x) = b^2 \frac{\sin 2\pi\, \delta x/\lambda}{2\pi\, \delta x/\lambda}$$

Cette fonction s'annule pour toutes les valeurs de δx multiples de $\lambda/2$, sauf $\delta x = 0$.

Si l'antenne est constituée de N capteurs équidistants séparés par des distances égales à $\lambda/2$, chacun d'eux étant affecté d'un coefficient de pondération p_i, le gain d'antenne se réduira à :

$$G(f) = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N} |p_i|\right]^2}{\sum |p_i|^2} \quad \text{qui est indépendant de la direction}$$

Ce gain se réduira à N si l'antenne n'est pas pondérée, c'est-à-dire si tous les coefficients p_i sont égaux entre eux.

La longueur d'une telle antenne est égale à :

$$L = (N-1)\, \lambda/2$$

Si l'on considère maintenant le cas d'une antenne continue non pondérée de longueur L très supérieure à $\lambda/2$, on peut montrer que son gain diffère peu de la quantité :

$$G = 2L/\lambda$$

quelle que soit la direction du signal, sauf au voisinage de la direction $\theta_s = \pm \pi/2$ pour laquelle le gain "end fire" est égal au double de cette valeur.

2. DEGRADATION DU GAIN DE L'ANTENNE PAR LES INCOHERENCES DE LA PROPAGATION

Dans un milieu de propagation diffusant, la cohérence du champ produit par une source lointaine est limitée à une certaine "distance effective de corrélation".

Ce phénomène a pour corollaire le fait que la fonction de directivité associée au signal n'est plus un Dirac dans l'espace des $\vec{\theta}$, mais qu'elle est distribuée sur un certain angle solide autour de la direction $\vec{\theta_s}$ de la source.

Cet étalement de la fonction de directivité correspond à la formation d'un halo de diffusion. Le signal associé à une source monochromatique perd alors son caractère déterministe, et donne naissance à un champ aléatoire. Comme dans le cas du bruit de fond on peut caractériser ce champ dans l'espace à trois dimensions par une fonction de cohérence spatiale, ou par une fonction de directivité.

L'antenne linéaire ne sera sensible qu'aux composantes de ces deux fonctions le long de son axe et par analogie avec ce qui a été fait pour le bruit, on pourra définir les deux fonctions suivantes :

. la fonction de corrélation du signal sur l'axe Ox, soit : $\Gamma'_x(f, \delta x)$

. le spectre de puissance spatio-temporel du signal : $W'_x(f,u)$

Ces deux fonctions étant transformées de FOURIER l'une de l'autre.

L'angle solide de diffusion étant en général petit, la fonction de corrélation Γ'_x comportera un terme harmonique lié à la propagation, et on pourra l'écrire sous la forme :

$$\Gamma'_x(\vec{\theta_s}, f, \delta x) = s^2\, G(\vec{\theta_s}, f, \delta x)\, e^{2\pi i \frac{f}{c} \delta x \sin\theta_s}$$

où s^2 est le niveau énergétique du signal.

Nous appellerons "fonction de cohérence du signal" la fonction enveloppe normalisée :

$$G(\vec{\theta_s}, f, \delta x)$$

En général cette fonction dépendra à la fois des composantes θ et Φ de l'angle $\vec{\theta}$, ainsi d'ailleurs que de la distance de la source.

Nous pouvons également introduire la fonction :

$$R(\vec{\theta_s}, f, u) = T.F._{\delta x}\left\{G(\vec{\theta_s}, f, \delta x)\right\}$$

qui est la "fonction de diffusion angulaire" du milieu, rapportée à la fréquence spatiale u. Elle est reliée à la densité spectrale énergétique $W'_x(\vec{\theta_s}, f, u)$ par un simple décalage le long de l'axe des u, puisqu'elle est centrée sur $u_s = f/c \sin\theta_s$, ainsi que par le coefficient de normalisation s^2 :

$$R(\vec{\theta_s}, f, u) = \frac{1}{s^2}\; W'(\vec{\theta_s}, f, u+u_s)$$

R est la projection sur l'axe Ox de la "fonction de diffusion angulaire" du signal telle qu'on peut la définir dans un espace à trois dimensions [1 et 2].

