SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

STABILITE ET PRECISION D'ALGORITHMES DE MODELISATION POUR LA TRANSMISSION NUMERIQUE DU SIGNAL.

D.Mauduit F.Boéri J.Menez

Laboratoire de Signaux et Systèmes
Equipe de Recherche Associée au CNRS n° 835
Université de Nice

RESUME

Dans le domaine du traitement numérique du signal, les méthodes déterministes du type moindres carrés sont couramment employées pour modéliser un processus. On commence également à utiliser les algorithmes de réalisation stochastique développés, à l'origine, dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires et de la commande.

Le propos de cet exposé est d'étudier les possibilités de ces approches pour la réalisation de systèmes de transmission en temps réel. Les contraintes essèntielles auxquelles on s'attache sont la stabilité numérique des algorithmes, leur précision, la stabilité du modèle estimé et enfin la complexité des calculs. De nombreux résultats de simulations sur des signaux réels permettent de se faire une vue plus objective de ces problèmes.

SUMMARY

Deterministic methods -like Least Mean Square- are often used in digital signal processing area to modelise processes. Stochatic realisation algorithms which have been developped in linear systems and control theory begin to be used too.

In this communication we study the capabilities of such approaches in implementation of real time transmission systems. The main constraints which have been taken in account are the numerical stability of the algorithms, their precision, the stability of the estimated model and the computation complexity. Many simulation results on real signals allow one to get a sharper idea of these problems.

STABILITE ET PRECISION D'ALGORITHMES DE MODELISATION POUR LA TRANSMISSION NUMERIQUE DU SIGNAL.

1.0 INTRODUCTION

Dans le cadre de la transmission sous forme numérique de signaux de type analogique, on est souvent amené à considérer le codage de sources discrètes avec mémoire. Les techniques d'identification de processus par modélisation et estimation de paramètres représentent alors un des moyens d'adapter au mieux la source au canal.

Les principales contraintes auxquelles on se heurte dans la réalisation de tels systèmes de transmission numérique sont d'une part une cadence d'échantillonnage élevée (de 8 kHz pour la voix à plusieurs mégahertz pour la video) et d'autre part la méconnaissance a priori des propriétés statistiques du signal. Ceci explique l'utilisation presque exclusive d'algorithmes simples et robustes, en général du type moindres carres.

Parallèlement se sont développées, dans le cadre de la théorie des systèmes linéaires et de la commande, des méthodes d'identification ou de réalisation stochastique fondées sur l'existence d'un modèle mathématique. Des algorithmes dits rapides ont été proposés pour leur implantation en temps réel.

Une question se pose alors naturellement /1/: dans quelle mesure les algorithmes de réalisation stochastique peuvent-ils concurrencer les techniques classiques d'estimation ?

Le propos de cet exposé est d'essayer de répondre à cette question dans le cadre des systèmes de transmission numérique de signaux en temps réel.

Dans une première partie on rappelle brièvement le principe des méthodes déterministes du type moindres carrés et les algorithmes de résolution qui en découlent. Dans une deuxième partie on s'interesse aux algorithmes de réalisation stochastique et en particulier à l'algorithme proposé par E. TSE /2/. La troisième partie est consacrée à une étude comparative des méthodes précédemment décrites du point de vue de la stabilité numérique des algorithmes, de la stabilité du modèle estimé et du volume de calcul correspondant. Dans la dernière partie, des résultats numériques de simulations /10/ d'un système de transmission de la parole à partir de données réelles permettent de comparer d'un point de vue pratique les avantages respectifs de ces méthodes.

