

SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

Sur la stabilité et le régime transitoire de systèmes à discontinuités périodiques considérés comme déferlants.
About the stability and the transient rate of systems with periodic discontinuities considered as deferlant.

B. ROSSETTO

UNIVERSITE DE TOULON ET DU VAR - 83130 LA GARDE

RESUME

L'évolution des systèmes que nous étudions est décrite par une équation différentielle linéaire dont les coefficients sont des fonctions périodiques et continues par intervalles. L'introduction de frontières aux points de discontinuité conduit à une représentation tout à fait analogue à celle qui est employée pour les systèmes déferlants. L'utilisation des méthodes topologiques développées à propos de ces derniers peut dès lors être envisagée pour l'étude de la stabilité et du régime transitoire de tels systèmes, comme on le montre sur un exemple du second ordre dont le coefficient est une fonction périodique en escalier.

SUMMARY

The evolution of systems we discuss here is described by a linear differential equation the coefficients of which are periodic and piecewise continuous functions. The introduction of frontiers at the breakpoints leads to a representation very analogous to that which is used for the deferlant systems. We can then utilise the topological methods developed about them in order to discuss the stability and the transient rate of these systems, as we show with a 2nd order example the coefficient of which is a piecewise constant function.

C'est grâce à l'aide et aux encouragements de

M. G. PETIAU,

Directeur de Recherches au C.N.R.S.

que nous avons entrepris ce travail. Nous souhaiterions qu'il soit un hommage, modeste mais sincère, à la mémoire de M. Th. VOGEL.



Sur la stabilité et le régime transitoire de systèmes à discontinuités périodiques considérés comme déferlants.
About the stability and the transient rate of systems with periodic discontinuities considered as deferlant.

Les systèmes *déferlants*, introduits par Th. VOGEL (⁽¹⁾ à ⁽⁴⁾), se caractérisent par leur mémoire discontinue. Leur état dépend d'une suite discrète de points mémorables sur la demi-trajectoire dans le passé. Le lieu de ces points, définis par leurs *affixes*, est la *frontière*. En général, l'ensemble des points mémorables n'est pas partout rare et la frontière forme une multiplicité compacte d'ordre $n-1$, (n étant l'ordre du système) mais ce n'est pas une condition nécessaire. On a ainsi un mouvement alterné, décrit par une suite d'arcs de trajectoire se raccordant sur la frontière. Les oscillateurs à relaxation sont essentiellement déferlants, mais aussi certains systèmes séquentiels, à basculements, seuils, collisions, désintégration ..., dont l'étude par des procédés classiques nécessiterait des passages à la limite délicats et pour lesquels il est plus avantageux d'utiliser la topologie des systèmes déferlants.

Nous nous intéressons à des systèmes *T-périodiques* dont la période, réelle, se subdivise en un nombre fini m d'intervalles $]\tau_{i-1}, \tau_i[$, $1 \leq i \leq m$, tous de mesure non nulle. A l'intérieur de chacun d'eux, l'opérateur différentiel linéaire O_i , qui décrit l'évolution du système, prend une forme différente O_i (variation discontinue de paramètres). Plus précisément, si $\underline{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ désigne le vecteur d'état:

$$(1) \quad \forall t \in]\tau_{i-1}, \tau_i[: O_i \{ \underline{x}_i(t) \} = 0$$

avec les conditions de transition

$$S_i [\underline{x}_i(\tau_i)_-, \underline{x}_{i+1}(\tau_i)_+] = 0$$

Ces systèmes ne sont pas déferlants (comme nous le verrons ce n'est pas une hypothèse restrictive et ils peuvent l'être) mais c'est leur caractère périodique que nous exploitons ici de manière à utiliser la méthode topologique établie à propos des systèmes déferlants.

Nous exposons en première partie les éléments de la méthode que nous utilisons. Nous développons ensuite le cas des systèmes du second ordre. A titre d'exemple, nous appliquons cette représentation à l'étude de la stabilité et du régime transitoire de l'oscillateur modulé en fréquence par une fonction constante par morceaux.