C'est une fonction normalisée qui vérifie la relation :

$$\int R(\vec{\theta}, f, u)\, du = 1$$

Le niveau énergétique du signal délivré par l'antenne peut s'exprimer en fonction de f et de la variable $u = f/c \sin\theta_0$ où θ_0 est la direction de pointage de l'antenne. Il a pour expression :

$$S'(\vec{\theta_s}, f, u_0) = \int W'_x(\vec{\theta_s}, f, u')\, D(f, u_0 - u')\, du'$$

La variable u' correspondant ici à la fréquence spatiale du signal reçu par l'antenne.

On peut aussi exprimer ce niveau énergétique en fonction de la variable de dépointage :

$$u = f/c\,(\sin\theta_0 - \sin\theta_s) = u_0 - u_s$$

et à partir de la fonction d'étalement $R(\vec{\theta_s}, f, u)$.

On obtient alors l'expression :

$$S(\vec{\theta_s}, f, u) = s^2 \int R(\vec{\theta_s}, f, u'').\, D(f, u - u'')\, du''$$

où $u'' = u' - u_s$.

S représente un produit de convolution sur la variable u. On peut l'écrire sous la forme symbolique :

$$S(\vec{\theta_s}, f, u) = s^2\; R(\vec{\theta_s}, f, u'') \overset{u}{\circledast} D(f, u)$$

Au coefficient énergétique s^2 près, la fonction S peut être assimilée à une fonction de directivité énergétique globale, qui représente les effets cumulés de la diffusion du milieu de propagation et de la directivité de l'antenne. Cette fonction de directivité globale résulte du produit de convolution de la fonction de diffusion angulaire du milieu (projetée sur l'axe des x) par la fonction de directivité de l'antenne.

Cette fonction de directivité globale se trouve donc élargie par rapport à celle de l'antenne, ce qui a pour conséquence une dégradation des propriétés directives apparentes de l'antenne. Cette dégradation portera sur deux points essentiels :

. une réduction dans la précision avec laquelle on pourra estimer la direction θ_s de la source (on peut considérer la fonction S comme une fonction d'ambiguïté dans le domaine des fréquences spatiales);

. une réduction portant sur le niveau du signal à la sortie de l'antenne lorsque celle-ci se trouve effectivement pointée sur la direction θ_s qui se traduira par une réduction correspondante du gain d'antenne.

En ce qui concerne le deuxième point, la "dégradation du gain d'antenne" résultant du phénomène de diffusion peut être caractérisée par un "facteur de dégradation" F_D dont la valeur sera comprise entre 0 et 1 . Le produit du gain d'antenne

DEGRADATION DU GAIN ASSOCIEE AUX INCOHERENCES DE LA PROPAGATION
OU AUX DEFORMATIONS ALEATOIRES D'UNE ANTENNE LINEAIRE

tel qu'il est défini dans le cas du signal cohérent, par ce facteur de dégradation F_D, donnera le "gain d'antenne dégradé" :

$$G_D(\vec{\theta_s}, f) = F_D(\vec{\theta_s}, f) \cdot G(f, u_s)$$

Le facteur de dégradation F_D aura pour expression :

$$F_D = \frac{[R(\vec{\theta_s}, f, u) \overset{u}{\circledast} D(f,u)]\big|_{u=0}}{D(f,u)\big|_{u=0}}$$

où le numérateur représente le gain de l'antenne vis-à-vis du signal diffusé alors que le dénominateur donne le gain d'antenne vis-à-vis du signal cohérent.

Le facteur de dégradation peut aussi s'exprimer à partir de la fonction de cohérence du signal $G(\vec{\theta}, f, \delta x)$, (qui est la TF de R), et de la fonction d'antenne $\gamma(f, \delta x)$ (qui est la TF de D) ce qui conduit à l'expression :

$$F_D(\vec{\theta}, f) = \frac{\int_{-L}^{+L} G(\vec{\theta_s}, f, \delta x)\, \gamma(f, \delta x)\, d(\delta x)}{\int_{-L}^{+L} \gamma(f, \delta x)\, d(\delta x)}$$

Dans le cas d'une antenne à éléments discrets, F_D prendra la forme :

$$F_D(\vec{\theta_s}, f) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_i p_j^* \, G(x_j - x_i)}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1} p_i p_j}$$