2.0 LA PREDICTION LINEAIRE

2.1 POSITION DU PROBLEME

On peut appréhender le problème de la prédiction linéaire d'un point de vue déterministe aussi bien que stochastique. Dans les deux cas on considère l'équation (1) où y(n) est le signal à analyser:

$$(1) \qquad y(n) + \sum_{i=1}^{M} a(n,i).y(n-i) = v(n)$$

2.1.1 CAS STOCHASTIQUE

Le signal y(n) est la sortie d'un filtre purement récursif defini par:

$$(2) \qquad \left(1 + \sum_{i=1}^{M} a(n,i).Z^{-i}\right)^{-1}$$

excité par la séquence blanche v(n). Les paramètres du filtre sont alors solution du système d'équations (3):

$$(3) \qquad r(n,j) + \sum_{i=1}^{M} a(n,i).r(n-i,j) = 0 \qquad j=n+1,\dots,n+M$$

où les r(n,0), r(n,1), ... sont les coefficients d'autocorrélation du signal y(n):

$$(4) \qquad r(n,j) = E(\ y(n).y(j)\ )$$

Dans le cas stationnaire où:

$$(5) \qquad r(n,j) = r(|n-j|)$$

les équations (3) généralement appelées équations de Yule-Walker font apparaitre une matrice de Toeplitz symétrique (cf Fig. 1) dont la forme particulière permet la mise en oeuvre d'algorithmes de résolution rapides exposés ci-dessous.

2.1.2 CAS DETERMINISTE

Contrairement au cas précédent, on ne postule aucune hypothèse a priori concernant un modèle du signal y(n) mais on suppose que l'on peut diminuer la redondance de ce signal à l'aide d'un filtre prédicteur linéaire:

$$(6) \qquad - \sum_{i=1}^{M} a(n,i).Z^{-i}$$

On recherche alors le filtre (6) qui minimise la puissance moyenne du signal d'erreur de prédiction v(n).

Dans la pratique on ne considère qu'un nombre fini de mesures (y(n), n=0,...,N-1) pour lesquelles on peut raisonnablement considérer les a(n,i) constants pendant la fenêtre d'analyse:

$$(7) \qquad a(n,i) = a(i) \qquad n=0,\dots,N-1$$

Si l'on suppose, de plus, que le signal y(n) est nul en dehors de l'intervalle d'analyse on retrouve les équations de Yule-Walker du cas stochastique stationnaire mais où les r(j) sont alors définis par:

$$(8) \qquad r(j) = \sum_{i=0}^{N-1-j} y(i).y(i+j) \qquad j=1,\dots,M$$

C'est la méthode dite d'autocorrélation partielle. La matrice de Toeplitz du système est alors définie positive, ce qui permet /3/ de garantir la stabilité du filtre de fonction de transfert (2).

Aussi bien dans le cas stochastique que déterministe, les méthodes de résolution sont de deux types:

- les méthodes globales pour lesquelles les coefficients du filtre prédicteur sont calculés pour toute la fenêtre d'analyse.
- les méthodes récursives où l'on estime les paramètres a chaque acquisition d'une nouvelle mesure y(n) en tenant compte de l'évolution de la corrélation.

STABILITE ET PRECISION D'ALGORITHMES DE MODELISATION

POUR LA TRANSMISSION NUMERIQUE DU SIGNAL.

2.2 ESTIMATION GLOBALE

La forme particulière des équations de Yule-Walker permet une résolution rapide. L'algorithme de Levinson-Durbin /3/ /4/ illustré à la figure 2 permet de calculer les prédicteurs optimaux d'ordres successifs 1 à M. Cet algorithme fait intervenir les coefficients k(i) (i=0,M-1) appelés coefficients PARCOR. Sans parler de leur interprétation physique, ces coefficients possèdent deux propriétés fondamentales:

- ils correspondent à une réalisation sous forme treillis du filtre prédicteur et sont donc équivalents aux a(i).
- ils permettent de vérifier la stabilité du filtre modèle (2). En effet une condition nécessaire et suffisante de stabilité est:
  (9) $|k(i)| < 1$ pour i=0,M-1

Plus récemment Le Roux /5/ a proposé une variante de l'algorithme de Levinson-Durbin qui permet de réduire encore le nombre d'opérations (cf. Table 1). Pour cela il introduit les quantités:

$$(10)\quad \overset{m}{e}(p) = \sum_{i=0}^{m} \overset{m}{a}(i)\,.r(|p-i|)$$

$$a^m(0) = 1$$

où les a(i) sont les coefficients du prédicteur optimal d'ordre m (m=1,M). D'un point de vue stochastique les e (p) s'interprètent comme les coefficients de l'intercorrélation entre le signal d'entrée et l'erreur de prédiction d'ordre m. L'algorithme rapide qui découle des relations de récurrence entre ces e (p) est illustré à la figure 3. Il ne permet pas de calculer directement les a(i) mais fournit les coefficients PARCOR. Outre un nombre réduit d'opérations il possède l'interessante propriété d'avoir tous ces calculs intermédiaires bornés par r(0) et se prête donc bien à une réalisation en virgule fixe.

