SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

ANALYSE DES METHODES DE RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DISCRETE DE RICCATI - APPLICATION A L'OPERATEUR DE RICCATI RAPIDE

Alain GIULIERI - Claude A. BOZZO

LAIAT - DCAN de TOULON GESTA/CAPCA

RESUME

Les algorithmes d'identification et de filtrage par la méthode de KALMAN imposent de résoudre des équations récurrentes de type RICCATI. Cet article compare différentes méthodes de résolution de cette équation. Dans le cadre d'une implémentation future sur processeur rapide et de la recherche d'un Opérateur de RICCATI Rapide (ORR), les critères de comparaison seront essentiellement le volume d'occupations mémoire, le nombre d'opérations nécessaire et la vitesse de convergence.

De plus nous proposons une méthode permettant de transformer des équations de type RICCATI propres à certains algorithmes d'identification (algorithme de réalisation de FAURE et BELANGER), en équations de RICCATI rencontrées dans le filtrage de KALMAN.

SUMMARY

Identification and KALMAN filtering algorithms suppose the resolution of RICCATI recursive equation. This paper compares the performance of several methods concerning the resolution of these equations. With the object of implementing an algorithm in a microprogramed processor and for realizing a Fast RICCATI Operator (FRO), the comparison criterias are the memory occupation, the number of operations and the convergence rate.

We also propose a method to transform in classical RICCATI equations of KALMAN fictering a class of RICCATI equations that are associated to the identification problem (by realisation methods).

ANALYSE DES METHODES DE RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DISCRETE DE RICCATI - APPLICATION A L'OPERATEUR DE RICCATI RAPIDE

1. - INTRODUCTION [1 à 14]

De nombreux systèmes physiques continus sont représentés par une équation d'état linéaire qui, discrétisée, est de la forme (1) :

$$x(k+1) = F(k)\, x(k) + w(k) \quad \text{avec} \quad \dim F(k) = [\, n \times n \,], \quad \dim x(k) = [\, n \times 1 \,]$$

où x(k) est le vecteur d'état, F(k) la matrice de transition d'état et w(k) un bruit supposé blanc gaussien de moyenne nulle et de covariance Q(k).

L'observation z(k) est donnée par la relation (2) :

$$z(k) = H(k)\, x(k) + v(k) \quad \text{avec} \quad \dim z(k) = [\, m, 1 \,]$$

H(k) étant la matrice d'observation et v(k) un bruit de mesure blanc gaussien de moyenne nulle et de covariance R(k)

$$E \left\{ \begin{bmatrix} w(k) \\ v(i) \end{bmatrix} [w^T(j) \;\; v^T(j)] \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta ij$$

ou S^T représente la matrice transposée de S.

L'algorithme de filtrage optimal (filtre de KALMAN) demande de résoudre l'équation de RICCATI.

$$P = F P F^T - (F P H^T + S)(H P H^T + R)^{-1} (H P F^T + S^T) + Q$$

dans laquelle P est la matrice de covariance d'erreur entre le vecteur d'état x(k) et le vecteur d'état prédit $\hat{x}(k)$.

$$\hat{x} = E \{ x(k) \mid z(1), \ldots\ z(k-1) \}$$

$$P = E \{ (x-\hat{x})(x-\hat{x})^T \}$$

Lorsque les bruits de commande et de mesure ne sont pas corrélés (S = 0), l'équation de RICCATI devient :

$$P = F P F^T - F P H^T (H P H^T + R)^{-1} H P F^T + Q$$

Si le système est observable et commandable, une matrice P symétrique et définie positive est solution de l'équation précédente [5 à 14]

Le gain de KALMAN optimal est alors :

$$K = P H^T [\, H P H^T + R \,]^{-1}$$

Le calcul du gain peut se faire soit de façon asymptotique soit par des méthodes itératives.