Le gain d'antenne s'exprime le plus souvent en décibels, et on pourra mettre l'expression de G_D sous la forme :

$$[G_D]_{dB} = [G]_{dB} - [F_D]_{dB}$$

où :

$$[G]_{dB} = 10 \log G \quad \text{et} \quad [F_D]_{dB} = -10 \log F_D$$

G_D représente le gain d'antenne dans le cas très général où le bruit et le signal sont caractérisés par des fonctions de directivité ou de cohérence qui peuvent être quelconques. Il est remarquable que l'expression de ce gain soit séparable en deux termes dont l'un G ne dépend que des propriétés de cohérence (ou de directivité) du signal, et le second F_D ne dépend que des propriétés de cohérence (ou de directivité) du bruit.

On notera que le facteur de dégradation, tel qu'il est défini ici, correspond à la réduction du rapport signal/bruit mesuré à la sortie d'une seule voie directive lorsque celle-ci est pointée dans la direction de la source c'est-à-dire vers le centre du halo de diffusion. Cette réduction est en fait proportionnelle au rapport qui existe entre l'ouverture angulaire effective du halo et l'ouverture angulaire effective du lobe de directivité (ce qu'exprime l'opération de convolution $R(u) \circledast D(u)|_{u=0}$). Il est certain que si l'on dispose d'un système de traitement à voies préformées multiples, l'énergie du signal qui se trouve à l'extérieur de la voie directive centrée sur θ_s se retrouvera dans les voies adjacentes à θ_s. On peut donc concevoir des méthodes de traitement qui permettront de recombiner les énergies provenant de diverses voies, de façon à réduire les pertes de cohérence. Cette question fait l'objet de la conférence suivante présentée par Y. LABASQUE.

A titre d'exemple nous allons traiter le cas suivant :

. L'antenne est continue, non pondérée, de longueur L. Sa fonction d'autoconvolution est donc un triangle :

$$\gamma(\delta x) = 1 - \left|\frac{\delta x}{L}\right| \quad \text{dans l'intervalle} \quad -L \leqslant \delta x \leqslant L$$
$$= 0 \quad \text{à l'extérieur}$$

. La fonction de cohérence du signal est de la forme :

$$G(\delta x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{a}\right)^2}$$

Nous appellerons a la "distance effective de corrélation". Nous ne nous préoccuperons pas de la loi de variation éventuelle de a avec l'angle θ_s ou avec la fréquence f.

A cette fonction sera associée la fonction d'étalement :

$$R(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta u}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u}{\Delta u}\right)^2}$$

où Δu sera la "largeur effective" de la fonction de diffusion angulaire projetée sur O_x.

Nous supposerons, de plus, que $L \gg \lambda$, ce qui nous conduit à un gain d'antenne :

$$G = 2L/\lambda$$

dans le cas d'un signal cohérent et d'un bruit omnidirectionnel sphérique.

Le facteur de dégradation aura alors pour expression :

$$F_D = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \left|\frac{\delta x}{L}\right|\right) e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{a}\right)^2} d(\delta x)$$

Si on fait le changement de variable $X = \delta x / L$, F_D se réduit à une intégrale définie qui ne dépend que du rapport L/a :

$$F_D\left(\frac{L}{a}\right) = 2 \int_0^1 (1 - X)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{a} X\right)^2} dX$$

L'étude des conditions aux limites de cette fonction donne :

1. Si $\frac{L}{a} \ll 1 \quad F_D = 1$

Lorsque la longueur de l'antenne est inférieure à la distance effective de corrélation le gain n'est pas dégradé. Il restera donc égal à $G = 2L/\lambda$ pour un bruit sphérique.

2. Si $\frac{L}{a} \gg 1 \quad F_D = 2\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{a} X\right)^2} dX = \sqrt{2\pi}\, \frac{a}{L}$

Dans le cas d'un bruit sphérique, le gain dégradé deviendra alors :

$$G_D = F_D \frac{2L}{\lambda} = 2\sqrt{2\pi}\, \frac{a}{\lambda}$$

Lorsque la longueur de l'antenne est supérieure à la distance effective de corrélation, le gain tend vers une valeur limite indépendante de la longueur de l'antenne.

Exprimé en décibels, la valeur de ce gain limite est :

$$\left[G_{lim}\right]_{dB} = 10 \log\left(\frac{a}{\lambda}\right) + 7\,dB$$

a est la distance pour laquelle la corrélation du signal est réduite à la valeur 0,61 (soit 2,17 dB).

