SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

ALGORITHMES DE FILTRAGE RAPIDE APPLICATION A L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES STATISTIQUES D'UN MODELE ARMA

G. FAVIER - G. ALENGRIN

LASSY (laboratoire de Signaux et Systèmes) Equipe de Recherche Associée au C N R S
41 Bd. Napoléon III 06041 NICE CEDEX

RESUME

Cet article présente une "version rapide" de l'algorithme de KALMAN ainsi que des algorithmes de réalisation stochastique de FAURRE et de BOZZO, en faisant appel à une équation du type CHANDRASEKHAR. Un résultat intéressant est l'unification de ces algorithmes à l'aide d'un même ensemble de 2n équations récurrentes, seules les conditions initiales étant différentes. Ces équations sont dérivées d'une factorisation des incréments de différentes matrices de covariance.

Puis, en considérant une forme filtre canonique spéciale, directement et simplement liée aux modèles ARMA, et en utilisant la même technique de factorisation, nous donnons une version rapide pour les algorithmes d'estimation des paramètres statistiques de tels modèles. Les équations ainsi obtenues présentent l'avantage d'être scalaires et leur implémentation est d'une grande facilité.

SUMMARY

This paper presents a "fast version" of the KALMAN's filter and FAURRE's and BOZZO's stochastic realization algorithms. An interesting result is that the different algorithms can be unified in the same set of 2n difference equations, only the initial conditions are different . These equations are obtained by a factorization of increments of different covariance matrices.

Then, a special state-space canonical form, directly and simply connected with ARMA models is considered. Using the same factorization's method, a "fast version" is derived for the ARMA's statistical parameters estimation algorithms. The equations so obtained are scalar and their implementation is very easy.

ALGORITHMES DE FILTRAGE RAPIDE
APPLICATION A L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES STATISTIQUES D'UN MODELE ARMA

I - INTRODUCTION

Le problème du filtrage linéaire, ou de manière équivalente celui de l'estimation au sens des Moindres Carrés, constitue seulement une petite partie de la théorie générale de l'estimation . Cependant, son vaste champ d'application en a fait un pôle d'attraction pour de très nombreuses recherches, comme le montre l'importante bibliographie fournie dans l'excellent "survey paper" de [T. KAILATH-1974] .

Dans le cas de processus stochastiques stationnaires, [N.WIENER-1949] a résolu les problèmes du filtrage et de la prédiction à l'aide d'une formulation spectrale, basée sur la résolution d'une équation du type WIENER-HOPF . [R.E. KALMAN-1960] et [R.E. KALMAN, R.S. BUCY-1961] ont généralisé les résultats précédents respectivement dans les cas de systèmes discrets et de systèmes continus, stationnaires ou non stationnaires, en utilisant une représentation interne des processus sous forme de modèles d'état . Cette deuxième approche qui fait appel à la résolution d'une équation matricielle du type RICCATI, offre le grand avantage d'être séquentielle .

Cependant, étant donné les dimensions de plus en plus grandes des systèmes envisagés et les exigences de plus en plus pressantes tant du point de vue de la précision des résultats que du temps de calcul nécessité pour leur obtention, de nouveaux algorithmes ont été mis au point dans le double but d'améliorer la précision numérique et de réduire à la fois les volumes de calcul et les encombrements mémoires utilisés. Dans cette optique, deux nouvelles familles d'algorithmes ont été développées .

L'une est constituée par les "algorithmes de factorisation" ("square root algorithms") introduits par POTTER [R.H. BATTIN-1964] puis repris et développés par [J.F. BELLANTONI, K.W. DODGE-1967], [A. ANDREWS-1968],[P. DYER, S. McREYNOLDS-1969] et [P.G. KAMINSKI, A.E. BRYSON, S.F. SCHMIDT-1971], le livre de [G.J. BIERMAN-1977] constituant un ouvrage de base pour ces techniques de factorisation . Le principe de ces algorithmes est basé sur le calcul récursif d'une factorisation des matrices de covariance (ou de leurs inverses), assurant ainsi leur définie non négativité et par conséquent la stabilité des algorithmes ainsi qu'une meilleure précision numérique. En contre partie, ils nécessitent un plus grand nombre de calculs .

L'autre famille, qui a pour objectif principal la rapidité d'exécution, correspond aux "Algorithmes dits de filtrage rapide" . Ainsi, dans le cas des systèmes linéaires continus invariants dans le temps [T. KAILATH-1973] a présenté une nouvelle classe d'algorithmes permettant de remplacer l'équation matricielle (nxn) du type RICCATI par un ensemble d'équations différentielles non linéaires, du type [S. CHANDRASEKHAR-1947, 48], au nombre de 2pn, où n et p sont respectivement les dimensions de l'espace d'état et du vecteur d'observation . Il apparaît alors que cette solution devient avantageuse d'un point de vue numérique lorsque $n \gg p$. [A.LINDQUIST-1974] et [M. MORF, G.S. SIDHU, T.KAILATH-1974] ont ensuite étendu les résultats précédents au cas de systèmes linéaires discrets invariants dans le temps. Comme dans le cas des systèmes continus, les $\frac{n(n+1)}{2}$ équations non linéaires provenant de l'équation matricielle du type RICCATI sont alors remplacées par un système d'équations récurrentes non linéaires, au nombre de $\frac{p(p+1)}{2} + 2pn$, ce qui est très avantageux dans le cas où $p \ll n$. En particulier, pour une observation scalaire (p=1), le gain optimal du filtre de KALMAN peut être obtenu par la résolution de 2n équations seulement .

Enfin, nous devons signaler que [M.MORF, T. KAILATH-1975] ont utilisé les deux approches précédentes pour définir de nouveaux algorithmes de filtrage rapide basés sur la factorisation des incréments des matrices de covariance .

Dans cet article, nous allons nous intéresser, dans le cas d'une observation scalaire, à l'obtention d'algorithmes d'identification rapide, en utilisant cette technique de factorisation . Elle sera tout d'abord appliquée à l'algorithme de [R.E. KALMAN-1960]; nous retrouverons ainsi les résultats cités ci-dessus . Puis, appliquée aux algorithmes de réalisation stochastique de [P. FAURRE-1973] et de [C.A. BOZZO-1975], elle nous permettra d'obtenir une version rapide pour ces deux algorithmes . Enfin, en utilisant la notion de Forme Filtre Canonique [G. FAVIER-1977], nous déterminerons, par la même méthode, des algorithmes d'identification rapide pour les paramètres statistiques d'un modèle ARMA .

II - PRESENTATION DE DIFFERENTS MODELES

II.1. Pour le Processus

Considérons un processus scalaire $\{y(k)\}$, gaussien, discret, stationnaire et centré .