2. - DETERMINATION ASYMPTOTIQUE [14, 29 à 34]

2.1 - Méthode de VAUGHAN

Cette méthode consiste à déterminer les valeurs propres de la matrice :

$$\mathcal{H}_F = \begin{bmatrix} F^{-1} & F^{-1} H^T R^{-1} H \\ Q F^{-1} & F + Q F^{-1} H^T R^{-1} H \end{bmatrix}$$

Si ℓ est valeur propre, $1/\ell$ l'est aussi. Il existe une matrice de vecteurs propres :

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}$$

dont les n premiers vecteurs sont ceux correspondant aux n valeurs propres extérieures au cercle unité. La solution asymptotique est :

$$P = W_{21} W_{11}^{-1}$$

Cependant la dimension de F étant n × n, celle de $\mathcal{H}_F$ est 2n × 2n et la détermination des valeurs propres se fait par la résolution d'une équation polynomiale d'ordre 2n qui peut se ramener à une équation d'ordre n et n équations d'ordre 2, ce qui est préférable dans la mesure où les méthodes de résolutions numériques ne sont valables que pour des ordres n inférieurs à 10 (ex : subroutine POLRT d'IBM).

Si l'on met la matrice F sous forme compagne par rapport à la dernière colonne, et si H = (0,0,..;1) (cas où m = 1) on démontre que le gain K s'exprime en fonction de la somme et du produit des valeurs propres extérieures au cercle unité, cependant il faut déterminer la transformation $\mathcal{L}$ donnant la matrice F sous forme compagne et la matrice $\mathcal{L}^{-1}$ permettant de donner le gain dans l'ancienne base.

2.2 - Méthode d'équivalence continu-discret [33-34]

Lorsque la matrice F est diagonale et s'écrit de la forme :

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f_n \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad H = (1, 0, 0 \ldots 0)$$

$$\text{et } Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{1n} \\ q_{1n} & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Le gain de KALMAN est donné par les formules:

$$K_1 = \frac{1}{2f_1{}^2} \left\{ f_1^2 - 1 - \frac{q_{11}}{R} + \left[(1 + \frac{q_{11}}{R} - f_1^2)^2 + 4 f_1^2 \frac{q_{11}}{R} \right]^{1/2} \right\}$$

$$K_n = \frac{2 q_{1n}}{(q_{11} + R f_1^2 + R) + \left\{ (R + q_{11} - R f_1^2)^2 + 4 f_1^2 q_{11} R \right\}^{1/2} - 2 R f_1 f_n}$$

Si la matrice F n'est pas diagonale, les expressions du gain ne sont pas faciles à expliciter et il faut résoudre des polynômes de degré n, à n inconnues.

3. - METHODES ITERATIVES

3.1 - Equations de KALMAN [1, 2, 14 à 22]

L'équation de RICCATI est décomposée en trois équations récursives :

$$\begin{cases} P_{k/k-1} = F\,P_{k-1/k-1}\,F^T + Q \\ P_{k/k} = P_{k/k-1} - K_k\,H\,P_{k/k-1} \\ K_k = P_{k/k-1}\,H^T\,[H\,P_{k/k-1}\,H^T + R]^{-1} \end{cases}$$

La solution asymptotique vérifie les relations $P_{k+1/k} = P_{k/k-1}$ et $P_{k+1/k+1} = P_{k/k}$.

L'inconvénient de cette méthode provient d'une part de l'inversion de la matrice : $[\,H\,P_{k/k-1}\,H^T + R\,]$ lorsque $m > 1$ d'autre part du fait que les erreurs d'arrondi dans les calculateurs peuvent faire perdre le caractère symétrique défini positif de la matrice P.

Afin de garder la symétrie on utilise parfois à chaque pas de calcul une méthode qui consiste à faire la moyenne de termes :

$$P = \frac{1}{2}\,(P + P^T)$$

Cette solution qui améliore la précision sur P augmente les calculs de $\frac{n(n-1)}{2}$ additions et autant de divisions par le chiffre deux.

La propriété de la matrice P est conservée par la formulation de mise à jour de la variance de JOSEPH [18, 19] :

$$P_{k+1/k+1} = (I-K_{k+1}\,H)\,P_{k+1/k}\,(I-K_{k+1}\,H)^T + K_{k+1} R\,K_{k+1}^T$$

Cette formule donne la valeur de la covariance en étant peu sensible à une erreur de gain mais augmente énormément la taille des calculs (cf. tableau de comparaison du nombre de calculs pour chaque type d'algorithme).