I - REPRESENTATION DE L'EVOLUTION DE SYSTEMES A DISCONTINUITES PERIODIQUES.

Nous décrivons le mode de représentation adopté, inspiré de celui des systèmes déferlants. Nous le précisons, et nous le comparons à ce dernier, dans \mathbb{R}^2 pour des systèmes d'ordre 2 ou 3, et dans \mathbb{R}^3 .

11. Système d'ordre n . Frontières dans \mathbb{R}^n .

Nous avons posé le problème qui fait l'objet de notre propos (1). A l'intérieur de chaque intervalle $]\tau_{i-1}, \tau_i[$ où agit l'opérateur O_i , le système décrit un arc emprunté à une trajectoire (R_i) caractérisée par une fonction R_i de $\underline{x}_i(t)$ et n constantes $\underline{x}_i(\tau_{i-1})$:

$$(R_i) \quad R_i [\underline{x}_i(\tau_i), \underline{x}_i(\tau_{i-1})] = 0$$

Nous introduisons la *frontière* $(F_i)_+$, $(F_i)_-$ définie, à chaque limite d'intervalle $(\tau_i)_+$, $(\tau_i)_-$, $1 \leq i \leq m$, par le lieu dans \mathbb{R}^n des affixes $\underline{x}(\tau_i)_+$, $\underline{x}(\tau_i)_-$. Elle a, en général, pour dimension $n-1$, et elle dépend non seulement des paramètres du système, mais aussi des conditions initiales $\underline{x}(0)$ (contrairement aux systèmes déferlants).

Ainsi le point représentatif du système décrit dans \mathbb{R}^n pendant toute la durée $]\tau_{i-1}, \tau_i[$ une courbe (R_i) , puis il vient *déferler* sur $(F_i)_-$. Dans le cas le plus général, les conditions de transition (1) amènent le point figuratif sur une frontière différente $(F_i)_+$ déterminée par une expression de la forme

$$(S_i) \quad S_i [\underline{x}(\tau_i)_- = \underline{x}_i(\tau_i), \\ \underline{x}_i(\tau_i)_+ = \underline{x}_{i+1}(\tau_i)_+] = 0$$

Les (S_i) tiennent compte des discontinuités (basculements, par exemple) qui surviennent aux dates $t = \tau_i$. On peut les représenter, sur ce support temporel de mesure nulle, par des distributions tempérées qui dépendent de l'état du système, c'est-à-dire de $\underline{x}(\tau_i)_-$. Il n'est pas indispensable de préciser la distribution (S_i) pour pouvoir continuer à décrire le système durant l'intervalle de temps ultérieur, et il suffit de savoir déterminer $\underline{x}(\tau_i)_+$ à partir de $\underline{x}(\tau_i)_-$.

Sur la stabilité et le régime transitoire de systèmes à discontinuités périodiques considérés comme déferlants.
 About the stability and the transient rate of systems with periodic discontinuities considered as deferlant.

12. Systèmes du second ordre. Transformations topologiques dans \mathbb{R}^2 .

Prenons à titre d'exemple, le cas d'un problème à deux phases, avec $\underline{x}(\tau_i)$ continu, $\forall i = 1, 2$. Sur la Fig.1, où l'évolution d'un tel système est schématisée dans le plan (x_1, x_2) , on pourra noter deux différences essentielles par rapport aux systèmes déferlants :

- 1) le point représentatif de l'affixe peut franchir plusieurs fois la frontière avant son changement de phase, qui n'a lieu que pour $t = \tau_i$. C'est le cas notamment pour un régime oscillatoire.
- 2) la notion d'arc de frontière attractif ou répulsif ne joue aucun rôle ici.