Le gain dégradé en fonction de L/a est représenté sur la figure 1 sous la forme d'une courbe normalisée qui indique la valeur de :

$$\left[G_D\right]_{dB} = 10 \log\frac{a}{\lambda} = 10 \log\left[\frac{2L}{a} F_D\left(\frac{L}{a}\right)\right]$$

La valeur du facteur de dégradation F_D peut être lue comme la différence entre la courbe elle-même et la droite en pointillé qui représente le gain non dégradé $G = 2L/\lambda$. On voit que pour $L/a = 1$, F_D ne représente qu'une fraction de décibel, et que pour une longueur $L = 4a$ on trouve une dégradation de 3 dB.

3. DEGRADATION DU GAIN PAR LES DEFORMATIONS ALEATOIRES DE L'ANTENNE

Nous pouvons définir les déformations d'une antenne linéaire par les deux fonctions $y(x)$ et $z(x)$ qui représentent les projections de l'antenne sur les plans xOy et xOz.

Nous considérons $y(x)$ et $z(x)$ comme des réalisations particulières d'un processus aléatoire normal de x qui s'étend de $-\infty$ à $+\infty$, et que nous observons dans une fenêtre de largeur L qui correspond à la longueur de l'antenne.

Nous admettons également qu'un point donné de l'antenne ne subit pas de déplacement le long de l'axe Ox.

Pour une onde monochromatique de niveau unité provenant de la direction θ_s dans le plan xOy, le signal complexe reçu au point du réseau d'abscisse x ne dépendra que de $y(x)$, et il aura pour expression :

$$s(f,x) = e^{2\pi i \frac{f}{c}\left[x \sin\theta_s + y(x)\cos\theta_s\right]}$$

que l'on peut écrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$s(f,x) = e^{i[2\pi u_s x + \varphi(x)]}$$

où $u_s = \frac{f}{c}\sin\theta_s$ et $\varphi(x) = 2\pi\frac{f}{c}\cos\theta_s\, y(x)$

ou encore :

$$s(f,x) = e^{i[2\pi(u_s + \delta u)x + \varphi_0]}$$

où

$$\delta u = 2\pi\frac{f}{c}\cos\theta_s \frac{\partial y}{\partial x}$$

La première expression représente $s(t,x)$ comme un signal harmonique de x modulé en phase par $y(x)$, la seconde le représente comme un signal harmonique de x modulé en fréquence par $\partial y/\partial x$.

Les modulations par des processus aléatoires normaux ont fait l'objet d'études de la part de D. MIDDLETON [3] et N. ABRAMSON [4].

On peut définir la fonction d'autocorrélation spatiale du signal :

$$\Gamma(f,\delta x) = E\left\{s(f,x).s^*(f,x+\delta x)\right\}$$

En remplaçant $s(f,x)$ par son expression on obtient :

$$\Gamma(f,\delta x) = e^{2\pi i u_s \delta x}\; E\left\{e^{2\pi i \frac{f}{c}\cos\theta_s[y(x+\delta x)-y(x)]}\right\}$$

Nous supposerons que $[y(x+\delta x)-y(x)]$ est une variable aléatoire gaussienne centrée.

Rappelons que si ξ est une variable aléatoire gaussienne centrée :

$$E\left\{e^{i\xi}\right\} = e^{-\frac{1}{2}E(\xi^2)}$$

$\Gamma(f,\delta x)$ pourra donc s'écrire :

$$\Gamma(f,\delta x) = e^{2\pi i u_s \delta x}\; e^{-\frac{1}{2}\left(2\pi\frac{f}{c}\cos\theta_s\right)^2 \Omega(\delta x)}$$

où :

$$\Omega(\delta x) = E\left\{\left[y(x+\delta x) - y(x)\right]^2\right\}$$

est la "fonction de structure" de $y(x)$.