Notons que dans les calculs en temps réel, l'équation de RICCATI étant trop longue, entre chaque mesure les différents algorithmes existant ne prévoient qu'un nombre d'itérations limité. Dans ce cas si le système n'est pas stationnaire, le gain de KALMAN n'est pas optimal.

3.2 - Algorithmes "Racine Carrée" [14, 15, 22 à 28]

Le fait que la longueur des mots dans les calculateurs ne soit pas infinie entraîne la perte de la symétrie et de la défini positivité de la matrice P. La factorisation de la matrice de covariance P sous la forme :

$$P = G\,G^T$$

Où G est une matrice triangulaire supérieure ou inférieure suivant les algorithmes, permet non seulement de garder la propriété de P mais aussi d'augmenter la précision des calculs.

La matrice G est déterminée par une décomposition de CHOLESKY ou l'algorithme de HOUSEHOLDER ou encore de GRAM-SCHMIDT modifié.

Le principe des algorithmes "Racines Carrée" est le suivant (POTTER) en écrivant dans l'équation de RICCATI la relation $P = G\,G^T$.

On obtient : $G_+\,G_+^T = G\,[I - f\,f^T/a]\,G^T$

où $f = G^T\,H^T$

et $a = R + f^T\,f \equiv R + H\,P\,H^T$

la relation $[I - ff^T/a]^{1/2} = [I - cff^T]$

donne $c = 1/[a+(a.R)^{1/2}]$

tel que $G_+ = G - c\,b\,f^T$

où $b = G\,f = K\,a$, K étant le gain de KALMAN.

Dans la méthode de POTTER on peut choisir indifféremment G matrice triangulaire supérieure ou inférieure. Dans celle de CARLSON, G est nécessairement triangulaire supérieure et l'algorithme est le suivant:

$W(k+1) = F.G_+(k)$

$G(k+1) = [W(k+1)\,W^T(k+1) + Q]^{1/2}$

$f(k+1) = G^T(k+1)\,H_j^T(k+1) \qquad 1 \leq j \leq m$

$a_o = Rjj \qquad 1 \leq j \leq m$

$b_o\,(k+1) = o$

$a_i = a_{i-1} + f_i^2\,(k+1) \qquad 1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$

$$d_i = \left(\frac{a_{i-1}}{a_i}\right)^{1/2}$$

$$c_i = \frac{f_i(k+1)}{(a_{i-1}.a_i)^{1/2}}$$

$b_i(k+1) = b_{i-1}(k+1) + G_i(k+1)\,f_i(k+1)$

$G_{i+}(k+1) = G_i(k+1)\,d_i - b_{i-1}(k+1)\,c_i$

ANALYSE DES METHODES DE RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION

DISCRETE DE RICCATI - APPLICATION A L'OPERATEUR DE RICCATI RAPIDE

Dans ces équations a_o et a_i, d_i, C_i $(1<i<n)$ sont des scalaires, $b_o(k+1)$ et $b_i(k+1)$ sont des vecteurs de dimension n, $f_i(k+1)$ est la ième composante de $f(k+1)$, $H_j^T(k+1)$ est la jème colonne de $H^T(k+1)$, Rjj est le jème élément diagonal de R et $G_i(k+1)$ est la ième colonne de $G(k+1)$. Bien que l'algorithme de CARLSON semble plus complexe que les autres de la même famille, il demande moins d'équations puisque $G(k+1)$ est toujours supérieure.

3.3 - Technique U. D. [15,27]

Au lieu de factoriser la matrice de covaraince $P = G\,G^T$, on le décompose sous la forme P=UDU' ou D est une matrice diagonale et U une matrice triangulaire supérieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & d_1 & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

BIERMAN propose un algorithme selon ce principe mais le problème est de déterminer les matrices U et D nécessaires à cet algorithme.