Faisons la transformation topologique
 $(R_i) \quad R_i(x_1, x_2) = r_{i\ell} = \zeta_i, \quad i = 1, 2$
 où $r_{i\ell}$ désigne une intégrale première de l'équation différentielle (1), sur l'intervalle $]\ell T + \tau_{i-1}, \ell T + \tau_i[$. Le mouvement est décrit dans (ζ_1, ζ_2) par une succession de segments parallèles aux axes, se raccordant sur (\bar{F}_i) , les transformées des (F_i) .

Il est important de connaître l'allure des (\bar{F}_i) pour étudier la stabilité et le régime transitoire de tels systèmes.

La CN d'existence d'une solution périodique à 2 ou 4 phases est la présence de points d'intersection
 (2) $P = (\bar{F}_1) \cap (\bar{F}_2)$. On a une telle solution quelles que soient les conditions initiales si (\bar{F}_1) et (\bar{F}_2) sont confondues (Fig.3).

Nous aurons une solution périodique à plusieurs phases ou presque-périodique (selon les conditions initiales) si et seulement si l'une des frontières est une courbe fermée dans (ζ_1, ζ_2) (Fig.6 a, b, c).

L'affixe tend asymptotiquement vers zéro (ou vers l'infini, selon les conditions initiales) si et seulement si les deux frontières présentent des branches infinies (Fig.4a, 4b et 5b).

13. Systèmes d'ordre 3. Représentation dans \mathbb{R}^3 .

La méthode exposée ci-dessus s'étend aux systèmes d'ordre 3 où les frontières sont des surfaces.

II - APPLICATION A UN SYSTEME D'ORDRE 2.

Les frontières des systèmes linéaires périodiques d'ordre 2 à m phases sont des droites ou des coniques. Nous étudions l'oscillateur modulé en fréquence par une fonction continue par morceaux et plus particulièrement le cas à deux phases.

21. Système différentiel d'ordre 2 à m phases.

Soit le système différentiel d'ordre 2 à m phases

$$(5) \quad \underline{x}'(t) + \underline{A}_i \underline{x}(t) = 0$$

où $\underline{A}_i :]\tau_{i-1}, \tau_i[\rightarrow \mathbb{R}^4, \underline{A}_i = \text{cte}, 1 \leq i \leq m$.

Nous postulons la continuité de $\underline{x}(t)$ aux points $t = \tau_i, 1 < i < m$, et nous supposons que les valeurs propres des \underline{A}_i sont imaginaires, soit $j\omega_i$ et $-j\omega_i$ (la forme des expressions ci-dessous reste inchangée dans le cas général). Si λ désigne l'exposant caractéristique ($\exp \pm \lambda T$ sont les valeurs propres de la matrice de monodromie \underline{C}) l'application du théorème de LIAPOUNOV à la solution y telle que

$$(6) \quad \begin{aligned} |M| > 1, \lambda \text{ réel}, \lambda = \mu : \\ y(0) = A \operatorname{ch} \varphi, \quad y'(0) = A \mu \operatorname{sh} \varphi \\ |M| < 1, \lambda \text{ imaginaire}, \lambda = j\mu : \\ y(0) = A \cos \varphi, \quad y'(0) = A \mu \sin \varphi, \end{aligned}$$

permet d'écrire

$$(7) \quad \begin{aligned} \lambda \text{ réel} : y(\ell T) &= A \operatorname{ch}(\mu \ell T + \varphi), \\ y'(\ell T) &= A \mu \operatorname{sh}(\mu \ell T + \varphi) \\ \lambda \text{ im.} : y(\ell T) &= A \cos(\mu \ell T + \varphi), \\ y'(\ell T) &= A \mu \sin(\mu \ell T + \varphi). \end{aligned}$$

Effectuons la transformation topologique

$$(8) \quad \zeta_i = \nu y'^2 + \omega_i^2 y^2 = r_{i,\ell}, \quad 1 \leq i \leq m,$$

$\nu = -1$ si μ réel, $+1$ s'il est imaginaire. Représentons la solution dans le plan (ζ_1, ζ_m) . La frontière (\bar{F}_m) définie par le lieu des points $t = \ell T$ est une demi-droite d'équation

$$(9) \quad \zeta_m(\omega_1^2 - \mu^2) = \zeta_1(\omega_m^2 - \mu^2) + A^2(\omega_1^2 - \omega_m^2).$$



Sur la stabilité et le régime transitoire de systèmes à discontinuités périodiques considérés comme déferlants.
About the stability and the transient rate of systems with periodic discontinuities considered as deferlant.