Le modèle d'état classique permettant de représenter ce processus est donné par les équations (1) :

$$(1)\begin{cases} x(k+1) = Fx(k) + \Gamma w(k) \\ y(k) = Hx(k) + v(k) \end{cases}$$

où

- $x(k)$ est le vecteur d'état, de dimension n
- $w(k)$ est le bruit de dynamique, de dimension m
- $v(k)$ est le bruit de mesure
- F est la matrice de dynamique, de dimension (nxn), supposée asymptotiquement stable
- H est la matrice de mesure, de dimension (1xn)

De plus :

$\{w(k)\}$ et $\{v(k)\}$ sont des séquences de bruits blancs gaussiens, supposées stationnaires et caractérisées par

$$E\{w(k)\} = E\{v(k)\} = 0 \quad \forall k$$

$$E\left\{\begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^T(i) & v^T(i) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}\delta(k-i)$$

avec :

$$\delta(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ 0 & \text{si } j \neq 0 \end{cases}$$

Enfin, l'état initial $x(o)$ est supposé normalement distribué :

$$E\{x(o)\} = 0$$
$$E\{x(o)x^T(o)\} = P(o) = P_o$$

et tel que :

$$E\{w(k)x^T(o)\} = E\{v(k)x^T(o)\} = 0 \quad \forall k$$

Définissons le prédicteur à un pas $\hat{x}(k)$ de $x(k)$; soit:

$$\hat{x}(k) = E\{x(k)/y(i),\ i\varepsilon[o,k-1]\}$$

Le filtre de [R.E. KALMAN-1960] nous permet de calculer $\hat{x}(k)$ à l'aide des équations suivantes :

$$(2)\begin{cases} \hat{x}(k+1) = F\hat{x}(k) + K(k)[y(k) - H\hat{x}(k)] \\ \hat{x}(o) = 0 \end{cases}$$

où :

$K(k)$, gain optimal de prédiction, est donné par :

$$(3)\ K(k) = [F\tilde{P}(k)H^T + \Gamma S][H\tilde{P}(k)H^T + R]^{-1}$$

et :

$\tilde{P}(k)$ est solution de l'équation du type RICCATI :

$$(4)\begin{cases} \tilde{P}(k+1) = F\tilde{P}(k)F^T + \Gamma Q\Gamma^T - K(k)[H\tilde{P}(k)H^T + R]K^T(k) \\ \tilde{P}(o) = P_o \end{cases}$$

$\tilde{P}(k)$ est la matrice de covariance de l'erreur de prédiction :

$$(5)\ \tilde{x}(k) = x(k) - \hat{x}(k)$$

Soit :

$$(6)\ \tilde{P}(k) = E\{\tilde{x}(k)\,\tilde{x}^T(k)\}$$

Par suite, $\tilde{P}(k)$ est une matrice symétrique, et l'équation de RICCATI (4) nécessite la résolution simultanée de $\frac{n(n+1)}{2}$ équations non linéaires .

ALGORITHMES DE FILTRAGE RAPIDE
APPLICATION A L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES
STATISTIQUES D'UN MODELE ARMA

Posons :

(7) $\tilde{y}(k) = y(k) - H\hat{x}(k)$

$\{\tilde{y}(k)\}$ est appelé processus d'innovation . C'est un bruit blanc gaussien .

En utilisant les équations (2) et (7), nous obtenons un nouveau modèle pour le processus $\{y(k)\}$, appelé la Forme Filtre [P.FAURRE-1973] associée au modèle (1) :

$$(8)\begin{cases}\hat{x}(k+1) = F\hat{x}(k) + K(k)\tilde{y}(k)\\ y(k) = H\hat{x}(k) + \tilde{y}(k)\end{cases}$$

La définition (5), associée aux modèles (1) et (8), nous donne l'équation de propagation de l'erreur de prédiction dans le filtre optimal :

(9) $\tilde{x}(k+1) = F\tilde{x}(k) + \Gamma w(k) - K(k)\tilde{y}(k)$

II.2. Pour un Pseudo-Processus d'Innovation

Définition : Etant donné un modèle erroné caractérisé par des covariances de bruit $(\underline{Q}, \underline{R}, \underline{S})$*, différentes des valeurs exactes (Q, R, S), on appelle filtre sous-optimal un modèle tel que :

$$(10)\begin{cases}\underline{\hat{x}}(k+1) = F\underline{\hat{x}}(k) + \underline{K}\underline{\tilde{y}}(k)\\ \underline{\tilde{y}}(k) = y(k) - H\underline{\hat{x}}(k)\end{cases}$$

où :

$\underline{K}$, gain sous-optimal en régime permanent, est obtenu par résolution des équations (3) et (4) en donnant aux covariances (Q, R, S) des valeurs approchées $(\underline{Q}, \underline{R}, \underline{S})$.

et :

$\{\underline{\tilde{y}}(k)\}$ est appelé pseudo-processus d'innovation. Ce pseudo-processus d'innovation peut être également défini à partir de la notion de filtre inverse sous-optimal [G.FAVIER-1977].

En définissant :

(11) $\sigma(k) = \hat{x}(k) - \underline{\hat{x}}(k)$

nous obtenons le modèle suivant pour le pseudo-processus d'innovation :

$$(12)\begin{cases}\sigma(k+1) = (F-\underline{K}H)\sigma(k) + [K(k)-\underline{K}]\,\tilde{y}(k)\\ \underline{\tilde{y}}(k) = H\sigma(k) + \tilde{y}(k)\end{cases}$$

III. EQUATIONS VERIFIEES PAR LES INCREMENTS DES MATRICES DE COVARIANCE

Définition des matrices de covariance : Nous définissons les matrices de covariance suivantes :

$$(13)\begin{cases}P(k) = E[x(k)x^T(k)]\\ \hat{P}(k) = E[\hat{x}(k)\hat{x}^T(k)]\\ \tilde{P}(k) = E[\tilde{x}(k)\tilde{x}^T(k)]\\ \Sigma(k) = E[\sigma(k)\sigma^T(k)]\end{cases}$$

et :

$$(14)\begin{cases}Y_o(k) = E[y(k)y^T(k)]\\ \underline{\tilde{Y}}_o(k) = E[\underline{\tilde{y}}(k)\underline{\tilde{y}}^T(k)]\\ \tilde{Y}_o(k) = E[\tilde{y}(k)\tilde{y}^T(k)]\end{cases}$$

Nous allons donner les équations vérifiées par ces différentes matrices de covariance .

Mais auparavant, l'hypothèse de stationnarité, faite au § II.1, nous permet d'écrire que l'équation de dynamique correspondant au modèle (1) a atteint son régime permanent ; à savoir que :

(15) $P(k) = \bar{P} \qquad \forall k \geq 0$

où $\bar{P}$ est la solution de l'équation de LYAPOUNOV discrète :

(16) $\bar{P} = F\bar{P}F^T + \Gamma Q\Gamma^T$

et, en particulier, nous avons :

(17) $P_o = FP_oF^T + \Gamma Q\Gamma^T$

A partir des équations (1), (8), (9) et (12), nous obtenons les équations de propagation des matrices de covariance ci-dessus définies .

(18) $P(k+1) = FP(k)F^T + \Gamma Q\Gamma^T$

$$(19)\begin{cases}\tilde{P}(k+1) = F\tilde{P}(k)F^T + \Gamma Q\Gamma^T - K(k)\tilde{Y}_o(k)K^T(k)\\ \tilde{P}(o) = P_o\end{cases}$$

$$(20)\begin{cases}\hat{P}(k+1) = F\hat{P}(k)F^T + K(k)\tilde{Y}_o(k)K^T(k)\\ \hat{P}(o) = 0\end{cases}$$

$$(21)\begin{cases}\Sigma(k+1) = (F-\underline{K}H)\Sigma(k)(F-\underline{K}H)^T + (K(k)-\underline{K})\tilde{Y}_o(k)(K(k)-\underline{K})^T\\ \Sigma(o) = 0\end{cases}$$

* La notation soulignée indique que les paramètres du modèle ne sont pas fixés avec leur valeur exacte, et par conséquent le filtre correspondant est sous-optimal.