3.4 - Détermination du gain sans résolution d'équation récurrente de RICCATI [35 à 37]

LINDQUIST et KAILATH proposent un algorithme basé sur le fait que le gain de KALMAN est fonction du produit $L = P\,H^T$ et qui transforme l'équation de RICCATI en équation de CHANDRASHECKAR de type suivant :

$$K = L_k\,[H\,L_k + R]^{-1}$$

avec

$$L_{k+1} = L_k - L_k^*\,(M_k^*)^{-1}\,L_k^{*T}\,H^T$$

$$L_{k+1}^* = F.L_k^* - F\,L_k\,[H\,L_k + R]^{-1}\,H\,L_k^*$$

$$M_{k+1}^* = M_k^* - L_k^{*T}\,H^T\,[H\,L_k + R]^{-1}\,H\,L_k^*$$

Les matrices L_k et L_k^* sont des matrices $n \times m$ et M_k^* est une matrice $m \times m$ symétrique. Il y a donc $2\,nm + m(m+1)/2$ équations pour déterminer L_k mais il y a encore des inversions de matrices.

3.5 - Méthode de quasi linéarisation [33,34,44]

En appliquant la transformation $\frac{1-\zeta}{1+\zeta}$, l'équation de RICCATI se transforme en équation de LJAPUNOV

$$P_k - (F-B_kH)\,P_k(F-B_k\,H)^T = B_k\,R\,B_k^T + Q = C$$

avec : $B_{k+1} = F\,P_k\,H^T\,[H\,P_k\,H^T + R]^{-1}$

Cette équation peut se résoudre soit par itération, soit par calcul matriciel :

La matrices P et C étant symétriques, on crée deux vecteurs constitués des éléments de ces matrices est vérifiant :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & & & & & & \\ a_{31} & & a_{33} & & & & \\ a_{41} & & & & & & \\ a_{51} & & & & & & \\ a_{61} & & & & & a_{66} & \\ a_{71} & & & & & & a_{77} \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \\ p_{22} \\ --- \\ p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \\ --- \\ p_{14} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ C_{22} \\ --- \\ C_{13} \\ C_{23} \\ C_{33} \\ --- \\ C_{14} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

avec la relation matricielle $C = B_k\,R\,B_k^T + Q$

L'algorithme permettant de calculer les a_{ij} est donné en annexe.

La détermination de la matrice P nécessite alors l'inversion de la matrice $\{a_{ij}\}$ de dimension $n(n+1)/2 \times n(n+1)/2$, ce qui n'est possible que lorsque n est faible.

3.6 - Comparaison des algorithmes

La comparaison des différents algorithmes est effectuée dans les tableaux suivants :

TABLEAU N° 1

TEMPS DE CALCUL POUR 100 ITERATIONS

n	m	Quasi linéalisation	KALMAN	CARLSON	KAILATH
10	10	.0382	.0377	.0532	.0392
8	8	.0254	.0200	.0283	.0298
6	6	.0115	.0091	.0125	.0131
5	5	.0071	.0057	.0087	.0083
3	3	.0023	.0019	.0064	.0026
10	2	.0151	.0142	.0335	.0059
10	1	.0132	.0125	.0298	.0034
8	2	.0091	.0083	.0185	.0044
8	1	.0072	.0071	.0161	.0026
5	2	.0051	.0052	.0058	.0026
5	1	.0025	.0026	.0050	.0025
3	2	.0016	.0016	.0024	.0019
3	1	.0012	.0013	.0021	.0012

Les temps de calcul mesurés sont des heures d'unité centrale HB 66/10.

TABLEAU N° 2

VITESSE DE CONVERGENCE

Nombre d'itérations moyen	Quasi-linéalisation	KALMAN	CARLSON	KAILATH
	30	100	35	50

Ces mesures ont été faites pour différentes valeurs de n et m, et différentes matrices F, Q et R.