Nous pouvons aussi définir une "fonction de cohérence" qui sera la fonction enveloppe de $\Gamma(f,\delta x)$, soit :

$$G(\theta_s, f, \delta x) = e^{-\frac{1}{2}\left(2\pi\frac{f}{c}\cos\theta_s\right)^2\Omega(\delta x)}$$

Et une fonction de diffusion angulaire :

$$R(\theta_s, f, u) = T.F_{\delta x}\left\{G(\theta_s, f, \delta x)\right\}$$

L'opération de transformation de FOURIER exige toutefois quelques précautions. En effet, si $y(x)$ est une variable gaussienne stationnaire et centrée dont on peut définir un écart-type σ_y et une fonction d'autocorrélation normalisée :

$$\rho_y(\delta x) = \frac{1}{\sigma_y^2} E\left\{y(x)\, y(x+\delta x)\right\}$$

où σ_y est l'écart-type de $y(x)$, la fonction de structure a pour valeur :

$$\Omega(\delta x) = 2\sigma_y^2\left[1 - \rho_y(\delta x)\right]$$

qui possède la propriété :

$$\lim_{\delta x \to \infty} \Omega(\delta x) = 2\sigma_y^2$$

et on aura pour $G(\theta_s, f, \delta x)$:

$$\lim_{\delta x \to \infty} G(\theta_s, f, \delta x) = e^{-\mu^2}$$

expression dans laquelle : $\mu = 2\pi\frac{f}{c}\cos\theta_s\,\sigma_y$

La fonction de cohérence ne tend pas vers 0 mais vers une valeur finie, ce qui caractérise un phénomène de cohérence partielle. Nous pouvons introduire le "facteur de cohérence" :

$$\gamma(\theta_s, f) = e^{-\mu^2}$$

qui tend vers 0 pour les grandes valeurs de μ.

Par analogie avec la théorie de la modulation, μ peut être appelé "index de modulation".

DEGRADATION DU GAIN ASSOCIEE AUX INCOHERENCES DE LA PROPAGATION OU AUX DEFORMATIONS ALEATOIRES D'UNE ANTENNE LINEAIRE

La fonction de diffusion angulaire $R(\theta_s, f, u)$ qui est la transformée de FOURIER de $G(\theta_s, f, \delta x)$ se décomposera alors en deux parties :

. un Dirac pour $u = 0$ c'est-à-dire dans la direction de la source,

. une partie continue, qui sera la transformée de FOURIER de $G(\theta_s, f, \delta x) - \gamma(\theta_s, t)$.

L'image de la source déformée par les distorsions de l'axe $0x$ se présentera alors comme un point brillant entouré par un halo de diffusion.

Le cas où $y(x)$ est un processus stationnaire s'apparente au cas de la modulation de phase où il existe un résidu de porteuse, dont la valeur tend vers 0 lorsque l'index de modulation est très supérieure à 1.

Les conclusions seront différentes si la fonction aléatoire $y(x)$ n'est pas elle-même stationnaire mais dérive d'un processus gaussien dit "à accroissement constant". Ceci sera le cas lorsque la dérivée $\partial x / \partial y$ (autrement dit la déviation angulaire de l'antenne) sera elle-même une fonction aléatoire stationnaire et centrée de x dont le spectre de puissance possède une valeur non nulle à l'origine. Dans ce cas, la fonction $y(x)$ ne possédera pas de fonction de corrélation, mais il sera toujours possible de définir sa fonction de structure. Contrairement au cas précédent, celle-ci tend vers l'infini avec δx, et on aura alors :

$$\lim_{\delta x \to \infty} G(\theta_s, f, \delta x) = 0$$

La fonction de diffusion angulaire $R(\theta_s, f, u)$ ne contiendra donc plus de Dirac.

Ce cas s'apparente à la modulation de fréquence, pour lequel il n'existe pas de résidu de porteuse.

Voyons maintenant quelle sera l'influence de la distorsion sur le gain de l'antenne. Celle-ci sera traitée comme s'il s'agissait d'une antenne linéaire et, du point de vue du signal de sortie, tout se passera comme si cette antenne parfaitement linéaire recevait un signal aléatoire $s(f, x)$. Il suffira donc de déterminer la fonction de cohérence $G(f, \delta x)$ ou la fonction de diffusion $R(f, u)$ du signal $s(f, x)$ pour pouvoir se ramener au cas précédent et calculer le niveau énergétique moyen du signal délivré par l'antenne, en fonction du dépointage u c'est-à-dire la fonction :

$$\begin{aligned} S(\theta_s, f, u) &= R(\theta_s, f, u) \overset{u}{\circledast} D(f, u) \\ &= \int G(\theta_s, f, \delta x)\, \gamma(f, \delta x)\, e^{2\pi f u}\, d(\delta x) \end{aligned}$$

En fait ce signal est obtenu à partir d'une onde plane, et $S(\theta_s, f, u)$ doit être considéré comme la fonction de directivité énergétique moyenne de l'antenne, qui tient compte à la fois des effets de la directivité idéale associée à sa fonction de pondération, et des effets de diffusion angulaire qui résultent de sa distorsion.