Définition des incréments des matrices de covariance :

$$(22)\begin{cases}\delta\tilde{P}(k) = \tilde{P}(k+1) - \tilde{P}(k)\\ \delta\hat{P}(k) = \hat{P}(k+1) - \hat{P}(k)\\ \delta\Sigma(k) = \Sigma(k+1) - \Sigma(k)\end{cases}$$

Nous pouvons remarquer que, d'après l'hypothèse de stationnarité correspondant à l'égalité(15),nous avons:

(23) $\delta P(k) = P(k+1) - P(k) = 0$

D'autre part, d'après la définition (6) de $\tilde{P}(k)$, il est facile de vérifier que :

(24) $\tilde{P}(k) = P(k) - \hat{P}(k)$

et par suite :

(25) $\delta\tilde{P}(k) = \delta P(k) - \delta\hat{P}(k)$

Soit :

(26) $\delta\hat{P}(k) = -\delta\tilde{P}(k)$

Les équations (19), (20) et (21) nous donnent les équations suivantes pour les matrices d'écart $\delta P(k)$, $\delta\hat{P}(k)$ et $\delta\Sigma(k)$:

(27) $\delta\tilde{P}(k) = F\delta\tilde{P}(k-1)F^T - K(k)\tilde{Y}_o(k)K^T(k) + K(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)K^T(k-1)$

(28) $\delta\hat{P}(k) = F\delta\hat{P}(k-1)F^T + K(k)\tilde{Y}_o(k)K^T(k) - K(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)K^T(k-1)$

(29) $\delta\Sigma(k) = [F-\underline{K}H]\delta\Sigma(k-1)[F-\underline{K}H]^T + [K(k)-\underline{K}]\tilde{Y}_o(k)[K(k)-\underline{K}]^T$
$\qquad - [K(k-1)-\underline{K}]\tilde{Y}_o(k-1)[K(k-1)-\underline{K}]^T$

Calcul des valeurs initiales $\delta\tilde{P}_{(o)}$, $\delta\hat{P}_{(o)}$ et $\delta\Sigma_{(o)}$:

Par définition :

(30) $\delta\tilde{P}(o) = \tilde{P}(1) - \tilde{P}(o)$

$\delta\tilde{P}(o) = F\tilde{P}(o)F^T + \Gamma Q\Gamma^T - K(o)\tilde{Y}_o(o)K^T(o) - \tilde{P}(o)$

avec: $\tilde{P}(o) = P_o$

et,en utilisant l'égalité (17),nous pouvons en déduire que :

(31) $F\tilde{P}(o)F^T + \Gamma Q\Gamma^T - \tilde{P}(o) = 0$

D'où :

(32) $\delta\tilde{P}(o) = -K(o)\tilde{Y}_o(o)K^T(o)$

De même,en utilisant l'égalité (26), nous obtenons :

(33) $\delta\hat{P}(o) = K(o)\tilde{Y}_o(o)K^T(o)$

et enfin :

(34) $\delta\Sigma(o) = [K(o)-\underline{K}]\tilde{Y}_o(o)[K(o)-\underline{K}]^T$

IV. ALGORITHMES DE FILTRAGE RAPIDE

IV.1. Rappel sur les algorithmes de filtrage

Dans le cas où les paramètres statistiques (Q,R,S) sont connus, les équations de calcul du gain optimal sont celles données par [R.E. KALMAN-1960], à savoir les équations (3) et (4) .

Dans le cas où ces paramètres statistiques sont inconnus, le calcul du gain optimal peut être effectué à l'aide d'un algorithme de réalisation stochastique. Deux types d'algorithmes de réalisation stochastique sont à notre disposition : l'un utilisant la fonction d'autocorrélation du processus [P.FAURRE-1973], l'autre utilisant la fonction d'autocorrélation d'un pseudo-processus d'innovation [C.A.BOZZO-1975].

Nous rappelons brièvement (voir [G.FAVIER-1977]), dans le tableau 1, les résultats concernant ces trois algorithmes de calcul du gain optimal de prédiction, ainsi que les équations vérifiées par les matrices d'écart des matrices de covariance .

Notations : $\quad Y_i = E[y(k+i)y^T(k)]$
$\qquad\qquad \underline{\tilde{Y}}_i = E[\underline{\tilde{y}}(k+i)\underline{\tilde{y}}^T(k)]$

et $L^{\#}$ désigne une pseudo-inverse de la matrice L, dans le cas où M>n.

IV.2. Algorithme de filtrage rapide obtenu à partir de l'algorithme de KALMAN

Nous avons vu au §III que :

$\delta\tilde{P}(k) = F\delta\tilde{P}(k-1)F^T - K(k)\tilde{Y}_o(k)K^T(k) + K(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)K^T(k-1)$

avec la valeur initiale donnée par la relation(32) :

$\delta\tilde{P}(o) = -K(o)\tilde{Y}_o(o)K^T(o)$

Soit de la forme :

(35) $\delta\tilde{P}(o) = -\tilde{L}(o)Y_o(o)\tilde{L}^T(o)$

avec

$$(36)\begin{cases}\tilde{L}(o) = K(o)\\ \dim \tilde{L}(o) = (n\mathrm{x}1)\end{cases}$$

Nous allons montrer par récurrence que :

$$\begin{cases}\delta\tilde{P}(k) = -\tilde{L}(k)\tilde{Y}_o(k)\tilde{L}^T(k)\\ \dim \tilde{L}(k) = (n\mathrm{x}1) \qquad \forall k\end{cases}$$

Hypothèse de récurrence :

(38) $\begin{cases} \delta\tilde{P}(k-1) = -\tilde{L}(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)\tilde{L}^T(k-1) \\ \dim \tilde{L}(k-1) = (n\times 1) \end{cases}$

Exprimons tout d'abord les quantités $\tilde{Y}_o(k)$ et $K(k)$ en fonction de $\delta\tilde{P}(k-1)$:

(39) $\tilde{Y}_o(k) = R + H\tilde{P}(k)H^T$

et, d'après la définition de $\delta\tilde{P}(k-1)$:

(40) $\tilde{Y}_o(k) = R + H[\delta\tilde{P}(k-1) + \tilde{P}(k-1)]H^T$

Soit :

(41) $\tilde{Y}_o(k) = \tilde{Y}_o(k-1) + H\delta\tilde{P}(k-1)H^T$

D'autre part,

(42) $K(k) = [F\tilde{P}(k)H^T + \Gamma S]\tilde{Y}_o^{-1}(k)$

D'où :

(43) $K(k) = [K(k-1)\tilde{Y}_o(k-1) + F\delta\tilde{P}(k-1)H^T]\tilde{Y}_o^{-1}(k)$

En utilisant l'hypothèse de récurrence nous obtenons :

(44) $\tilde{Y}_o(k) = \tilde{Y}_o(k-1) - H\tilde{L}(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)\tilde{L}^T(k-1)H^T$

et, en remarquant que :

(45) $H\tilde{L}(k-1) = \tilde{L}^T(k-1)H^T$ (scalaire)

nous avons :

(46) $\tilde{Y}_o(k) = \{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}\tilde{Y}_o(k-1)$

et par suite, l'expression (43) du gain devient :

(47) $K(k) = \{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{K(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]F\tilde{L}(k-1)\}$

En utilisant les relations (38), (46) et (47), l'équation récurrente vérifiée par $\delta\tilde{P}(k)$ s'écrit :

(48) $\delta\tilde{P}(k) = -F\tilde{L}(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)\tilde{L}^T(k-1)F^T + K(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)K^T(k-1)$
$- \{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{K(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]F\tilde{L}(k-1)\}\tilde{Y}_o(k-1)\{K(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]F\tilde{L}(k-1)\}^T$

Soit :

(49) $\delta\tilde{P}(k) = -\{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{F\tilde{L}(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]K(k-1)\}\tilde{Y}_o(k-1)\{F\tilde{L}(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]K(k-1)\}^T$

D'où :

(50) $\delta\tilde{P}(k) = -\{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{F\tilde{L}(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]K(k-1)\}$
$\tilde{Y}_o(k)\ \{F\tilde{L}(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]K(k-1)\}^T\{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}$

$\delta\tilde{P}(k)$ est donc de la forme :

(51) $\delta\tilde{P}(k) = -\tilde{L}(k)\tilde{Y}_o(k)\tilde{L}^T(k)$

avec :

(52) $\begin{cases} \tilde{L}(k) = \{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{F\tilde{L}(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]\ K(k-1)\} \\ \dim \tilde{L}(k) = (n\times 1) \end{cases}$