Les deux qualités essentielles de la méthode d'autocorrélation partielle: existence et unicité d'une solution, d'une part et stabilité du modèle estimé d'autre part reposent sur l'emploi d'une fenêtre de pondération rectangulaire. Cet artifice introduit une distorsion de la densité spectrale du signal et il est souvent nécessaire d'appliquer une fenêtre d'apodisation pour limiter le phénomène de Gibbs.

Burg /6/ a proposé un algorithme de calcul des coefficients PARCOR permettant d'éviter cet effet de bord tout en conservant les propriétés précédentes. Pour cela il introduit la notion d'erreur de prédiction progressive ('forward') du filtre optimal d'ordre m:

$$(11)\quad \overset{m}{f}(n) = y(n) + \sum_{i=1}^{m} \overset{m}{a}(i)\,.y(n-i)$$

par opposition à l'erreur de prédiction rétrograde ('backward') sortie du filtre non causal:

$$(12)\quad (1 + \sum_{i=1}^{m} \overset{m}{a}(i)\,.Z^{+i})^{-1}$$

$$(13)\quad \overset{m}{b}(n) = y(n) + \sum_{i=1}^{m} \overset{m}{a}(i)\,.y(n+i)$$

Utilisant les relations de récurrence de l'algorithme de Levinson, le filtre prédicteur optimal d'ordre m+1 s'obtient à l'aide du coefficient PARCOR k(m) qui minimise la puissance moyenne totale des erreurs de prédiction $\overset{m}{b}(n)$ et $\overset{m}{f}(n)$ sur la fenêtre d'analyse. D'où l'algorithme de la figure 4 où l'on constate que la relation (9) de stabilité du filtre modèle est vérifiée par construction.

2.3 ESTIMATION RECURSIVE.

On assimile ici les a(n,i) du filtre modèle au vecteur d'état d'un système linéaire que l'on cherche à estimer. Dans le cas stationnaire, l'équation régissant la dynamique du processus est triviale:

$$(14)\quad a(n+1,i) = a(n,i) \qquad i=1,M$$

L'équation d'observation est donnée par (1).

Moyennant la connaissance d'un estimateur a priori du vecteur d'état ainsi que les covariances du bruit de mesure v(n) et de l'état initial, le filtre de Kalman, qui se réduit ici à la méthode des moindres carrés récursifs (fig. 5), permet d'estimer le vecteur des paramètres a(n,i) à chaque acquisition d'une nouvelle mesure y(n).

Afin de diminuer le volume de calcul mis en oeuvre par la méthode précédente, certains auteurs /7/ ont proposé des algorithmes sous optimaux s'inspirant des résultats de Robins et Monroe sur les méthodes d'approximation stochastique.

3.0 REALISATION STOCHASTIQUE

On s'interesse ici au problème de l'estimation des paramètres d'un processus stationnaire à représentation markovienne dont l'évolution peut etre décrite par la forme filtre:

$$(15)\quad x(n+1) = F.x(n) + G.v(n)$$

$$(16)\quad y(n) = H.x(n) + v(n)$$

Où v(n), appelé processus d'innovation, est un séquence blanche de variance Q. On note M l'ordre du système.

Les hypothèses de travail sont:

(17)
- F stable
- F-GH stable
- (F,G) complètement commandable
- (F,H) complètement observable
- le système est en régime permanent

Le problème de la réalisation stochastique est alors l'estimation des paramètres M,F,G,H et Q à partir d'une trajectoire particulière du processus observé. De nombreux auteurs ont proposé des algorithmes de réalisation stochastique qui utilisent en général la démarche suivante:

- calcul de M et de la matrice F
- calcul itératif de G et Q.