La signification de $S(\theta_s, f, u)$ doit toutefois être précisée : s'il s'agit de déformations permanentes d'antennes rigides, le diagramme de directivité d'une antenne donnée peut s'écarter notablement de la fonction S définie ci-dessus, et celle-ci représente seulement le diagramme de directivité moyen d'un ensemble d'antennes.

Par contre, s'il s'agit d'une antenne souple, dont les distorsions fluctuent à la fois dans le temps et dans l'espace, $S(\theta_s, f, u)$ correspond effectivement au diagramme de directivité énergétique que l'on obtient après une intégration temporelle de l'énergie sur une durée très supérieure à la période des fluctuations.

Nous traiterons à titre d'exemple le cas où l'antenne est soumise à des déformations correspondant au premier type considéré ci-dessus, où la fonction $y(x)$ est gaussienne et centrée, et nous choisirons pour $y(x)$ une fonction d'autocorrélation normalisée de la forme :

$$\rho_y(\delta x) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{\Delta X}\right)^2}$$

ΔX représente la distance effective de corrélation des déformations de l'antenne.

La fonction de cohérence :

$$G(\theta_s, f, \delta x) = e^{-\mu^2\left[1 - \rho_y(\delta x)\right]}$$

sera alors :

$$G(\theta_s, f, \delta x) = e^{-\mu^2\left[1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{\Delta X}\right)^2}\right]}$$

Nous considérons toujours une antenne de longueur L non pondérée et un bruit sphérique. Dans ce cas on montre facilement que le niveau du bruit à la sortie de l'antenne n'est pratiquement pas affecté par les petites déformations et, comme dans le cas du milieu diffusant, le facteur de dégradation du gain de l'antenne ne sera dû qu'à la réduction de niveau du signal lorsque l'antenne est pointée dans la direction θ_s, c'est-à-dire :

$$F_D = S(\theta_s, f, u)\big|_{u=0}$$

qui deviendra dans le cas présent :

$$F_D = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} \left(1 - \left|\frac{\delta x}{L}\right|\right) e^{-\mu^2\left[1 - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta x}{\Delta X}\right)^2}\right]} . d(\delta x)$$

Le changement de variable $X = \frac{\delta x}{L}$ conduit à la forme réduite :

$$F_D\left(\mu, \frac{L}{\Delta X}\right) = 2 \int_0^1 (1 - X)\, e^{-\mu^2\left[1 - e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{L}{\Delta X} X\right]^2}\right]} . dX$$

où l'on voit que F_D ne dépend que des deux paramètres μ et $L/\Delta X$.

L'étude du comportement asymptotique de F_D conduit aux conclusions suivantes :

1. Si $\mu \ll 1$ (c'est-à-dire si $\lambda \gg 2\pi \sigma_y \cos\theta_s$) $F_D = 1$ quel que soit L.

Dans le domaine des basses fréquences, telles que la longueur d'onde soit grande devant la déviation de l'antenne, le gain n'est donc pas dégradé quelle que soit la longueur de l'antenne.

2. Si $\frac{L}{\Delta X} \gg 1$ et pour une valeur finie de μ

$$F_D = e^{-\mu^2}$$

d'où :

$$G_D = \frac{2L}{\lambda} e^{-\mu^2}$$

Le gain est toujours proportionnel à la longueur L, mais il subit une dégradation F_D, égale au facteur de cohérence γ. En effet, lorsque l'antenne est très directive c'est l'énergie contenue dans le Dirac de la fonction de diffusion angulaire qui est effectivement captée par le lobe principal de l'antenne, la partie étalée du halo se retrouvant à l'extérieur.