Les trajectoires (R_i), correspondant à $\zeta_i = \text{cte}$, sont des *segments de droite*, $1 \leq i \leq m$, d'équation

$$(10) \quad \zeta_m (\omega_1^2 - \omega_i^2) = \zeta_1 (\omega_m^2 - \omega_i^2) + \zeta_i (\omega_1^2 - \omega_m^2),$$

(R_1) et (R_m) étant parallèles à ζ_1 et ζ_m .

Sur l'intervalle $] \ell T, (\ell+1) T [$, les solutions s'écrivent

$$(11) \quad \begin{aligned} y(t) &= A \cos(\mu \ell T + \varphi) y_1(\theta) \\ &\quad + A \mu \sin(\mu \ell T + \varphi) y_2(\theta) \\ y'(t) &= A \cos(\mu \ell T + \varphi) y'_1(\theta) \\ &\quad + A \mu \sin(\mu \ell T + \varphi) y'_2(\theta) \end{aligned}$$

avec $y_1(0) = y_2(0) = 1$, $y'_1(0) = y'_2(0) = 0$ et $\theta = t - \ell T$.

Les frontières (\bar{F}_i), $1 \leq i \leq m-1$, sont des *coniques* d'équation

$$(12) \quad \begin{aligned} &\zeta_m [1 - y_1^2(\tau_i) + \nu \mu^2 \omega_1^2 y_2^2(\tau_i)] \\ &= \zeta_1 [1 - y_1^2(\tau_i) + \nu \mu^2 \omega_m^2 y_2^2(\tau_i)] \\ &\pm 2\mu y_1(\tau_i) y_2(\tau_i) \frac{\omega_m^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 - \mu^2} [-\nu \zeta_1^2 \\ &\quad + \nu \zeta_1 A^2 (\omega_1^2 + \mu^2) - \nu A^4 \mu^2 \omega_1^2]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Les démonstrations ne présentent pas de difficulté.

22. Oscillateur à modulation binaire de fréquence.

Il s'agit du cas à deux phases, dont certains aspects sont fort connus (5). On sait que, en postulant la continuité de y et de y' , et en prenant $T = 2\pi$ et $\tau_1 = \pi$, la nature de la solution dépend du discriminant

$$M = \frac{y_1(2\pi) + y_2(2\pi)}{2} = C_1 C_2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) S_1 S_2$$

avec $C_i = \cos x_i$, $S_i = \sin x_i$, $x_i = \omega_i \pi$, $i = 1, 2$.

Lorsque l'on trace les courbes $M = \text{cte}$ dans le plan (x_1, x_2) (Fig.2) on observe que celles qui correspondent aux limites des régions de stabilité (et qui pour l'équation de Mathieu ne se coupent que sur l'axe $x_1 = x_2$) possèdent des singularités à deux tangentes en des points P du plan des coefficients qui ne sont pas sur cet axe. Ces points sont caractérisés par $\omega_1 = k_1$ et $\omega_2 = k_2$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{N}$) et par $M = 1$, $\mu = 0$ (] une solution 2π - périodique) ou $M = -1$, $\mu = \pm \frac{1}{2}$ (4π - périodique).

Les frontières (\bar{F}_1) et (\bar{F}_2) sont alors confondues en une même demi-droite (9) : d'après (2) on a une solution périodique $\forall A$ et φ , comme le montre la Fig.3.

Lorsque l'on s'écarte de ces points P, tout en maintenant μ réel, deux possibilités peuvent alors se présenter suivant le signe de $r_{2,\ell+1} - r_{2,\ell}$, c'est à dire le signe de $\Delta r_2 = r_{2,\ell+1} - r_{2,\ell} = A^2 (\omega_2^2 - \mu^2) \text{sh } 2\pi \mu \cdot \text{sh } 2((2\ell+1)\pi \mu + \varphi)$.