On s'interesse ici à l'algorithme de E.TSE qui utilise une forme canonique particulière permettant de simplifier l'exposé. En effet, d'après (17), la matrice de complète observabilité est de rang maximal M, on peut donc choisir ses vecteurs lignes: $H, HF, \dots, HF^{M-1}$ comme base de l'espace d'état. La matrice d'observation H s'écrit alors:

$$(18)\quad H = (1, 0, \dots, 0)$$

et la matrice de dynamique F est de forme 'companion':

$$(19)\quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots\dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a(M) & \dots & & -a(2) & -a(1) \end{bmatrix}$$

On définit $\Phi(m,l)$ la matrice de Hankel du système à partir des coefficients r(1), r(2),... de la fonction d'autocorrélation du processus y(n):

$$(20)\quad \Phi(m,l)_{i,j} = r(i+j-1) \qquad \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,l \end{matrix}$$

L'algorithme de calcul de l'ordre M du système et de la matrice F est fondé sur le théorème suivant /8/:

THEOREME: Le processus y(n) admet un représentation markovienne minimale de rang M si et seulement si:

$$(21)\quad \text{rang}\ \Phi(M,M) = \text{rang}\ \Phi(M+1,M+j) \qquad j=0,1,\dots$$

Les coefficients de la matrice F vérifient alors:

$$(22)\quad (a(M),\dots,a(1),1) \cdot \Phi(M+1,M+j) = 0^T$$

E. Tse propose de déterminer M par le calcul des déterminants successifs des matrices $\Phi(i,i)$ (i=1,2...). Des algorithmes rapides ont été proposés pour déterminer simultanément M et les a(i). En particulier l'algorithme de Berlekamp-Massey /9/ développé initialement pour la synthèse des registres à décalages et dont le nombre d'opérations est de l'ordre de $O(M^2)$.

La seconde partie de l'algorithme (cf. fig 6) est la résolution itérative d'un système d'équations matricielles de type Riccati pour obtenir G,Q et la variance de l'état du processus.

4.0 STABILITE ET COUT

4.1 STABILITE NUMERIQUE

Préalablement à toute réalisation programmée d'un algorithme, il convient de s'assurer que les erreurs introduites par une arithmétique de longueur finie, ne risquent pas d'occasionner un comportement catastrophique de l'algorithme. La notion de stabilité numérique permet une étude rigoureuse de la sensibilité des algorithmes aux erreurs d'arrondi.

DEFINITION: On note:

- R l'ensemble de séquences de corrélation r(0),...,r(M) du type de signal considéré.
- η la précision de l'arithmétique du calculateur.
- a^M la valeur exacte du dénominateur de la fonction de transfert que l'on cherche à identifier.
- $\hat{a}^M$ la valeur obtenue sur le calculateur numérique avec l'algorithme considéré.

On dit que l'algorithme de calcul est numériquement stable si:

$$(23)\quad \exists C>0 \quad \forall r \in R \ \exists \eta_o \ \forall \eta < \eta_o \quad \|a^M - \hat{a}^M\| < C\eta$$

(cf De Jong /8/, pour une définition plus générale de la stabilité numérique).

De Jong a étudié la stabilité numérique des méthodes de réalisation utilisées en théorie des systèmes linéaires. Il a démontré que les algorithmes rapides de Berlekamp-Massey et de Rissanen sont instables numériquement parce qu'ils exploitent la structure particulière de la matrice de Hankel. Cette étude l'a amené à définir une décomposition numériquement stable de cette matrice analogue à celle proposée par Rissanen mais demandant $O(M^3)$ opérations au lieu de $O(M^2)$.

L'algorithme de Levinson (cf. fig 2) est numériquement stable. En effet, la seule opération qui pourrait amener une instabilité est la division par $\alpha(i)$ dans le calcul de chaque coefficient PARCOR k(i):

$$(24)\quad k(i) = -\frac{\beta(i)}{\alpha(i)}$$

Dans la méthode d'autocorrélation partielle, $\alpha(i)$ représente l'énergie du signal d'erreur de prédiction d'ordre i. C'est une quantité strictement positive dès que le signal à analyser n'est pas identiquement nul, c'est à dire dès que la matrice des Toeplitz des équations de Yule-Walker est définie positive. On peut donc calculer aisément une borne supérieure des erreurs dues à l'utilisation d'une arithmétique de longueur finie tant que ces erreurs restent petites devant le terme $\alpha(i)$ minimum que l'on peut rencontrer pour le type de signal considéré.

