53/

SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU
SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

FILTRE LINEAIRE OPTIMAL A HORIZON PASSE GLISSANT (VRAIMENT) LIMITE

J. AGUILAR MARTIN
M. TANTAWY

LABORATOIRE D'AUTOMATIQUE ET D'ANALYSE DES SYSTEMES du C.N.R.S. - 7, Avenue du Colonel Roche - 31400 TOULOUSE

RESUME

Le filtre linéaire optimal (Kalman-Bucy) devient un filtre à gain constant pour les signaux stationnaires, après une durée tendant vers l'infini (filtre de Wiener).

Le filtre qui n'utiliserait qu'un horizon glissant passé limité, ou mémoire limitée, a été abordé rarement et uniquement en temps discret, et a donné en général des filtres d'une grande complexité et peu d'intérêt pratique.

Notre approche met l'accent sur l'absence totale d'information hors de l'intervalle ou horizon. Cette réelle limitation de la mémoire nous amène à l'établissement d'un filtre linéaire à gain constant, dont le gain est fixé par la longueur de l'horizon et se calcule avec une équation de Riccati inversée pour admettre une covariance initiale infinie.

Deux critères d'évaluation de ce filtre, l'un sur la qualité de l'estimation, l'autre dans un contexte de régulation en boucle fermée, sont proposés et ils permettent de rechercher les meilleures valeurs de l'horizon dans des problèmes de durée limitée.

SUMMARY

The optimal linear filter (Kalman-Bucy) becomes a constant gain or Wiener filter for stationary signals, after an infinite time.

The filter that uses only measurements made on a finite sliding horizon, or limited memory filter, has seldom been studied and only in discrete time. Most of those few approaches give rise to very complicated and little useful filters.

Our approach enhances the complete lack of knowledge outside the horizon. This true limitation of the memory leads to a constant gain filter the gain of which is determined by the length of the past horizon through an inverted Riccati equation to accept infinite initial covariance.

Two evaluation criteria have been developped, the first stands for the filter itself, the second involves a closed loop regulation. Both enable the search of best values of the horizon in finite duration problems.

FILTRE LINEAIRE OPTIMAL A HORIZON PASSE GLISSANT (VRAIMENT) LIMITE

J. AGUILAR-MARTIN - O. TANTAWY

I - SITUATION DU PROBLEME

Considérons le système générateur du signal sous la forme d'état suivante :

$$\frac{dx}{dt} = Ax + w \qquad E\left[x(t_0)\right] = \bar{x}(t_0) \qquad (1)$$

$$y = Hx + v \qquad \operatorname{cov}\left[x(t_0)\right] = X_0 \qquad (2)$$

v et w bruits blancs gaussiens non intercorrelés de covariances respectives V et W.
Le filtre linéaire optimal de Kalman-Bucy est bien établi. Sa caractéristique principale vis à vis des filtres fréquentiels est son aptitude à tenir compte des périodes transitoires. D'ailleurs si après un temps suffisamment long un régime stationnaire s'établit le gain du filtre devient constant et identique au filtre de Wiener. Paradoxalement lorsque pour le même signal on ne s'intéresse qu'à son estimation basée sur des observations faites sur un horizon passé limité, on aboutit à des complications supérieures à celles du régime transitoire. Dans le cas de signaux échantillonnés quelques solutions ont été proposées.

Schweppe a développé le modèle de filtrage bayesien qui ne prend en compte qu'un nombre fini et fixé N d'observations passées, il aboutit à une équation récurrente qui suppose la mise en mémoire permanente des N dernières observations. Outre le fait que l'obtention de cette équation n'est pas indiquée et sa prétendue simplicité repose sur l'optimisme de l'auteur, le seul exemple qu'il propose utilise l'estimateur ergodique et aboutit à un système instable [1].

Schmidt propose une méthode plus réaliste mais encore plus heuristique qui consiste à pondérer les observations par une fonction rapidement décroissante vers le passé [2] ainsi que de LARMINAT [5].

Cosaert et Gottzein ont réalisé un filtre à mémoire limitée dont l'état, comme pour Schweppe, a la dimension de l'horizon [3].