En effet (\bar{F}_1) est une hyperbole (\bar{F}_2 reste une demi-droite), et si $\Delta r < 0$, le déferlement a lieu sur la branche (\bar{F}_{10}) de l'hyperbole et l'affixe décroît (Fig.4a). Si $\Delta r > 0$, c'est l'autre branche ($\bar{F}_{1\infty}$) qui joue le rôle de frontière et il croît. Lorsque $\varphi < 0$, il peut se produire un changement de frontière et une inversion du sens de variation du mouvement : dans le cas de la Fig.4b, l'affixe commence par décroître, puis il croît indéfiniment.

On peut se demander ce qu'il advient dans ce cas, d'un système physique et, plus précisément à quel instant le seuil $\pm y_M$ qui peut représenter une saturation, est atteint. On introduit la frontière de déferlement, au sens propre du terme, qui, dans (ζ_1, ζ_2) est une demi-droite d'équation

$$(\Sigma) \quad \zeta_2 = \zeta_1 + y_M (\omega_2^2 - \omega_1^2)$$

Pour savoir au bout de combien de déferlements le seuil est atteint, on détermine préalablement les points de rebroussement. Les uns sont situés sur (D_1)

$$(D_1) \quad y' = 0 : \zeta_2 = (\omega_2/\omega_1)^2 \zeta_1,$$

ou sur (D_2)

$$(D_2) \quad y = 0 : \zeta_2 = \zeta_1$$

les autres sont à déterminer dans chaque cas particulier. Un exemple est représenté Fig.5a où le seuil est atteint en Q.

Notons qu'il est extrêmement simple d'étudier le comportement à l'infini du système car (\bar{F}_1) est alors également une droite, l'asymptote de l'hyperbole (Fig.5b).

Prenons maintenant le cas où l'exposant caractéristique est imaginaire pur. D'un déferlement à l'autre, les accroissements de ζ_1 et ζ_2 sont donnés par

Sur la stabilité et le régime transitoire de systèmes à discontinuités périodiques considérés comme déferlants.
 About the stability and the transient rate of systems with periodic discontinuities considered as deferlant.

$$\Delta r_i = r_{i,\ell+1} - r_{i,\ell} = -A^2(\omega_1^2 - \mu^2) \sin 2\pi\mu \sin 2((2\ell+1)\pi\mu + \varphi)$$

Ils sont du signe de $-(\omega_1^2 - \mu^2) \cdot \sin 2\pi\mu$ si $2\ell\pi < 2((2\ell+1)\pi\mu + \varphi) < 2(\ell+1)\pi$

La frontière (\bar{F}_1) étant une ellipse, on effectue les affinités d'axe ζ_1 et ζ_2 qui la rendent circulaire de manière à faciliter le tracé de l'évolution du système (Fig.6a) et à étudier la nature de la solution : celle-ci est, en général, presque-périodique. Cependant, avec des conditions initiales appropriées, nous pouvons avoir un régime périodique à plusieurs phases (Fig.6b). Lorsque les trajectoires sont tangentes au cercle, la solution devient périodique à 2 ou 4 phases après un transitoire dont la durée peut être déterminée dans chaque cas particulier (Fig.6c).

N.B. - Seuls les segments $r_{i,\ell}$ $r_{i,\ell+1}$ sont représentés, sauf pour les Fig.1, 3 et 5a.