Quant à l'algorithme de Burg, il est, pour le mêmes raisons, numériquement stable.

4.2 STABILITE DU MODELE ESTIME.

La méthode d'autocorrélation partielle ainsi que l'algorithme de Burg permettent de vérifier en cours de calcul la stabilité du modèle estimé.

L'inconvénient majeur des techniques récursives réside dans le calcul direct des coefficients a(n,i) qui ne permet pas une vérification simple de la stabilité du modèle estimé. Dans un système de transmission, où ce filtre est utilisé par le récepteur pour synthétiser le signal transmis, il faut donc ajouter à l'algorithme d'estimation une procédure de 'stabilisation' (une possibilité consisterait, par exemple, à passer aux coefficients PARCOR correspondant).

Pour ce qui est des méthodes de réalisation stochastique le même problème se pose mais il faut, de plus, assurer la stabilité du filtre inverse.

STABILITE ET PRECISION D'ALGORITHMES DE MODELISATION

POUR LA TRANSMISSION NUMERIQUE DU SIGNAL.

4.3 VOLUME DE CALCUL

Le tableau 1 résume le nombre d'opérations mis en oeuvre dans chacune des méthodes précédentes.

Pour ce qui est de la méthode d'autocorrélation partielle, la partie la plus chère du traitement est représentée par le calcul des r(i). En effet, pour un filtre modèle d'ordre 10 calculé à partir de 256 échantillons, la résolution proprement dite, par l'algorithme de Le Roux, représente moins de 3% du nombre total de multiplications.

Algorithme	divisions	produits	additions
Corrélation	0	$(M+1)N$	$(M+1)(N-1)$
Levinson	M	M^2+M-1	M^2-M
Leroux	M	M^2-2M+4	M^2-M
Burg	M	$\simeq 5NM-2M+\frac{3}{2}M^2$	$\simeq 4NM-2N+2M^2$
M.C. récursifs	$\simeq MN$	$\simeq 1.5M^2N$	$\simeq 1.5M^2N$

Tableau 1: NOMBRE D'OPERATIONS.
(N: nombre de données
M: ordre du système)

5.0 RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les algorithmes décrits ci-dessus ont été testés en simulation dans le cadre de la transmission numérique du signal de parole. Le système envisagé est un codeur à prédiction linéaire de type transversal /11/. Dans ce genre de codeur, le signal de parole, échantilloné à 8 kHz et quantifié sur 12 bits, est analysé par blocs de N échantillons (valeurs typiques de N: 128 à 256). Les essais ont porté sur 70 secondes de parole correspondant à trois locuteurs (dont 2 voix féminines).

Les méthodes de prédiction linéaire ont toutes pour critère la minimisation de la puissance moyenne du signal d'erreur de prédiction. La maximisation du rapport:

$$\frac{\text{puissance du signal original}}{\text{puissance du signal d'erreur}} \tag{25}$$

apparait donc comme un critère naturel de comparaison.

Le tableau 2 résume les résultats moyens des divers algorithmes envisagés pour différentes valeurs de N et en fonction de M, l'ordre du modèle estimé.

Algorithme	M = 6	M = 8	M = 10
Autoc. partielle	10.7	11.4	12.0
Burg	10.9	11.8	12.5
M.C. récursifs	10.8	11.6	12.0

Tableau 2: PRECISION DES ALGORITHMES
(rapport (25) exprimé en dB,
valeur moyenne pour N=128,160,192,256).

On peut constater que la méthode d'autocorrélation partielle, l'algorithme de Burg et les moindres carrés récursifs donnent quasiment la même précision.

En plus des résultats du tableau 2, ces simulations ont permis de montrer le peu d'influence de la longueur N de la fenêtre d'analyse sur le comportement des algorithmes.