Finalement, à notre connaissance, Jazwinski dans [4] passe en revue les méthodes précédentes et fournit une solution complexe mais correcte et utilisable à l'aide de deux filtres linéaires optimaux à gain variable et d'un prédicteur. Les problèmes de stabilité ne sont pas ignorés par l'auteur qui fournit des variations numériques destinées à les résoudre.
Il faut cependant signaler que ce filtre n'est obtenu que grâce au fait d'avoir considéré le système dynamique non perturbé par une variable aléatoire, il s'agit donc d'un problème d'estimations de trajectoire plutôt que de filtrage propre.

II - FILTRE A GAIN CONSTANT

Par analogie avec la simplicité opératoire du filtre de Wiener, nous nous proposons d'analyser les filtres à gain constant, différent du gain asymptotique optimal, mais choisi parmi les valeurs que prend celui-ci en fonction du temps.

Ainsi nous construisons le filtre

$$\frac{d\hat{x}_{o\ell}}{dt} = A\,\hat{x}_{o\ell} + L\,(y(t) - H\,\hat{x}_{o\ell}(t)) \qquad (3)$$

avec

$$L_{o\ell} = F(\ell)\,H\,V^{-1}$$

ce gain est constant en fonction de t mais $F(\ell)$ est donné par l'équation de Riccati, pour $s = \ell$.

$$\frac{dF}{ds} = F\,A^T + AF - F\,H^T\,V^{-1}\,H\,F + W \qquad (4)$$

$$F(0) = X_0$$

Nous constatons que ce filtre à gain constant L_ℓ n'est pas un filtre à mémoire limitée, en effet il ne le serait que pour une valeur très particulière de la connaissance sur $x(t-\ell)$: le cas où $x(t-\ell)$ serait une variable aléatoire gaussienne de covariance X_0 et de moyenne $\bar{x}(t-\ell)$ calculable par l'inversion du filtre optimal entre $t-\ell$ et t, c'est-à-dire

$$\frac{d\hat{x}_{t\ell}(t)}{ds} = A\,\hat{x}_{t\ell}(s) + L(s)\,(y(s) - H\hat{x}_{t\ell}(s)) \qquad s \in [t-\ell,\ t] \qquad (5)$$

où

$$L(s) = F_{t\ell}(s)\,H\,V^{-1}$$

où $F_{t\ell}(s)$ est donné par l'équation (4) pour tout s dans l'intervalle $[t-\ell,\ t]$ et avec la condition initiale

$$F_{t\ell}(t-\ell) = X_0 \qquad (6)$$

Le système d'équations (5) et (6) dans $[t-\ell,\ t]$ est un système déterministe ayant pour entrées y(s) $s \in [t-\ell,\ t]$ connues à l'instant t.
On a donc

$$\hat{x}_{t\ell}(t) = \Psi_{t\ell}(t,t-\ell)\,\bar{x}(t-\ell) + \int_{t-\ell}^{t} \Psi_{t\ell}(t,s)L_{t\ell}(s)y(s)\,ds \qquad (7)$$

L'équation (7) peut être inversée et permet de calculer à l'instant t la valeur de $\bar{x}(t-\ell)$ si $\hat{x}_{t\ell}(t)$ est connu. On est donc devant un filtre qui pour $\hat{x}_{t\ell}(t)$ n'est optimal et à mémoire limitée que si $\bar{x}(t-\ell)$ suit une trajectoire très particulière. Ceci ne présente donc pas d'intérêt en général. Nous allons chercher à nous affranchir de cette contrainte.

Filtre à mémoire glissante vraiment limitée

Il est naturel de considérer que toute information à l'extérieur de l'intervalle $[t-\ell,\ t]$ est nulle et ceci jusqu'à l'instant $t-\ell$ inclus. Ceci est donc contraire à l'hypothèse qui attribuait une covariance X_0 à $x(t-\ell)$. Nous remplacerons donc cette hypothèse en posant

$$F(t-\ell) = \infty\,.$$

Avec cette hypothèse nous éliminons l'importance de $\bar{x}(t-\ell)$ qui peut donc être quelconque. Nous posons donc