CONCLUSION

La topologie des systèmes déferlants a été appliquée à l'étude des systèmes linéaires d'ordre n à m discontinuités périodiques, moyennant l'introduction de frontières. On aboutit ainsi à une représentation qui peut être utilisée pour étudier la nature - périodique, presque-périodique - la stabilité et la durée du régime transitoire des solutions. C'est ce que l'on a montré sur un exemple où les deux trajectoires successives présentaient un centre dans le plan des phases. Il est possible d'envisager, ne serait-ce que pour les systèmes d'ordre 2, toute autre combinaison de deux ou plusieurs points singuliers et de mettre en oeuvre la transformation topologique qui confère aux trajectoires et aux frontières une forme simple.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) Th. VOGEL - Théorie des systèmes évolutifs Ed. Gauthier Villars Paris (1965)
- du même auteur
- (2) Comptes rendus 231, 207-209 (1950)
- (3) Ann. Télécomm. 6, 1-10 (1951)
- (4) Bull. Soc. Math. Fr. 81, 63-75 (1953)
- (5) E. MEISSNER - Schweizerische Bauzeitung, 72 n° 11, 95-98 (1918)

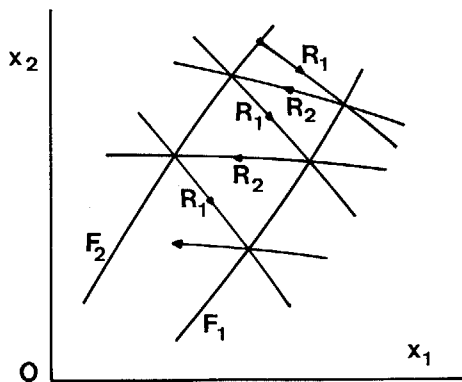


Fig.1 Evolution schématisée de l'affixe dans le plan (x_1, x_2) pour un système à deux phases : on a une succession d'arcs de trajectoires $(R_1), (R_2)$ se raccordant sur les frontières $(F_1), (F_2)$.

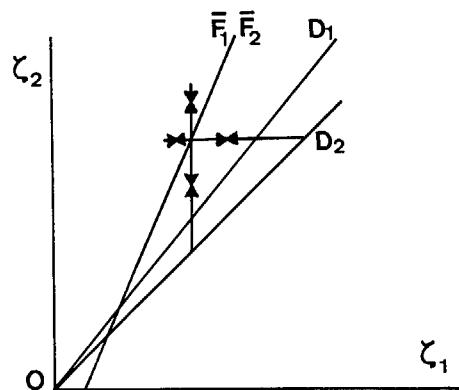
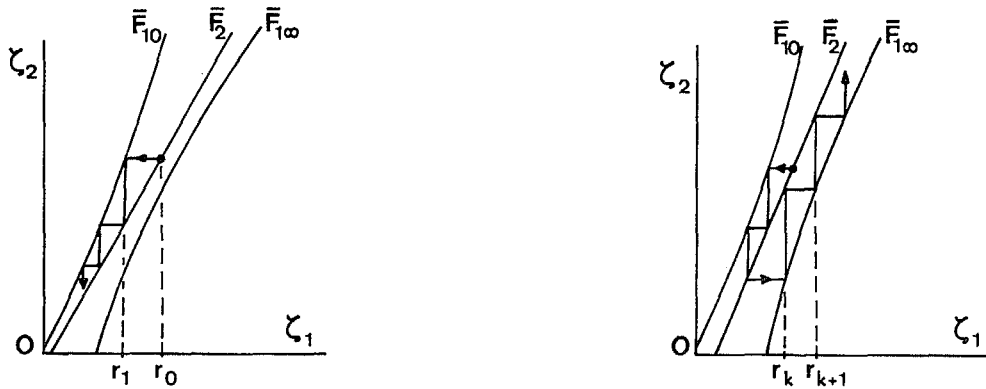


Fig.3 Oscillateur à modulation binaire de fréquence $(\omega_1 = k_1, \omega_2 = k_2)$. Les frontières étant confondues, la solution est périodique quelles que soient les conditions initiales.