Sur le tableau 2 ne figurent pas les résultats des méthodes d'approximation stochastique qui se sont avérées très sensibles au locuteur, à la longueur de la fenêtre d'analyse et à l'ordre du modèle sans jamais donner de résultats comparables aux méthodes précédentes.

L'autre critère de comparaison est la stabilité du modèle estimé. Comme prévu, la méthode d'autocorrélation partielle et l'algorithme de Burg n'ont jamais fait apparaitre d'instabilité. Pour ce qui est des moindres carrés récursifs, on a observé, suivant le locuteur, un nombre de filtres instables variant de 1% à 3% du nombre de modèles estimés. Quant à l'algorithme de TSE, malgré une inversion numériquement stable de la matrice de Hankel, il a fourni plus de 50% de modèles instables quel que soit le critère utilisé pour déterminer ou imposer l'ordre M.

6.0 CONCLUSION

Cet exposé se propose de comparer différents algorithmes de modèlisation dans le cadre des systèmes de transmission numérique d'un signal.

Les contraintes essentielles auxquelles on s'attache sont la stabilité numérique des algorithmes, leur précision, la stabilité du modèle estimé et enfin la complexité des calculs.

Trois types de méthodes sont envisagées :

- les méthodes globales de type moindres carrés (autocorrélation partielle, algorithme de Burg) dont des algorithmes rapides et numériquement stables ont été proposés. Ces méthodes globales permettent de plus de vérifier la stabilité du modèle estimé.

- les moindres carrés récursifs qui, par rapport aux méthodes précédentes, permettent d'introduire une connaissance a priori des paramètres du modèle mais au détriment de la stabilité.

- les méthodes de réalisation stochastique parmi lesquelles on examine plus particulièrement l'algorithme de E. Tse. Ici,la nécessité d'inverser la matrice de Hankel du processus ne permet pas d'utiliser, actuellement, des méthodes rapides numériquement stables.

Des simulations d'un système de transmission numérique de la parole permettent d'affirmer que les méthodes de réalisation stochastiques sont inadaptées à ce type de signal.

L'algorithme de Burg et la méthode d'autocorrélation partielle, de par leur robustesse, donnent de bien meilleurs résultats. Nécessitant le moins de calculs, l'algorithme de Le Roux, pour la résolution de la méthode d'autocorrélation partielle, est, à l'heure actuelle, le plus facile à utiliser pour des applications aux contraintes de temps sévères. Cependant, l'évolution rapide de la technologie, devrait permettre une utilisation plus aisée de l'algorithme de Burg.

7.0 REFERENCES

/1/ A.S. WILLSKY 'Relationships Between Digital Signal Processing and Control and Estimation Theory' Proc. IEEE, pp 996-1017, Sep 1978

/2/ E. TSE, H. WEINERT 'Structure determination and parameter identification for multivariable Stochastic Systems'. 1973 JACC

/3/ J.D. MARKEL, A.H. GRAY 'Linear prediction of speech' Springer-Verlag, New-York 1976
/4/ J. DURBIN 'The fitting of time-series model' Rev. Intern. Stat. Inst., vol 28, 1960
/5/ J. LE ROUX 'Optimisation du calcul des coefficients PARCOR' 7èmes Journées d'Etudes sur la Parole Nancy 1976
/6/ T.E. BARNARD 'The Maximum entropy spectrum and the Burg technique' Texas Instruments Inc., June 1975
/7/ J.D. GIBSON, J.L. MELSA, Z.K. JONES 'Digital Speech analysis using sequential estimation techniques' IEEE Trans. ASSP, Vol 23, no 4, Aug 1975
/8/ L.S. DE JONG 'Numerical aspects of realization algorithms in linear systems theory' Ph.D. Dissertation, Technical University of Eindhoven, The Netherlands, July 1975
/9/ J.L. MASSEY 'Shift Register synthesis and BCH decoding' IEEE Trans. Inf. Theory, pp 122-127, Jan 1969
/10/ D. MAUDUIT, F. BOERI 'Comparaison de différents algorithmes de modèlisation de la parole' Contrat DRET n° 76/1094
/11/ D. ESTEBAN, J. MENEZ 'Low bit rate voice transmission based on transversal predictive block coding'. 91st ASA Meeting, Washington April 1976