Par suite, le calcul du gain optimal de prédiction $K(k)$ peut être effectué à l'aide des équations récurrentes suivantes :

(53) $\begin{cases} K(k) = \{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{K(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]F\tilde{L}(k-1)\} \\ \tilde{L}(k) = \{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{F\tilde{L}(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]K(k-1)\} \end{cases}$

Il est intéressant de noter qu'une écriture simplifiée peut être donnée à ces équations. En effet, d'après (52), nous avons :

(54) $\{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}F\tilde{L}(k-1) =$
$\tilde{L}(k) + \{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}[H\tilde{L}(k-1)]K(k-1)$

et, en reportant cette expression dans l'équation (47) nous obtenons l'algorithme de filtrage rapide suivant :

(55) $\begin{cases} \tilde{L}(k) = \{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{F\tilde{L}(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]K(k-1)\} \\ K(k) = K(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]\tilde{L}(k) \end{cases}$

avec les conditions initiales:

(56) $\begin{cases} K(o) = [FPoH^T + \Gamma S][HPoH^T + R]^{-1} \\ \tilde{L}(o) = K(o) \end{cases}$

De même, d'après (47) :

(54bis) $\{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}K(k-1) =$
$K(k) + \{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}[H\tilde{L}(k-1)]F\tilde{L}(k-1)$

et, en reportant cette expression dans l'équation (52), nous obtenons une autre écriture simplifiée des équations (53) :

(55bis) $\begin{cases} \tilde{L}(k) = F\tilde{L}(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]K(k) \\ K(k) = \{1-[H\tilde{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{K(k-1) - [H\tilde{L}(k-1)]F\tilde{L}(k-1)\} \end{cases}$

avec les mêmes conditions initiales que précédemment.

Cependant, nous devons remarquer que si les équations (53) permettent une réalisation en parallèle des calculs de $K(k)$ et $\tilde{L}(k)$, cela n'est plus le cas avec les équations (55) et (55bis) où le calcul de $K(k)$ nécessite le calcul préalable de $\tilde{L}(k)$ et réciproquement. Nous avons ainsi remplacé la résolution d'un système de : $\dfrac{n(n+1)}{2}$ équations non linéaires du type RICCATI par celle d'un système de $2n$ équations non linéaires couplées.

Il apparaît de manière évidente que, pour des valeurs de n assez grandes ($n \geqslant 4$), les algorithmes de filtrage rapide ainsi définis présentent des avantages numériques (nombre moindre d'équations non linéaires à résoudre) sur l'algorithme de filtrage classique de KALMAN.

Nous devons noter que cette méthode de factorisation de l'incrément $\delta\tilde{P}(k)$, utilisée par [M.MORF, G.S. SIDHU, T. KAILATH - 1974], dans le cas d'une sortie multidimensionnelle, nous a conduit ici, dans le cas d'une sortie scalaire, à des résultats identiques [équation(55)] à ceux obtenus par [LINDQUIST-1974 : équations (5.3) et (5.4)].

Dans le paragraphe suivant, nous allons procéder de la même façon par factorisation de la matrice d'écart $\delta\hat{P}(k)$ pour obtenir une "version rapide" de l'algorithme de réalisation stochastique de [P. FAURRE 1973].

IV.3. Algorithme de filtrage rapide obtenu à partir de l'algorithme de FAURRE.

Comme précédemment, nous allons montrer par récurrence que :

(57) $\begin{cases} \delta\hat{P}(k) = \hat{L}(k)\hat{Y}_o(k)\hat{L}^T(k) \\ \dim \hat{L}(k) = (n\times 1) \end{cases} \quad \forall k$

D'après l'égalité (33), nous avons :

$\delta\hat{P}(o) = K(o)\hat{Y}_o(o)K^T(o)$

D'où :

(58) $\hat{L}(o) = K(o)$

Hypothèse de récurrence :

(59) $\begin{cases} \delta\hat{P}(k-1) = \hat{L}(k-1)\hat{Y}_o(k-1)\hat{L}^T(k-1) \\ \dim \hat{L}(k-1) = (n\times 1) \end{cases}$

Déterminons tout d'abord les expressions de $\hat{Y}_o(k)$ et $K(k)$ en fonction de $\delta\hat{P}(k-1)$:

(60) $\hat{Y}_o(k) = Y_o - H\hat{P}(k)H^T$

Soit :

(61) $\hat{Y}_o(k) = \hat{Y}_o(k-1) - H\delta\hat{P}(k-1)H^T$

D'autre part, d'après le tableau 1, le calcul du gain optimal de prédiction, à l'aide de la fonction d'autocorrélation du processus, est donné par :

(62) $K(k) = [G - F\hat{P}(k)H^T]\hat{Y}_o^{-1}(k)$

D'où :

(63) $K(k) = [K(k-1)\hat{Y}_o(k-1) - F\delta\hat{P}(k-1)H^T]\hat{Y}_o^{-1}(k)$

Par suite, en utilisant l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :

(64) $\hat{Y}_o(k) = \{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\hat{Y}_o(k-1)$

et :

(65) $K(k) = \{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{K(k-1) - [H\hat{L}(k-1)]F\hat{L}(k-1)\}$

Ces relations (64) et (65) sont à rapprocher des relations (46) et (47) obtenues à l'aide de la factorisation de $\delta\tilde{P}(k)$. De plus, en remarquant que le passage de la relation (27) à la relation (28) peut être obtenu à l'aide de la transformation :

$\delta\tilde{P}(k) \rightarrow -\delta\hat{P}(k)$

il est alors facile de vérifier que :

$\delta\hat{P}(k) = \hat{L}(k)\hat{Y}_o(k)\hat{L}^T(k)$

avec :

(66) $\hat{L}(k) = \{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{F\hat{L}(k-1) - [H\hat{L}(k-1)]K(k-1)\}$

Par suite, la "version rapide" de l'algorithme de FAURRE est donnée par les équations suivantes :

(67) $\begin{cases} K(k) = \{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{K(k-1) - [H\hat{L}(k-1)]F\hat{L}(k-1)\} \\ \hat{L}(k) = \{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{F\hat{L}(k-1) - [H\hat{L}(k-1)]K(k-1)\} \end{cases}$

Ces équations sont à rapprocher des équations (53). De manière simplifiée, elles peuvent s'écrire encore :

(68) $\begin{cases} \hat{L}(k) = \{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{F\hat{L}(k-1) - [H\hat{L}(k-1)]K(k-1)\} \\ K(k) = K(k-1) - [H\hat{L}(k-1)]\hat{L}(k) \end{cases}$

avec les conditions initiales :

(69) $\begin{cases} K(o) = GY_o^{-1} \\ \hat{L}(o) = K(o) \end{cases}$

ou :

(68bis) $\begin{cases} \hat{L}(k) = F\hat{L}(k-1) - [H\hat{L}(k-1)]K(k) \\ K(k) = \{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{K(k-1) - [H\hat{L}(k-1)]F\hat{L}(k-1)\} \end{cases}$

Nous obtenons ainsi deux nouveaux algorithmes de filtrage rapide qui, en fait, ne se différencient des précédents que par les valeurs d'initialisation.

ALGORITHMES DE FILTRAGE RAPIDE
APPLICATION A L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES
STATISTIQUES D'UN MODELE ARMA

Ces algorithmes sont à rapprocher de celui de [G.RUCKEBUSCH-1975] .

IV.4. Algorithme de filtrage rapide obtenu à partir de l'algorithme de BOZZO.