$$L_\ell = F_\ell(\ell)\,H^T\,V^{-1} \qquad (8)$$

avec $F_\ell(\ell)$ donné par

$$\frac{dF_\ell}{ds} = A\,F_\ell + F_\ell\,A^T - F_\ell\,H^T\,V^{-1}\,H\,F_\ell + W \qquad (9)$$

$$F_\ell(0) = \infty\,.$$

Or cette équation ne peut pas être résolue sous la forme (9) à cause de sa condition initiale, il est donc nécessaire de l'inverser en posant $S(s) = -F_\ell^{-1}(s)$ ce qui aboutit à :

$$\frac{-dS}{ds} = A^T S + SA - S\,W\,S + H^T V^{-1} H \qquad (10)$$

$$S(0) = 0$$

Le calcul du gain (10) est donc remplacé par

$$L_\ell = - S^{-1}(1)\ H^T\ V^{-1} \tag{11}$$

et on a alors $x_\ell(t)$ donné par

$$\frac{d\hat{x}_\ell}{dt} = A\ \hat{x}_\ell + L_\ell(y(t) - H\ \hat{x}\ (t)) \tag{12}$$

$$\hat{x}\ (t_0) = \bar{x}(t_0)\ .$$

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

<u>Proposition</u> : Le filtre linéaire optimal à horizon passé glissant vraiment limité à la durée ℓ est un filtre linéaire à gain constant dont la valeur du gain est celle que prendrait le gain optimal pour le même système à l'instant ℓ, et ayant une covariance initiale infinie.

III - <u>EVALUATION DES PERFORMANCES DU FILTRE SEUL</u>

Le critère de qualité du filtrage seul sera basé sur la covariance de l'erreur d'estimation $e(t) = x(t) - \hat{x}_\ell(t)$

Si nous posons $E(t) = \text{cov}\left[e(t)\right]$ on montre facilement [6] que

$$\frac{dE}{dt} = (A + L_\ell H)\ E + E(A + L_\ell H)^T + W + L_\ell\ V\ L_\ell^T \tag{13}$$

avec

$$E(0) = X_0\ .$$

Le critère de qualité du filtre sous optimal à mémoire limitée sera choisi :

$$\mathscr{E}(t_0, t_f, \ell) = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} \text{trace}\ (E(t))\ dt \tag{14}$$

ceci permet de constater par simulation qu'il existe en général une valeur 1^* telle que

$$\mathscr{E}(t_0, t_f, \ell^*) = \min_{e}\ \mathscr{E}(t_0, t_f, \ell) \tag{15}$$

ce qui permet d'obtenir le meilleur filtre sous-optimal à mémoire limitée pour une durée $[t_0, t_f]$ donnée.

Les courbes (1) et (2) illustrent ceci sur deux exemples.

IV - <u>EVALUATION DES PERFORMANCES DU FILTRE EN SITUATION DE REGULATION OPTIMALE</u>

Pour se placer dans une situation plus proche de celle pour laquelle cette étude a été menée, nous considérons le problème de régulation stochastique optimale suivant :

Le système libre (1) est soumis à une commande u selon

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + Bu + w \\ y &= Hx + v \end{aligned} \tag{1'}$$

Le critère de régulation est :

$$\mathcal{V}(t_0, t_f, u) = \int_{t_0}^{t_f} (x^T\ Q\ x + u^T\ R\ u)\ dt + x^T(t_f)\ P_f x^T(t_f) \tag{16}$$

Grâce au principe de séparation [7] bien connu, la régulation optimale est produite dans l'intervalle $[t_0,\ t_f]$ par

$$u_0(t) = K(t)\ x_0(t) \tag{17}$$

où

$$K(t) = - R^{-1}\ B^T\ P(t) \tag{18}$$

et Pt) provient de l'équation de Riccati rétrograde

$$\frac{-dP}{dt} = A^T P + PA - PBR^{-1}\ B^T\ P + Q \tag{19}$$

$$P(tf) = P_f$$

et où $\hat{x}_0$ est l'estimateur linéaire optimal de Kalman-Bucy

L'espérance mathématique du coût optimal est alors

$$E\left[\mathcal{V}\ (t_0, t_f, u_0)\right] = \text{trace}\left[P(t_0)\ X_0\right] \tag{20}$$