$$k(0) = -\frac{r(1)}{r(0)}$$

$$\begin{cases} j = 2, M \\ e^1(j) = r(j) + k(0).r(j-1) \\ e^1(2-j) = r(j-2) + k(0).r(j-1) \end{cases}$$

$$m = 2, M \begin{cases} k(m-1) = -\dfrac{e^{m-1}(m)}{e^{m-1}(0)} \\ \begin{cases} j = m+1, M \\ e^m(j) = e^{m-1}(j) + k(m-1).\,e^{m-1}(m-j) \\ e^m(m+1-j) = e^{m-1}(m+1-j) + k(m-1).\,e^{m-1}(j-1) \end{cases} \end{cases}$$

Fig. 3: Algorithme de Leroux

$$f^0(n) = b^0(n) = y(n) \qquad n = 0, N$$

$$m = 0, M-1 \begin{cases} k(m) = -2 \cdot \dfrac{\sum_{n=0}^{N-m-1} f^m_{n+m+1}\, b^m_n}{\sum_{n=0}^{N-m-1} \{f^m_{n+m+1}\}^2 + \{b^m_n\}^2} \\ \begin{cases} n = 0, N-m-1 \\ f^{m+1}_{n+m+1} = f^m_{n+m+1} + k(m).\,b^m_n \\ b^{m+1}_n = b^m_n + k(m).\,f^m_{n+m+1} \end{cases} \end{cases}$$

Fig. 4: Algorithme de Burg

$$\begin{bmatrix} r(0) & r(1) & \cdots & r(M-1) \\ r(1) & r(0) & r(1) & \vdots \\ r(2) & r(1) & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & r(1) \\ r(M-1) & \cdots & r(1) & r(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(1) \\ \vdots \\ a(M) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r(1) \\ r(2) \\ \vdots \\ r(M) \end{bmatrix} = 0$$

Fig. 1: Equations de Yule-Walker

$$\alpha(0) = r(0)$$
$$\beta(0) = r(1)$$

$$m = 1, M \begin{cases} k(m-1) = -\dfrac{\beta(m-1)}{\alpha(m-1)} \\ \begin{cases} j = 1, m-1 \\ a^m(j) = a^{m-1}(j) + k(m-1).\,a^{m-1}(m-j) \end{cases} \\ a^m(m) = k(m-1) \\ \alpha(m) = \alpha(m-1).\left(1 - k^2(m-1)\right) \\ \beta(m) = r(m+1) + \sum_{i=1}^{m} a^m(i).\,r(m+1-i) \end{cases}$$

Fig. 2: Algorithme de Levinson

$$\hat{A}(n) \triangleq E\left[(a(n,1), a(n,2), \ldots, a(n,M))^T\right]$$
$$\hat{A}(0),\ P(0) \ \text{donnés} \qquad r = E[(v(n))']$$

$$n = 1, N \begin{cases} Y(n) = -\left(y(n-1), y(n-2), \ldots, y(n+1-M)\right) \\ K(n) = P(n-1)Y(n)^T\left(Y(n)P(n-1)Y^T(n) + r\right)^{-1} \\ \hat{A}(n) = \hat{A}(n-1) + K(n).\left(y(n) - Y(n)\hat{A}(n-1)\right) \\ P(n) = P(n-1) - K(n)Y(n)P(n-1) \end{cases}$$

Fig. 5: Moindres Carrés Récursifs

Calcul de F :

$$\begin{bmatrix} r(1) & r(2) & \cdots & r(M) \\ r(2) & r(3) & \cdots & r(M+1) \\ r(3) & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ r(M) & \cdots & & r(2M-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a(M) \\ a(M+1) \\ \vdots \\ a(1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r(M+1) \\ r(M+2) \\ \vdots \\ r(2M) \end{bmatrix} = 0$$

Calcul de G et Q :

Initialisation $P = 0$

Itérations jusqu'à convergence
$$\begin{cases} Q = r(0) - HPH^T \\ G = \left\{(r(1), r(2), \ldots r(M))^T - FPH^T\right\} / Q \\ P = FPF^T + GQG^T \end{cases}$$

Fig. 6: Algorithme de Tse