TABLEAU N° 3

VOLUME D'OCCUPATION MEMOIRE ET NOMBRE D'OPERATIONS PAR ITERATIONS

Nature de l'algorithme	Nombre d'opérations: +	Nombre d'opérations: x	Inversion de matrice: nbre	Inversion de matrice: dim.	$\sqrt{\ }$	Volume d'occupation mémoire
KALMAN	$\frac{3}{2} n^3 + \frac{3}{2} mn^2 + \frac{1}{3} (3 m \quad 1) n$	$\frac{3}{2} n^3 + \frac{3}{2} (m + 1) n^2 + \frac{7}{2} mn$	1	mxm	0	$\frac{9}{2} n^2 + \frac{n}{2} + 2 mn + \frac{1}{2} (m^2 + m)$
JOSEPH	$3 n^3 + \frac{5}{2} mn^2 + \frac{3}{2} m^2 n + mn + \frac{1}{3} m^3 n - \frac{3}{2} m^2 + m$	$3 n^3 + \frac{5}{2} (m + 1) n^2 + \frac{3}{2} m^2 + 4 mn + \frac{m^3}{2} + \frac{3m^2}{2}$	1	mxm	0	$\frac{9}{2} n^2 + \frac{n}{2} + 2 mn + \frac{1}{2} (m^2 + m)$
POTTER	$\frac{5}{3} n^3 + 3 mn^2 - \frac{2}{3} n + m$	$\frac{5}{3} n^3 + (3 m + 2) n^2 + (3 m - \frac{2}{3}) m$	divisions n + 2 m		n + m	$\frac{9}{2} n^2 + \frac{n}{2} + 2 mn + \frac{1}{2} (m^2 + m)$
CARLSON	$\frac{7}{6} n^3 + \frac{1}{2} (3 m + 1) n^2 + (\frac{m}{2} - \frac{2}{3}) n$	$\frac{7}{6} n^3 + (2 m + \frac{5}{2}) n^2 + (4 m - \frac{2}{3}) n$	divisions n (m + 1)		n (1 + m)	$\frac{7 n^2}{2} + \frac{5 n}{2} + mn + 2 m^2$
Quasi linéarisation avec itération	$\frac{3}{2} n^3 + (\frac{3}{2} m + 1) n^2 + \frac{1}{3} (3m+1) n + r (2n^3 - n^2)$	$\frac{3}{2} n^3 + \frac{3}{2} mn^2 + 2 n^3 r$	1	mxm	0	$\frac{9}{2} n^2 + \frac{n}{2} + 2 mn \; \frac{1}{2} (m^2 + m)$
KAILATH	$3 n^2 m + 8 m^2 n + m^2$	$3 mn^2 + 6 m^2 n$	2	mxm	0	$2 n^2 + 5 mn + 2 m$

Dans l'algorithme de quasi linéarisation, r représente le nombre d'itérations nécessaire pour résoudre l'équation de LJAPUNOV.

Compte tenu de sa vitesse de convergence et de sa souplesse d'emploi cet algorithme parait le mieux adapté pour la réalisation de l'opérateur de RICCATI Rapide.

4. - TRANSFORMATION DE CERTAINES CLASSES D'EQUATION DE RICCATI

Dans certains algorithmes d'identification [3,4,33,45,46] l'équation de RICCATI s'écrit sous la forme :

$$X = F X F^T + F(T-X H^T)(Z-HXH^T)^{-1}(T-XH^T)^T F^T$$

Le problème est de déterminer une matrice Y symétrique telle que :

$$T = Y H^T$$

Dans ce cas, en écrivant P = X - Y

$$P = F P F^T - F P H^T (H P H^T+R)^{-1} H P F^T + Q$$

$$\text{avec } R = H Y H^T - Z$$
$$\text{et } Q = F Y F^T - Y$$

Les matrices Q et R gardent, dans les algorithmes considérés, leur propriété de défini-positivité.

Pour calculer la matrice Y, considérons la matrice H de dimension $m \times n$ avec $m < n$.

Si m = n le système devant être observable la matrice H est inversible et $Y = T [H^T]^{-1} = T H^{-T}$

Si $m < n$ il n'existe pas de pseudo inverse à gauche de H^T.

ANALYSE DES METHODES DE RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DISCRETE DE RICCATI - APPLICATION A L'OPERATEUR DE RICCATI RAPIDE

Comme dans la méthode de résolution de l'équation de LJAPUNOV on constitue :

- le vecteur y de n. $\frac{n+1}{2}$ composantes déduit de Y symétrique.
- le vecteur t de n.m composantes déduit de T.
- une matrice A de[n mxn $\frac{n(n+1)}{2}$] éléments vérifiant la relation t = A.Y.