3. Si $\frac{L}{\Delta X} \ll 1$

$$F_D \longrightarrow 2\int_0^1 (1-X)\, e^{-\frac{1}{2}\left(\mu \frac{L}{\Delta X} X\right)^2} dX$$

On se trouve dans le cas d'une antenne beaucoup plus courte que la distance de corrélation de $y(x)$. Il s'agit en fait d'une antenne qui n'est pas à proprement parler déformée, mais dont l'inclinaison α par rapport à l'axe Ox subit des fluctuations aléatoires gaussiennes dont l'écart-type est :

$$\sigma_\alpha = \sigma_y / \Delta X$$

On peut remarquer que l'expression de F_D est identique à celle que nous avons trouvée dans le cas d'un milieu dont la fonction de cohérence spatiale était une fonction de GAUSS d'écart-type a, à condition de faire :

$$\frac{\Delta X}{\mu} = a$$

Or : $$\frac{\Delta X}{\mu} = \frac{\Delta X}{2\pi f/c\, \sigma_y \cos\theta_s} = \frac{1}{2\pi f/c} \quad \frac{1}{\sigma_\alpha \cos\theta}$$

correspond effectivement à la distance de corrélation spatiale sur Ox d'un signal dont la fonction de diffusion angulaire a une "ouverture effective" égale à σ_α .

Ces diverses propriétés apparaissent dans un réseau de courbes donnant la valeur de F_D en fonction de $L/\Delta X$ et de μ (fig. 2).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] LAVAL (R). Sound Propagation Effects on signal Processing.
Conférence prononcée au "Nato Advanced Study Institute on Signal Processing", Août 1972 à l'Université de Technologie de Longhborough - UK. Comptes rendus édités par Academic Press.

[2] LAVAL (R). Cohérence spatio-temporelle et fonction de diffusion généralisée.
6ème Colloque GRETSI, Avril 1977, conférence n° 8.

[3] MIDDLETON (S). An Introduction to Statistical Communication Theory.
Mac Graw-Hill 1960.

[4] ABRAMSON (N).Bandwidth and Spectra of Phase and Frequency Modulated Waves.
IEEE Transactions on Communication Systems. n° 4, Dec. 1963.