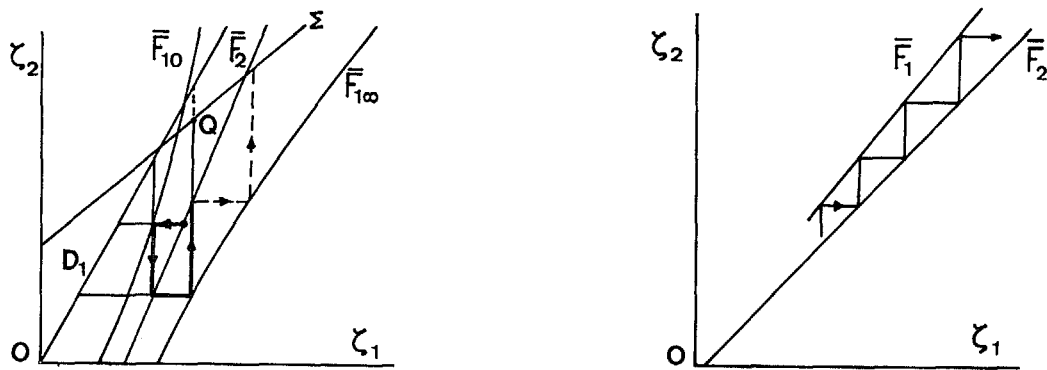
Sur la stabilité et le régime transitoire de systèmes à discontinuités périodiques considérés comme déferlants.
 About the stability and the transient rate of systems with periodic discontinuities considered as deferlant.



4a. L'affixe tend vers zéro.

4b. Il décroît, puis croît indéfiniment.

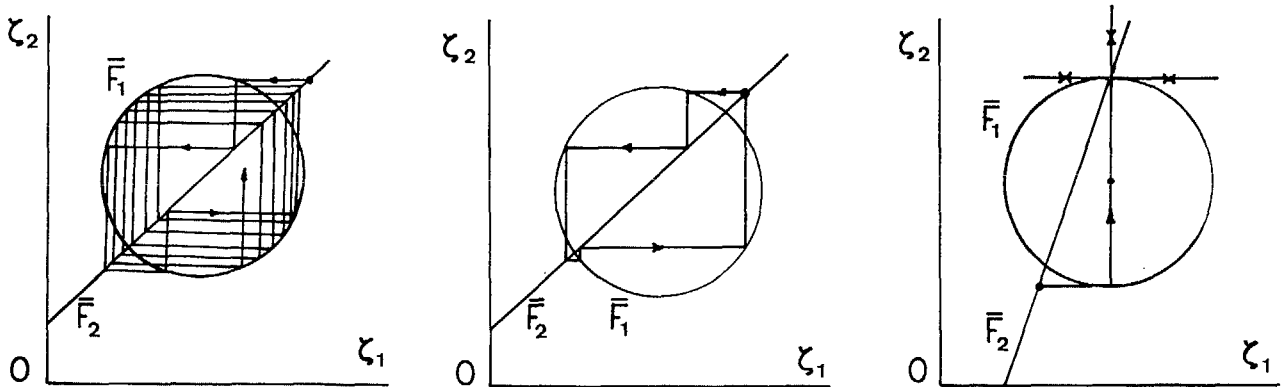
Fig.4. Cas où l'exposant caractéristique λ est réel.



5a. Le seuil est atteint en Q.

5b. Comportement asymptotique de l'affixe.

Fig.5. λ est réel.



6a. Solution presque-périodique.

6b. Régime périodique à 8 phases.

6c. Trajectoires tangentes au cercle.

Fig.6. λ est imaginaire.

Sur la stabilité et le régime transitoire de systèmes à discontinuités périodiques considérés comme déferlants.
 About the stability and the transient rate of systems with periodic discontinuities considered as deferlant.