La matrice A doit être rectangulaire ($m < \frac{n+1}{2}$). Pour la rendre inversible, on la ramène à une matrice carrée nm × nm. A cette fin en testant successivement les différentes colonnes, chaque fois que l'une d'elles n'est composée que d'éléments nuls, on la supprime ainsi que la composante de y correspondante en lui donnant la valeur zéro.

Après cette opération, si la matrice n'est pas carrée, on supprime, en annulant, autant de composantes de y que nécessaire en supprimant en même temps la colonne correspondante. Il ne reste plus qu'à inverser la matrice réduite $\underline{A}$ afin de calculer :

$$y = \underline{A}^{-1}\ t$$

Après reconstitution de la matrice Y symétrique, l'équation de RICCATI se résoud selon une des méthodes décrites précédemment. Le résultat est alors une matrice P et l'on déduit X = P + Y.

Exemple : $T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$ $H = [h_1,\ h_2]$ m = 1, n = 2 donc $m < \frac{n+1}{2}$

Il faut trouver la matrice Y qui vérifie :

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & 0 \\ 0 & h_1 & h_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_1 & h_2 & 0 \\ 0 & h_1 & h_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{12} \\ Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

Si $h_1 = o \rightarrow Y_{11} = 0$

$$\begin{bmatrix} Y_{12} \\ Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_2 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & T_1/h_2 \\ T_1/h_2 & T_2/h_2 \end{bmatrix}$$

Si h_1 et $h_2 \neq 0$ on pose par exemple $Y_{12} = 0$

$$\begin{bmatrix} Y_{11} \\ Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{T_1}{h_1} & 0 \\ 0 & \frac{T_2}{h_2} \end{bmatrix}$$

Cette méthode est valable aussi pour transformer l'équation de RICCATI avec les bruits de commande et de mesure corrélés ($S \neq 0$) en équation de RICCATI classique.

5. - CONCLUSION

Dans la mesure où l'opérateur de RICCATI Rapide doit être souple d'emploi, c'est-à-dire pouvoir résoudre différents types d'équation de RICCATI, l'algorithme de quasilinéarisation est le plus adapté compte tenu de sa rapidité de convergence pour un temps de calcul par itération et un volume d'occupation mémoire qui sont du même ordre de grandeur que les autres algorithmes de résolution.

A N N E X E [18, 40 à 44]

La résolution de l'équation de LJAPUNOV

$$P - X\ P\ X^T = Q$$

par calcul matriciel se fait en composant une matrice A et deux vecteurs PV et QV. tels que :

A . PV = QV

qui permet de déduire : $PV = A^{-1}$. QV

La constitution de la matrice A est donnée par l'algorithme suivant (ordre N) :

```
I = o ; NN = N(N+1)/2
DØ 1 IA = 1,N ; DØ 1 IC = 1, IA
I = I + 1, J = o
DØ 1 IB = 1,N ; DØ 1, ID = 1, IB
J = J + 1
A(I,J) = - X(IA,IB) * X(IC,ID) - X (IA,ID) * X(IC,IB)
IF(IB.EQ.ID)  A(I,J) = A(I,J)/2.
1. CONTINUE.
DO 2 I=1,NN
2 A(I,I) = 1 + A (I,I)
```

La constitution du vecteur QV se fait ainsi :

```
K = 0 ; DØ 3 I= 1,N ; DØ 3J = 1,N
K = K+1
3 QV(k) = (Q(I,J) + Q(J,I)
```

Une fois le calcul matriciel effectué, la matrice P solution est reconstitué de la façon suivante

```
K = 0;DØ 4 I = 1,N ; DØ 4 J = 1,I
K = K + 1
P(I,J) = PV(k)
4 . P(J,I) = PV(k)
```

Cette méthode qui demande d'inverser une matrice $n(n+1)/2$, n étant l'ordre de système donne la matrice solution P symétrique. Bien que plus simple à écrire mathématiquement, la résolution de l'équation de LJAPUNOV par inversion de matrice exige un temps de calcul beaucoup plus important que celle par itérations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. KALMAN "A Nex Approach to Linear filtering and Prediction Problems" Journal of Basic Engineering - p. 34 - 35 - March 1960