Nous rappelons brièvement les relations [G. FAVIER-1977] permettant de passer de l'algorithme de FAURRE à celui de BOZZO :
$$\begin{cases} Y_i \rightarrow \underline{\tilde{Y}}_i \\ F \rightarrow F-\underline{K}H \end{cases}$$
Alors :
$$\begin{cases} G \rightarrow \underline{\tilde{G}} \\ K(k) \rightarrow \overline{K}(k)-\underline{K} \end{cases}$$
Nous pouvons en déduire de manière immédiate "la version rapide" de ce dernier algorithme.
En écrivant que la matrice d'écart $\delta\Sigma(k)$ peut être factorisée de telle sorte que :

(70) $$\delta\Sigma(k) = L(k)\tilde{Y}_o(k)L^T(k)$$

nous obtenons :

(71) $$\begin{cases} K(k)-\underline{K} = \{1-[HL(k-1)]^2\}^{-1}\{[K(k-1)-\underline{K}] - [HL(k-1)](F-\underline{K}H)L(k-1)\} \\ L(k) = \{1-[HL(k-1)]^2\}^{-1}\{[F-\underline{K}H]L(k-1) - [HL(k-1)][K(k-1)-\underline{K}]\} \end{cases}$$

Et de manière simplifiée :

(72) $$\begin{cases} L(k) = \{1-[HL(k-1)]^2\}^{-1}\{[F-\underline{K}H]L(k-1) - [HL(k-1)][K(k-1)-\underline{K}]\} \\ K(k)-\underline{K} = K(k-1)-\underline{K}-[HL(k-1)]L(k) \end{cases}$$

ou

(72bis) $$\begin{cases} L(k) = [F-\underline{K}H]L(k-1) - [HL(k-1)][K(k)-\underline{K}] \\ K(k)-\underline{K} = \{1-[HL(k-1)]^2\}^{-1}\{[K(k-1)-\underline{K}]-[HL(k-1)][F-\underline{K}H]L(k-1)\} \end{cases}$$

Ces équations peuvent encore s'écrire :

(73) $$\begin{cases} L(k) = \{1-[HL(k-1)]^2\}^{-1}\{FL(k-1)-[HL(k-1)]K(k-1)\} \\ K(k) = K(k-1)-[HL(k-1)]L(k) \end{cases}$$

et

(73bis) $$\begin{cases} L(k) = FL(k-1)-[HL(k-1)]K(k) \\ K(k) = \{1-[HL(k-1)]^2\}^{-1}\{K(k-1)-[HL(k-1)]FL(k-1)\} \end{cases}$$

avec les conditions initiales :

(74) $$\begin{cases} K(o) = \underline{K} + \underline{\tilde{G}}\,\underline{\tilde{Y}}_o^{-1} \\ L(o) = \underline{\tilde{G}}\,\underline{\tilde{Y}}_o^{-1} \end{cases}$$

Nous obtenons donc à nouveau les mêmes équations simplifiées pour les algorithmes de filtrage rapide que dans les deux cas précédents, les conditions initiales étant maintenant calculées à partir de la fonction d'autocorrélation d'un pseudo-processus d'innovation .
Cependant, les équations (72) et (72bis) faisant intervenir la matrice ($F-\underline{K}H$) au lieu de la matrice F, peuvent être intéressantes à utiliser dans le cas où le processus est proche de l'instabilité (valeurs propres de F de module voisin de 1).
Enfin, comme pour l'algorithme de BOZZO, cette "version rapide" présente la propriété d'adaptativité, à savoir la possibilité d'un rebouclage de l'algorithme avec le gain ainsi déterminé et cela jusqu'à la convergence . L'avantage pratique de cette propriété apparaît très nettement en simulation .
Nous donnons dans le tableau 2 un récapitulatif de ces algorithmes de filtrage rapide, en confondant les vecteurs $\tilde{L}(k)$ et $\hat{L}(k)$ en $L(k)$

Remarques :
- A la convergence de ces algorithmes, nous avons :
$$\begin{cases} K(k) \rightarrow K_{optimal} \\ L(k) \rightarrow 0 \end{cases}$$
- Ces trois versions rapides, correspondant respectivement aux algorithmes de KALMAN, de FAURRE et de BOZZO, ne se différencient que par leurs conditions initiales . Il est intéressant de noter que le calcul de ces valeurs initiales s'effectue à l'aide de (n+1) paramètres statistiques ($\{Y_i\}$ et $\{\underline{\tilde{Y}}_i\}$, $i\epsilon[o,n]$) dans le cas des algorithmes de réalisation stochastique, tandis que ce même calcul nécessite (2n+1) paramètres (P_oH^T, R, ΓS) dans la version rapide de l'algorithme de KALMAN . Ceci s'explique par le fait que la modélisation(1) n'est pas canonique, c'est-à-dire que le nombre de paramètres statistiques représentatifs d'une telle représentation n'est pas minimal (voir [G.FAVIER, G.SALUT-1979])

V. APPLICATION A L'IDENTIFICATION RAPIDE DES PARAMETRES STATISTIQUES D'UN MODELE ARMA

V.1. Rappels sur l'identification des paramètres d'un modèle ARMA

Comme nous l'avons vu précédemment, le problème de l'identification des systèmes linéaires stochastiques peut être traité à partir d'une représentation interne des processus .
Cependant, nombreux sont ceux qui, en traitement du signal aussi bien qu'en statistique ou en économie, utilisent les séries temporelles [G.E.P.BOX, G.M. JENKINS-1976], c'est-à-dire une représentation externe des processus à l'aide d'une équation récurrente permettant de relier l'entrée et la sortie du système .
De tels modèles sont généralement appelés ARMA (Autorégressifs à Moyenne Mobile) et se présentent sous la forme suivante :

(75) $$y(k)+a_{n-1}y(k-1)+\ldots+a_o y(k-n)=e(k)+C_{n-1}e(k-1)+\ldots+C_o\,e(k-n)$$

où : $\{e(k)\}$ est un bruit blanc de variance $\tilde{Y}_o$
$\{y(k)\}$ est le signal observé

Ces modèles sont caractérisés par
- n paramètres dynamiques $\{a_o,\ldots,a_{n-1}\}$
- (n+1) paramètres statistiques $\{C_o,\ldots,C_{n-1},\tilde{Y}_o\}$

L'article de [M.MORF, D.T. LEE, J.R. NICKOLLS, A. VIEIRA 1977] donne une classification détaillée des différentes méthodes d'identification de tels modèles .
Remarque : Si les coefficients C_i sont tous nuls, le modèle résultant est dit Autorégressif (AR) . Dans ce cas, deux types d'algorithmes permettent d'estimer les paramètres "a_i" :
- Soit de manière récursive vis-à-vis du temps à l'aide de l'algorithme des Moindres Carrés Récursifs
- Soit de manière non récursive vis-à-vis du temps, en faisant appel au calcul de la fonction d'autocorrélation du processus $\{y(k)\}$ et, par inversion d'une matrice de TOEPLITZ : Ce type d'algorithme est récursif vis-à-vis de l'ordre du modèle, et il est dû originellement à [N.LEVINSON-1947] ; [J.D. MARKEL, A.H. GRAY-1973] en ont donné une formulation utilisant la notion de produit interne .

Comme pour les modèles AR , l'identification des modèles ARMA peut être réalisée de deux manières différentes :
- Avec utilisation de "méthodes en ligne" : ce qui permet d'effectuer l'estimation des paramètres au fur et à mesure que le processus se développe, c'est à dire à l'aide d'un traitement séquentiel des observations . Parmi ces méthodes récursives vis à vis du temps, nous citerons plus particulièrement :
  * la méthode des Moindres Carrés
  * la méthode de la Variable Instrumentale
  * la méthode des MOindres Carrés Généralisés
  * la méthode des moindres Carrés Etendus
  * la méthode du Maximum de Vraisemblance

L'étude de ces différentes méthodes a fait l'objet de plusieurs articles dont ceux de [K.J.ÅSTRÖM, P.EYKHOFF-1971] et de [T.SÖDERSTRÖM, L.LJUNG, I. GUSTAVSSON-1974 et 1978] . Dans ces articles, le modèle utilisé est l'équation (75) dans laquelle est incorporé un terme de commande que nous omettrons ici . Il est à signaler également l'article de [C.A. DARMON-1977] qui donne une formulation de la méthode du Maximum de Vraisemblance dans l'espace d'état .