DEGRADATION DU GAIN ASSOCIEE AUX INCOHERENCES DE LA PROPAGATION
OU AUX DEFORMATIONS ALEATOIRES D'UNE ANTENNE LINEAIRE

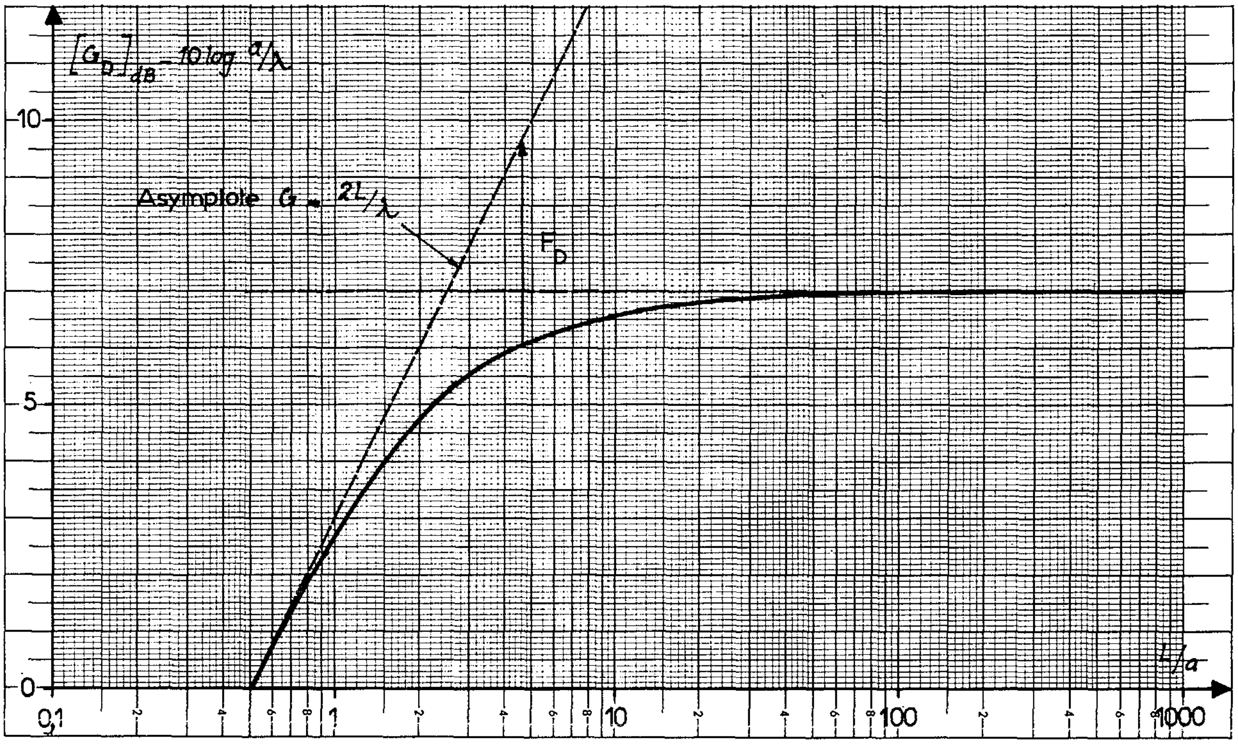

FIG.1 - GAIN D'ANTENNE DEGRADE PAR LES INCOHERENCES DE LA PROPAGATION

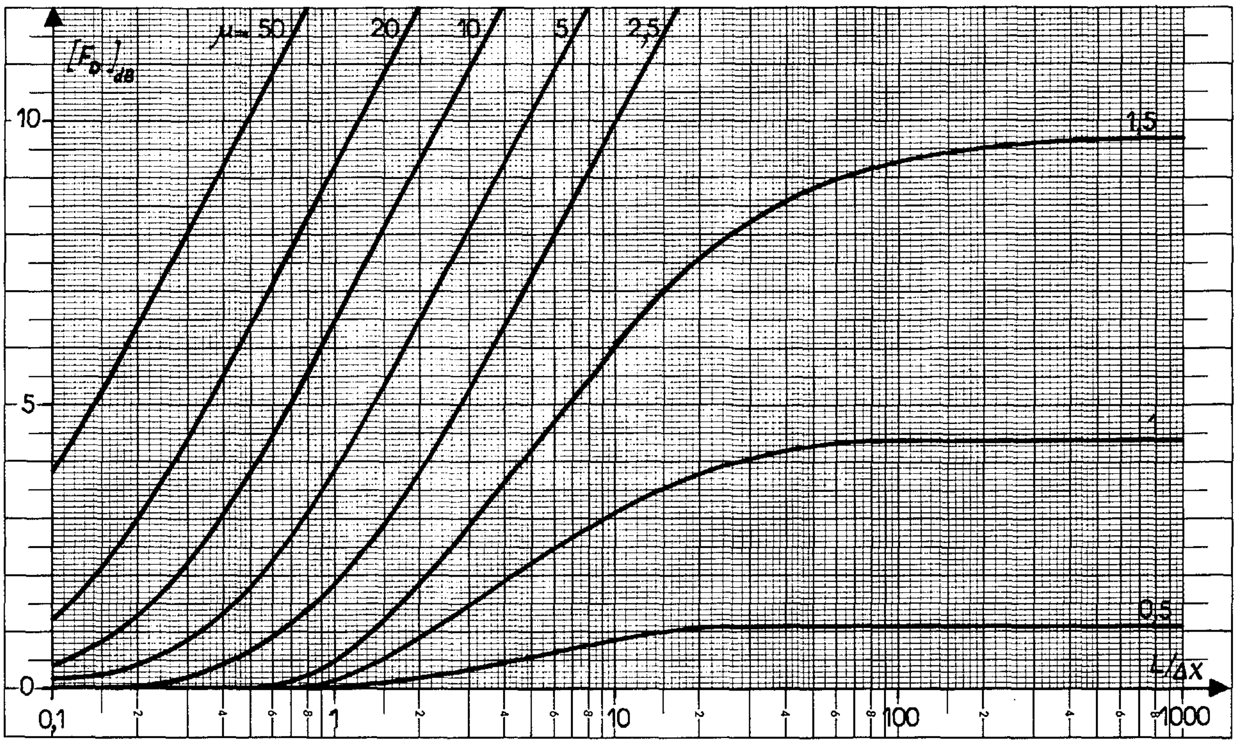

FIG.2 - FACTEUR DE DEGRADATION DU GAIN PAR LES DEFORMATIONS ALEATOIRES DE L'ANTENNE