[2] J.C. RADIX "Introduction au filtrage numérique" Ed. Eyrolles 1970

[3] P. FAURRE "Réalisations Markoviennes de processus stationnaires". Doctorat d'état Paris VI Décembre 1972

[4] C. BOZZO "a Discrete suboptimal Adaptive Estimation Schema for linear Systems with Unknown Plant and Measurement Noise Covariancs" - IFAC 6th Triennal World Congress Boston Mass. USA 1975

[5] B. MOLINARI "The Stabilizing Solution of the Discrete Algebraic RICCATI Equation" - IEEE Trans. Aut. Control.p.396.399 Juin 1975

[6] T. KAILATH, L. JUNG "The Asymptotic behavior of constant Coefficient RICCATI Differential Equations" IEEE Aut. Control.p.385.388 Juin 1976

[7] A. HEWER "Analysis of a Discrete Matrix RICCATI Equation of Linear Control and KALMAN Filtering" Journal of Mathematical Analysis and applications n° 42 p.226.236 - 1973

[8] S.KLEINBANOV, V. PRIVAL'SKH, I.TIME "Stabilization of coefficients in Discrete KALMAN filter" Automatika i telemekhanika n° 3 p. 76.82 Mars 1974

[9] D. RAPPAPORT, L. SILVERMAN "Structure and Stability of Discrete Time Optimal Systems" IEEE Aut. Control Vol. 16 n°3 p.227-233 June 1971

[10] P. CAINES, D. MAYNE "On the Discrete Matrix RICCATI Equation of Optimal Control" INT. J. Control. Vol. 12 n°5 p.785-794 1970

[11] J.M RODRIGUEZ - CANABAL "The Geometry of the RICCATI Equations" Contrat AFSOR - 71-2141 reproduit par National Technical Information Service - Juin 1972

[12] R. BUCY, D. RAPPAPORT, L.SIVERMAN "Correlated Noise Filtering and Invariant Directions for the RICCATI Equations" IEEE Aut. Control. Vol. 15 n° 5 p. 535.540 Octobre 1970

[13] D. RAPPAPORT "Constant Directions of the RICCATI Equation" Automatica Vol. 8 p. 175-186 Bergamon Press 1972

[14] A. BARRAUD "Sur la résolution numérique des équations de RICCATI - Cas discret" RAIRO - Octobre 1974-J-3 p. 75 à 91

[15] M. LABARRERE, J.P. KRIEF, B. GIMONET "Le Filtrage et ses applications" CEPADUES Editions 1978

[16] C. BOZZO "Filtrage des processus stochastiques linéaires - Recherche de la solution d'équilibre de l'équation de RICCATI discrète associée au filtre de KALMAN BUCY" Cours DEA Marseille 1975

[17] P. JOSEPH "Space Control Systems - Attitude, Rendez-vous and Docking" Course notes 1964 - Engineering Extension Course, UCLA Los Angeles, Californie.

[18] J. SWARTENGEN "Fortran Subroutines to Solve the LYAPUNOV and the RICCATI Equations" FOA 2 rapport 1 n° C2655 E4.E5 Février 1974

[19] R. BUCY, P. JOSEPH "Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance" Interscience Publishers 1968

[20] G. FAVIER, G. ALLENGRIN "Identification du gain d'un filtre linéaire optimal - Etude comparative d'algorithmes de filtrage adaptatif" Fiche technique S 10 324 GESTA/CAPCA Juillet 1975

[21] M. CHIDAMBARA, A. SHIVAPRASAD "Digital Computer Study of the Performance of a Digital Filter for Radar Tracking".
Electro technogloy p. 82,85 September 1974

[22] G. BIERMAN "A comparison of Discrete Linear Filtering Algorithms"
IEEE Aérospace and electronic systems vol. AES9 n° 1 p. 28 - 37 Janvier 1973

[23] N. CARLSON "Fast Trangular Formulation of the Square Root Filter"
AIAA Journal Vol. 11 N°9 September 1973 p.1259-1265