- Avec utilisation de "méthodes hors lignes" : dans ce cas, les données sont traitées par bloc et permettent d'effectuer l'estimation des paramètres à l'aide d'une fonction de corrélation .
De telles méthodes conduisent aux algorithmes dits de Réalisation Stochastique, et peuvent être décomposées en deux étapes :

* Une première étape, appelée également "problème de Réalisation Minimale" consiste à identifier la "partie Autorégressive" (AR) du modèle . Ce problème peut être résolu par inversion d'une matrice de HANKEL [W.GERSCH-1970].

* Une deuxième étape, appelée "problème de Factorisation Spectrale" consiste à identifier la "partie Moyenne MObile" (MA) du modèle . Plusieurs algorithmes de factorisation spectrale sont développés dans la thèse de [G.FAVIER-1977] . Ces algorithmes ont été obtenus à partir d'une Forme Filtre Canonique directement liée aux modèles ARMA, et déduite de la Forme Canonique des équations d'état de [G.SALUT-1976]

Cette forme filtre canonique s'écrit :

$$(76)\quad \begin{cases} \hat{x}(k+1) = J\hat{x}(k)+Ay(k)+B\tilde{y}(k) \\ y(k) = H\hat{x}(k)+\tilde{y}(k) \end{cases}$$

où $\{\tilde{y}(k)\}$ représente le Processus d'Innovation, de variance $\tilde{Y}_o$.

Avec :

$$(77)\quad J=\begin{bmatrix} o & \cdots & o \\ 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ o & \cdots 1 & o \end{bmatrix} \qquad A=\begin{bmatrix} -a_o \\ \\ -a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_o \\ \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$H=\begin{bmatrix} o \ldots o 1 \end{bmatrix}$$

Il est intéressant de noter que les paramètres "b_i" sont identiques aux paramètres "b_i" contenus dans l'équation (75) si, et seulement si, le système représenté par le modèle ARMA est à minimum de phase . Dans la suite, nous supposerons cette hypothèse vérifiée .

Nous rappelons maintenant brièvement l'algorithme de factorisation spectrale [G.FAVIER-1977], obtenu à partir de l'algorithme de [P.FAURRE-1973], et permettant d'estimer les paramères "b_i" .

1/ Estimation expérimentale de (n+1) points de la fonction d'autocorrélation $\{Y_i\}$, à l'aide de l'estimateur ergodique :

$$(78)\quad Y_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-i} y(k+i)y(k)$$

où N représente le nombre total d'observations traitées .

2/ Calcul du vecteur G :

$$(79)\quad G=\begin{bmatrix} Y_n \\ \vdots \\ Y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_o & \cdots & Y_{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ o & \cdots & Y_o \end{bmatrix} A$$

3/ Résolution du système d'équations récurrentes du type RICCATI :

$$(80)\quad \begin{cases} \tilde{Y}_o(k) = Y_o-H\hat{P}(k)H^T \\ B_{(k)} = (G-J\hat{P}_{(k)}H^T)\tilde{Y}_o^{-1}(k) \\ \hat{P}_{(k+1)} = J\hat{P}_{(k)}J^T+GA^T+AG^T+AY_oA^T+B_{(k)}\tilde{Y}_o(k)B^T_{(k)} \end{cases}$$

avec $\hat{P}(o) = 0$

L'estimation des paramètres "b_i" est obtenue à partir de la solution d'équilibre $\hat{P}_{(\infty)}$ des équations précédentes :

$$(81)\quad \begin{cases} B = (G-J\hat{P}_\infty H^T)(Y_o-H\hat{P}_\infty H^T)^{-1} \\ \tilde{Y}_o = Y_o-H\hat{P}_\infty H^T \end{cases}$$

V.2. Algorithmes d'identification rapide des paramètres statistiques d'un modèle ARMA :

Nous allons appliquer les résultats du paragraphe IV.3 à l'algorithme rappelé ci-dessus . D'après les équations (80), la matrice d'écart $\delta\hat{P}(k)$ vérifie l'équation récurrente suivante :

$$(82)\quad \delta\hat{P}(k)=J\delta\hat{P}(k-1)J^T+B(k)\tilde{Y}_o(k)B^T(k) -B(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)B^T(k-1)$$

D'autre part, nous avons :

$$(83)\quad \tilde{Y}_o(k) = \tilde{Y}_o(k-1)-H\delta\hat{P}(k-1)H^T$$

et

$$(84)\quad B(k) = \left[B(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)-J\delta\hat{P}(k-1)H^T\right]\tilde{Y}_o^{-1}(k)$$

Ces équations (82), (83) et (84) sont à rapprocher des équations (28), (61) et (63), le passage de celles-ci aux premières pouvant être obtenu à l'aide de la transformation :

$$(85)\quad \begin{cases} F \longrightarrow J \\ K(k) \longrightarrow B(k) \end{cases}$$

Par suite, l'algorithme d'identification rapide des paramètres statistiques B découle de manière immédiate des équations (67) . Soit :

$$(86)\quad \begin{cases} \hat{L}(k)=\{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{J\hat{L}(k-1)-[H\hat{L}(k-1)]B(k-1)\} \\ B(k)=\{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{B(k-1)-[H\hat{L}(k-1)]J\hat{L}(k-1)\} \end{cases}$$

ou, de manière simplifiée, à partir des équations (68) et (68bis) :

$$(87)\quad \begin{cases} \hat{L}(k) = \{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{J\hat{L}(k-1)-[H\hat{L}(k-1)]B(k-1)\} \\ B(k) = B(k-1) -[H\hat{L}(k-1)]\hat{L}(k) \end{cases}$$

et

$$(87bis)\quad \begin{cases} \hat{L}(k) = J\hat{L}(k-1)-[H\hat{L}(k-1)]B(k) \\ B(k) =\{1-[H\hat{L}(k-1)]^2\}^{-1}\{B(k-1)-[H\hat{L}(k-1)]J\hat{L}(k-1)\} \end{cases}$$

Calculons les conditions initiales B(o) et L(o) .

Par définition :

$$(88)\quad \delta\hat{P}(o) = \hat{P}(1) - \hat{P}(o)$$

avec $\hat{P}(o) = 0$

D'après les équations (80), nous avons :

$$(89)\quad \begin{cases} \tilde{Y}_o(o) = Y_o \\ B(o) = GY_o^{-1} \\ \delta\hat{P}(o) = GA^T+AG^T+AY_oA^T+B(o)\tilde{Y}_o(o)B^T(o) \end{cases}$$

Donc :

$$(90)\quad \delta\hat{P}(o) = (A+GY_o^{-1})\ Y_o\ (A+GY_o^{-1})^T$$

Nous en déduisons les conditions initiales suivantes :

$$(91)\quad \begin{cases} B(o) = GY_o^{-1} \\ \hat{L}(o) = A+GY_o^{-1} \end{cases}$$

D'autre part, étant donné la structure particulière des matrices H et J définies par les relations (77), nous pouvons développer de manière simple les équations (87) et (87bis) .