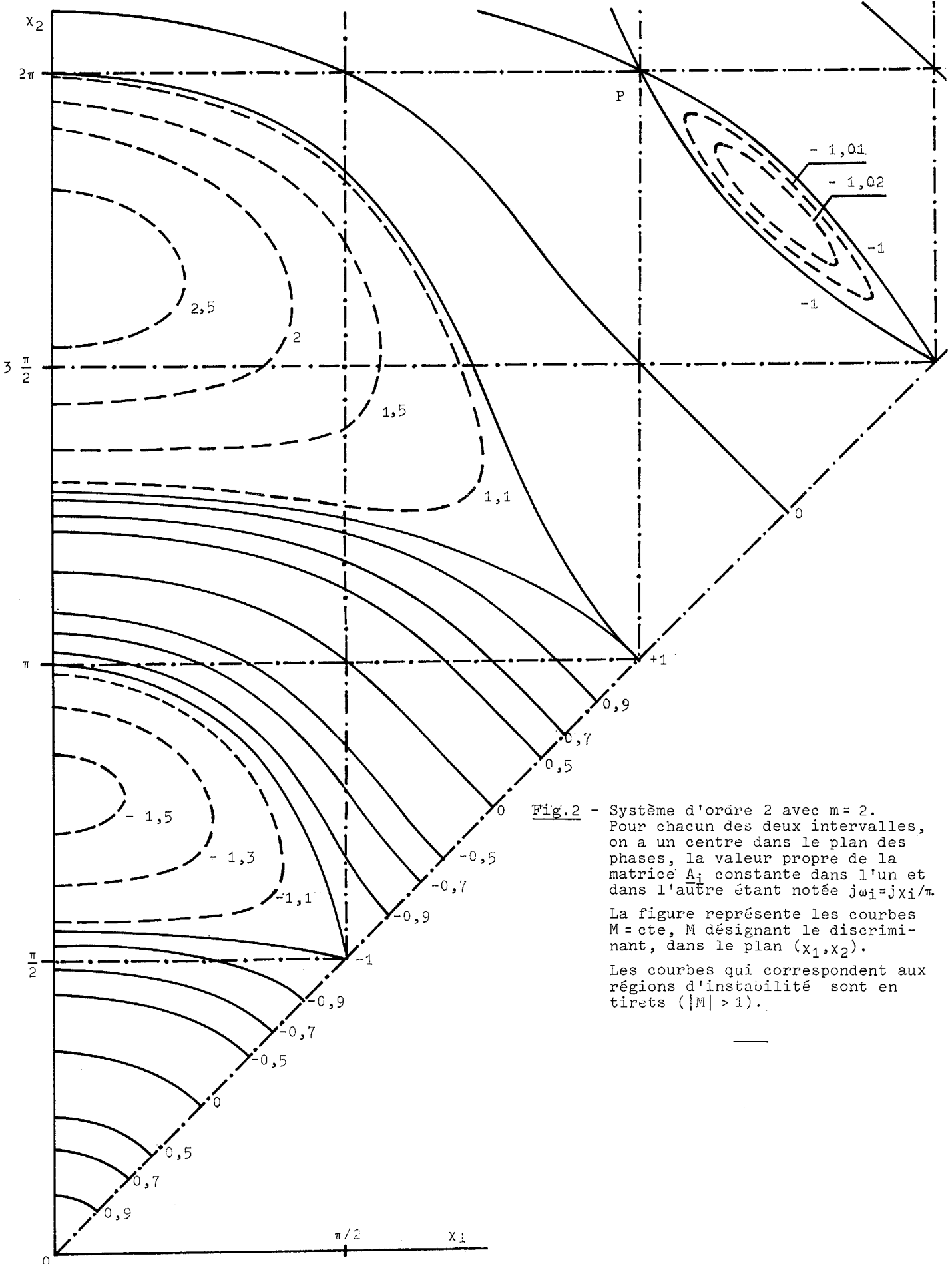


Fig.2 - Système d'ordre 2 avec $m = 2$.
 Pour chacun des deux intervalles, on a un centre dans le plan des phases, la valeur propre de la matrice A_i constante dans l'un et dans l'autre étant notée $j\omega_i = jx_i/\pi$.
 La figure représente les courbes $M = cte$, M désignant le discriminant, dans le plan (x_1, x_2) .
 Les courbes qui correspondent aux régions d'instabilité sont en tirets ($|M| > 1$).