[24] J. SCHIESS "Vectorization of Linear Discrete Filtering Algorithms"
NASA Technical Memorandum rapport n° TMX-3527 Juillet 1977

[25] C. CHOE, B. TAPLEY "New Method for Propagating the Square Root Covariance Matrix in Triangular Form"
AIAA Journal Vol. 13 n° 5 Mai 1975

[26] P. KAMINSKY, A. BRYSON, S. SCHMIDT "Discrete Square Root Filtering : A survey of Current Techniques" IEEE Aut. Control. Vol. 16 n° 6
Décembre 1971 p. 727-736

[27] C. THORNTON, G. BIERMAN "Givens Transformations Technics for KALMAN Filtering"
Acta Astronautica Vol. 4 p. 847-863
Bergamon Press 1977

[28] M. MORF, T. KAILATH "Square Root Algorithms for Discrete Sequential Estimation"
IEEE Aut. Control Vol. 20 n°4 1975

[29] D. VAUGHAN "A non Recursive Algebraic solution for the discrete Time Equation"
IEEE Aut. Cont. p. 597-599 Octobre 1970

[30] R. MONZINGO "A non Recursive Algebraic Solution for the Discrete Smoothed Error Covariance Matrix"
IEEE Aut. Control. p. 175 Avril 1973

[31] D. CLEMENTS, B. ANDERSON "Polynomial Factorization via the RICCATI Equation"
SIAM J. APPL. MATH . Vol. 31 n° 1 p. 179-205
Juillet 1976

[32] D. VAUGHAN "A Negative Exponential Solution for the Matrix RICCATI Equation"
IEEE Trans. Aut. Control Vol. AC 14 p. 72-75
Février 1969

[33] A. GUILBERT "Etude et comparaison de quatre algorithmes de réalisation stochastique"
Doctorat de 3ème cycle Marseille Mai 1977

[34] C. BOZZO "Transformée de LAGUERRE d'un signal continu - Application à l'étude du régime asymptotique du filtre de KALMAN.CRASS t277 -
Juillet 1973

[35] A. LINDQUIST "A new Algorithm for Optimal Filtering of Discrete Time Stationary Processes"
SIAM J Control. Vol. 12 n° 4 p. 736-746
Novembre 1974

[36] A. LINDQUIST "Optimal Filtering of Continuous Time Stationary Processes"

[37] A. LINDQUIST "Some Reduced-Order Non RICCATI Equations for linear Least-Square Estimation: the Stationary Single Output case" Int. J. Int. J. Control. 1976 vol. 24 n° 6 p. 821-842

[38] A. BARRAUD "A Numerical Algorithm to Solve $A^TXA - X = Q$" IEEE Aut. Control. vol. n° 5
Octobre 1977 p. 883-885

[39] S. BARNETT "Matrices, Polynomiales and Linear Time Invariant Systems" IEEE Aut. Control Vol.18
N°1 Février 1973

[40] R. BARTELS, G. STEWARD "Algorithm 432, Solution of the Matrix Equation $AX+XB = C$"
Communications of the A.C.M. Vol. 15 n° 9
September 1972

[41] I. SPACE, S.BARNETT "Comparison of Numerical Methods for Solving LYAPUNOV Matrix Equations"
Int. Journal Control. Vol. 15 n° 5 p. 907-915
1972

[42] W. HOSKINS, D. MEEK, D.WATSON "The Numerical Solution of $A^TQ + QA = - C$
IEE Aut. Control. Vol. 22 n° 5 p.882-883
Octobre 1977

[43] S. BARNETT "Simplification of the LYAPUNOV Matrix Equation $A^TPA - P = - Q$
IEEE Aut. Control p. 446-447 Août 1974

[44] D. ZILMER Rapport TP5180 Naval Weapons Center
Mai 1971

[45] P. BELANGER - B. CAREW "Identification of Optimum Filter Steady State Gain for Systems with Unknown Noise Covariances" IEEE Vol.AC 18 n° 6 Déc. 1973

[46] P. BELANGER "Estimation Noise Covariance Matrices for a Linear Time Varying Stochastic Process"
Automatica Vol. 10 p. 267-275 - 1974.