Soient $\hat{L}_i(k)$ et $K_i(k)$ la $i^{ème}$ composante des vecteurs $\hat{L}(k)$ et $K(k)$; nous avons :

$$(92)\quad H\hat{L}(k-1) = \hat{L}_n(k-1)$$

et

$$(93)\quad J\hat{L}(k-1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{L}_1(k-1) \\ \vdots \\ \hat{L}_{n-1}(k-1) \end{bmatrix}$$

Nous en déduisons l'écriture scalaire des équations (87) et (87bis) :

$$(94)\quad \begin{cases} \hat{L}_i(k)=\dfrac{[1-\delta(i-1)]\hat{L}_{i-1}(k-1)-\hat{L}_n(k-1)B_i(k-1)}{1-[\hat{L}_n(k-1)]^2} \\ B_i(k)= B_i(k-1)-\hat{L}_n(k-1)\hat{L}_i(k) \qquad \forall i\varepsilon[1,n] \end{cases}$$

et

$$(94bis)\quad \begin{cases} \hat{L}_i(k)= [1-\delta(i-1)]\hat{L}_{i-1}(k-1)-\hat{L}_n(k-1)B_i(k) \\ B_i(k)= \dfrac{B_i(k-1)-\hat{L}_n(k-1)\hat{L}_i(k-1)}{1-[\hat{L}_n(k-1)]^2} \qquad \forall i\varepsilon[1,n] \end{cases}$$

Remarque :

Comme pour la "version rapide" de l'algorithme de BOZZO, définie au paragraphe IV.4, les deux algorithmes utilisant la fonction d'autocorrélation d'un pseudo-processus d'innovation possèdent la propriété d'adaptativité .

V. CONCLUSION

L'étude envisagée dans cet article nous a permis de mettre en évidence "des versions rapides" pour les algorithmes de réalisation stochastique de FAURRE et de BOZZO . L'application de ces résultats à une Forme Filtre Canonique nous a conduit à l'obtention de nouveaux algorithmes d'identification rapide pour les paramètres statistiques d'un modèle ARMA . Ces algorithmes qui, comme nous l'avons vu, ne diffèrent entre eux que par leurs valeurs d'initialisation, sont d'une simplicité remarquable et par conséquent leur mise en oeuvre d'une grande facilité. Ceci nous laisse augurer d'une large application pour l'identification des modèles ARMA .

REFERENCES

[A. ANDREWS-1968]: "A square-root formulation of the Kalman Covariance equations".AIAA J. vol.6, n°6,pp.1165-1166. June 1968

[R.H.BATTIN-1964] :"Astronautical Guidance" pp.338-339 McGraw-Hill, New-York. 1964

[J.F. BELLANTONI, K.W. DODGE-1967] :"A square root formulation of the Kalman-Schmidt filter". AIAA J.vol.5,n°7,pp.1309-1314 July 1967 .

[G.J. BIERMAN-1977] :"Factorization methods for discrete sequential estimation" Academic Press 1977

[G.E.P. BOX, G.M. JENKINS-1976] :"Time Series Analysis: Forecasting and Control". Holden-Day Series in Time Series Analysis. Revised Edition . 1976.

[C.A.BOZZO-1975] :"A discrete suboptimal adaptive estimation scheme for linear systems with unknown plant and measurement noise covariances" Proc.of the 6th IFAC World Congress, Boston. 1975.

[S. CHANDRASEKHAR-1947-48] :"On the radiative equilibrium of a stellar atmosphere".Pt XXI, Astrophys.J., vol.106, pp.152-216. 1947 . PtXXII, ibid, vol.107, pp.48-72. 1948.

[C.A. DARMON-1977] :"Deux méthodes d'estimation, identification de systèmes linéaires bruités multidimensionnels". Revue du CETHEDEC, 4°trimestre 1976 .

[P. DYER, S. McREYNOLDS-1969] :"Extension of square root filtering to include process noise". Journal of Optimization Theory and Applications, vol.3, n°6, pp.444-458. 1969.

[P. FAURRE-1973] :"Réalisations markoviennes de processus stationnaires" . Rapport LABORIA n°13, IRIA, 78 Rocquencourt . Mars 1973 .

[G. FAVIER-1977]:"Identification d'une représentation gaussienne markovienne . Algorithmes de réalisation stochastique". Thèse de Docteur-Ingénieur, Nice, Juin 1977 .

[G. FAVIER-1977] :"Identification d'une représentation gaussienne markovienne minimale à l'aide d'algorithmes de réalisation stochastique " Revue du CETHEDEC, n°51, pp.13-42, 1977.

[G. FAVIER, G. SALUT-1979] :"Factorisation spectrale et équation de Riccati" . Septième Colloque sur le Traitement du Signal et ses Applications . Nice 1979 .

[W. GERSCH-1970] :"Estimation of the Autoregressive Parameters of a Mixed Autoregressive Moving Average Time Series". I.E.E.E.Tr. on Automatic Control. pp.583-588. October 1970 .

[T. KAILATH-1973] :"Some new algorithms for recursive estimation in constant linear systems" . I.E.E.E. Tr., vol.IT-19, n°6,pp.750-760, November 1973 .

[T. KAILATH-1974] :"A view of three decades of linear filtering theory". I.E.E.E.Tr.,vol. IT-20, n°2 pp.146-180, March 1974 .

[R.E. KALMAN-1960]: "A new approach to linear filtering and prediction problems". Trans.of ASME, Jnl of Basic Engineering,vol.82D,pp.35-44.March 1960.

[R.E. KALMAN, R.S. BUCY-1961]:"New results in linear filtering and prediction theory"Trans of ASME Jnl of Basic Engineering,vol.83D,pp.95-108, March 1961

[P.G. KAMINSKI, A.E. BRYSON, S.F. SCHMIDT-1971]:"Discrete square-root filtering. A survey of current techniques". IEEE Tr.,vol.AC.16,n°6, pp.727-735. December 1971

[N. LEVINSON-1947] :"The Wiener RMS (Root Mean Square) error criterion in filter design and prediction Jnl.Math.Phys., vol.25, n°4, pp. 261-278, 1947.

[A. LINDQUIST-1974] :"A new algorithm for optimal filtering of discrete-time stationary processes" SIAM J.Control,vol.12, n°4, pp.736-746 .November 1974 .

[J.D. MARKEL, A.H. GRAY-1973] :"On autocorrelation equations as applied to speech analysis"IEEE Tr., vol.AU-21, n°2, pp.69-79 . April 1973.

[M. MORF, G.S. SIDHU, T.KAILATH-1974] :"Some new algorithms for recursive estimation in constant linear, discrete-time systems".I.E.E.E. Tr. vol. AC-19, n°4, pp. 315-323, August 1974 .

[M. MORF, T. KAILATH-1975] :"Square-root algorithms for least squares estimation" . I.E.E.E. Tr. vol. AC-20, n°4, pp.487-497. August 1975 .

[M. MORF, D.T. LEE, J.R. NICKOLLS, A. VIEIRA-1977] : "A classification of algorithms for ARMA models and ladder realizations". Proceedings 1977 Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Processing, Hartford, CT , pp.13-19 . 1977 .

[G. RUCKEBUSCH-1975] :"Représentations markoviennes de processus gaussiens stationnaires" . Thèse de 3ème Cycle . Université de Paris VI, 1975 .

[G. SALUT-1976] :"Identification optimale des systèmes linéaires stochastiques". Thèse de Doctorat d'Etat . Université P.Sabatier . Toulouse, 1976.

[T. SÖDERSTRÖM, L. LJUNG, I. GUSTAVSSON-1974] :"A comparative study of recursive identification methods". Report 7427 . Lund Institute of Technology.Department of Automatic Control . LUND. SWEDEN. December 1974 .

[T. SÖDERSTRÖM, L.LJUNG, I.GUSTAVSSON-1978] :"A theoretical analysis of recursive identification methods". Automatica, vol.14, pp.231-244. 1978

[N.WIENER-1949] :"Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering applications" New-York . Technology Press and Wiley . 1949 .

[K.J. ÅSTRÖM,P. EYKHOFF-1971] :"System Identification -A Survey".Automatica,vol.7,pp.123-162.1971.

Calculs \ Algorithmes	KALMAN	FAURRE	BOZZO
Initialisation	$\tilde{P}(o) = P_o$	$\hat{P}(o) = 0$	$\Sigma(o) = 0$
Calculs Préliminaires	Néant	$G = L^{\#} \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_M \end{bmatrix}$ $L = \begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ HF^{M-1} \end{bmatrix}$	$\underline{\tilde{G}} = D^{\#} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{Y}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\tilde{Y}}_M \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ H(F-\underline{K}H)^{M-1} \end{bmatrix}$
Calcul de $\tilde{Y}_o(k)$	$\tilde{Y}_o(k) = R+H\tilde{P}(k)H^T$	$\tilde{Y}_o(k) = Y_o-H\hat{P}(k)H^T$	$\tilde{Y}_o(k) = \underline{\tilde{Y}}_o-H\Sigma(k)H^T$
Calcul du gain K(k)	$K(k) = \left[F\tilde{P}(k)H^T+\Gamma S\right]\tilde{Y}_o^{-1}(k)$	$K(k) = \left[G-F\hat{P}(k)H^T\right]\tilde{Y}_o^{-1}(k)$	$K(k)-\underline{K} = \left[\underline{\tilde{G}}-(F-\underline{K}H)\Sigma(k)H^T\right]\tilde{Y}_o^{-1}(k)$
Equations du type RICCATI	$\tilde{P}(k+1)=F\tilde{P}(k)F^T+\Gamma Q\Gamma^T$ $- K(k)\tilde{Y}_o(k)K^T(k)$	$\hat{P}(k+1) = F\hat{P}(k)F^T$ $+ K(k)\tilde{Y}_o(k)K^T(k)$	$\Sigma(k+1) = \left[F-\underline{K}H\right]\Sigma(k)\left[F-\underline{K}H\right]^T$ $+\left[K(k)-\underline{K}\right]\tilde{Y}_o(k)\left[K(k)-\underline{K}\right]^T$
Equations vérifiées par les incréments des covariances	$\delta\tilde{P}(k) = F\delta\tilde{P}(k-1)F^T$ $-K(k)\tilde{Y}_o(k)K^T(k)$ $+ K(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)K^T(k-1)$	$\delta\hat{P}(k) = F\delta\hat{P}(k-1)F^T$ $+ K(k)\tilde{Y}_o(k)K^T(k)$ $-K(k-1)\tilde{Y}_o(k-1)K^T(k-1)$	$\delta\Sigma(k) = \left[F-\underline{K}H\right]\delta\Sigma(k-1)\left[F-\underline{K}H\right]^T$ $+\left[K(k)-\underline{K}\right]\tilde{Y}_o(k)\left[K(k)-\underline{K}\right]^T$ $-\left[K(k-1)-\underline{K}\right]\tilde{Y}_o(k-1)$ $\left[K(k-1)-\underline{K}\right]^T$
Initialisation	$\delta\tilde{P}(o) = -K(o)\tilde{Y}_o(o)K^T(o)$	$\delta\hat{P}(o)=K(o)\tilde{Y}_o(o)K^T(o)$	$\delta\Sigma(o) = \left[K(o)-\underline{K}\right]\tilde{Y}_o(o)\left[K(o)-\underline{K}\right]^T$

TABLEAU 1

Algorithmes de calcul du gain optimal de KALMAN

ALGORITHMES DE FILTRAGE RAPIDE
APPLICATION A L'IDENTIFICATION DES PARAMETRES STATISTIQUES D'UN MODELE ARMA

Calculs \ Version rapide des algorithmes de	KALMAN	FAURRE	BOZZO
Calculs préliminaires	Néant	$G = L^{-1}\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}$ $L = \begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ HF^{n-1} \end{bmatrix}$	$\underline{\tilde{G}} = D^{-1}\begin{bmatrix} \underline{\tilde{Y}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\tilde{Y}}_n \end{bmatrix}$ $D = \begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ H(F-\underline{K}H)^{n-1} \end{bmatrix}$
Conditions Initiales	$K_{(o)} = (FP_oH^T + \Gamma S)(HP_oH^T + R)^{-1}$ $L(o) = K(o)$	$K(o) = GY_o^{-1}$ $L(o) = K(o)$	$K(o) = \underline{K} + \underline{\tilde{G}}\,\underline{\tilde{Y}}_o^{-1}$ $L(o) = \underline{\tilde{G}}\,\underline{\tilde{Y}}_o^{-1}$
Equations des algorithmes de filtrage rapide	$\begin{cases} L(k) = \{1-[HL(k-1)]^2\}^{-1}\{FL(k-1)-[HL(k-1)]K(k-1)\} \\ K(k) = K(k-1)-[HL(k-1)]L(k) \end{cases}$ ou $\begin{cases} L(k) = FL(k-1)-[HL(k-1)]K(k) \\ K(k) = \{1-[HL(k-1)]^2\}^{-1}\{K(k-1)-[HL(k-1)]FL(k-1)\} \end{cases}$		

<u>TABLEAU 2</u>

Calcul du gain optimal de KALMAN à l'aide d'un algorithme de filtrage rapide

Calculs \ Algorithmes	Utilisation de la fonction d'autocorrélation du processus		Utilisation de la fonction d'autocorrélation d'un pseudo-processus d'innovation	
Calculs Préliminaires	$G = \begin{bmatrix} Y_n \\ \vdots \\ Y_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_o & \cdots & Y_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & Y_o \end{bmatrix} A$	$G_1 = \Lambda^{\#}\begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_M \end{bmatrix}$ $\Lambda = \begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ H(J+AH)^{M-1} \end{bmatrix}$ $(M \geqslant n)$	$\underline{\tilde{G}}_1 = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{Y}}_n \\ \vdots \\ \underline{\tilde{Y}}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\tilde{Y}}_o & \cdots & \underline{\tilde{Y}}_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \underline{\tilde{Y}}_o \end{bmatrix} \underline{B}$	$\underline{\tilde{G}} = \Delta^{\#}\begin{bmatrix} \underline{\tilde{Y}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\tilde{Y}}_M \end{bmatrix}$ $\Delta = \begin{bmatrix} H \\ \vdots \\ H(J-\underline{B}H)^{M-1} \end{bmatrix}$ $(M \geqslant n)$
Conditions initiales	$B(o) = GY_o^{-1}$ $L(o) = A + GY_o^{-1}$	$B(o) = G_1Y_o^{-1} - A$ $L(o) = G_1Y_o^{-1}$	$B(o) = \underline{\tilde{G}}_1\underline{\tilde{Y}}_o^{-1}$ $L(o) = \underline{\tilde{G}}_1\underline{\tilde{Y}}_o^{-1} - \underline{B}$	$B(o) = \underline{\tilde{G}}\underline{\tilde{Y}}_o^{-1} + \underline{B}$ $L(o) = \underline{\tilde{G}}\underline{\tilde{Y}}_o^{-1}$
Equations des algorithmes d'identification rapide .	$\begin{cases} L_i(k) = \dfrac{[1-\delta(i-1)]L_{i-1}(k-1) - L_n(k-1)B_i(k-1)}{1-[L_n(k-1)]^2} \\ B_i(k) = B_i(k-1) - L_n(k-1)L_i(k) \end{cases}$ ou $\begin{cases} L_i(k) = [1-\delta(i-1)]L_{i-1}(k-1) - L_n(k-1)B_i(k) \\ B_i(k) = \dfrac{B_i(k-1) - L_n(k-1)L_i(k-1)}{1-[L_n(k-1)]^2}, \end{cases}$			

<u>TABLEAU 3</u>

Algorithmes d'identification rapide des paramètres statistiques d'un modèle ARMA