Si nous remplaçons $\hat{x}_0$ par $\hat{x}_\ell$ donné par le filtre à mémoire limitée (12) on aura

$$u_\ell(t) = K(t)\ \hat{x}_\ell(t) \tag{21}$$

finalement on a l'ensemble d'équations linéaires

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B\ K(t)\ \hat{x}_\ell + w \tag{22}$$

$$\frac{d\hat{x}_\ell}{dt} = A\hat{x}_\ell + B\ K(t)\ \hat{x}_\ell - L_\ell\ Hx_\ell + L_\ell Hx + L_\ell v$$

et en posant $z^T = \left[x^T \mid \hat{x}_\ell^T\right]$ on a

$$\frac{dz}{dt} = \left[\begin{array}{c|c} A & BK(t) \\ \hline L_\ell H & A + BK(t) - L_\ell H \end{array}\right] z + \left[\begin{array}{c} w \\ \hline L_\ell v \end{array}\right] \tag{23}$$

soit

$$\frac{dz}{dt} = D_\ell(t)\ x + \tag{24}$$

avec (t) bruit blanc gaussien centré tel que

$$\text{cov}\left[\varepsilon(t)\right] = \left[\begin{array}{c|c} W & 0 \\ \hline 0 & L_\ell\ V\ L_\ell^T \end{array}\right] = U_\ell \tag{25}$$

Le coût (16) peut donc s'écrire :

$$\mathcal{V}(t_0, t_f, u_\ell) = \int_{t_0}^{t_f} (z^T C(t) z)\ dt + z^T(t_f)\ C_f\ z(t_f) \tag{26}$$

où

$$C(t) = \left[\begin{array}{c|c} Q & 0 \\ \hline 0 & K^T(t)\ R\ K(t) \end{array}\right]$$

et

$$C_f = \left[\begin{array}{c|c} P_f & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

La condition initiale pour $t = t_0$ est une variable aléatoire gaussienne $z(t)$ telle que

$$E\left[z(t_0)\right] = \begin{bmatrix} \bar{x}(t_0) \\ \bar{x}(t_0) \end{bmatrix} = \bar{z}(t_0)$$

et

$$\text{cov}\left[z(t_0)\right] = \begin{bmatrix} X_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = Z_0$$

FILTRE LINEAIRE OPTIMAL A HORIZON PASSE GLISSANT (VRAIMENT) LIMITE

Finalement on a l'espérance mathématique du critère fournie par

$$E\left[\mathcal{V}\ (t_0 t_f, u)\right] = \int_{t_0}^{t_f} \mathrm{trace}\left[\phi_\ell^T(t,t_0) C(t)\ \phi_\ell(t,t_0) - Z_0\right] dt + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \int_{t_0}^{t} \mathrm{trace}\left[\phi_\ell^T(t,s) C(s)\ \phi_\ell(t,s) . U_\ell\right] ds \right\} dt \qquad (27)$$

où $\phi_\ell\ (t,s)$ est la matrice de transition du système (27)

Il est donc possible de calculer (24) et de rechercher la valeur ℓ^{xx} qui le rend minimum, si elle existe.
Les courbes des figures (3) et (4) illustrent ceci pou les exemples des figures (1) et (2).

V - CONCLUSION

A notre avis, et après avoir fait un tour rapide des tentatives de réalisation de filtres linéaires à mémoire limitée, il nous a semblé normal qu'il existe une formulation plus simple que celles rencontrées. Il nous paraît normal qu'un filtre à gain constant satisfasse certain type de limitation dans l'horizon passé et nous nous sommes attachés à l'établir. Sa construction est très simple et elle nous a permis d'analyser son fonctionnement en simulation sur des problèmes de filtrage ou de régulation sur une durée limitée. La recherche du meilleur horizon glissant dans ce type de problèmes est possible et on constate que dans de nombreux cas la détérioration par rapport au filtre optimal peut être évaluée et est faible.

REFERENCES

[1] SCHWEPPE F.C.
Uncertain dynamic systems (Livre)
Prentice Hall 1973, pp. 162-163.

[2] SCHMIDT S.F.
Compensation for modelling errors in orbit Determination problems.
A.M.A. Inc. Seabrook Maryland Rep. n° 67-16 Nov. 1967, référencié dans Jazwinski [4].

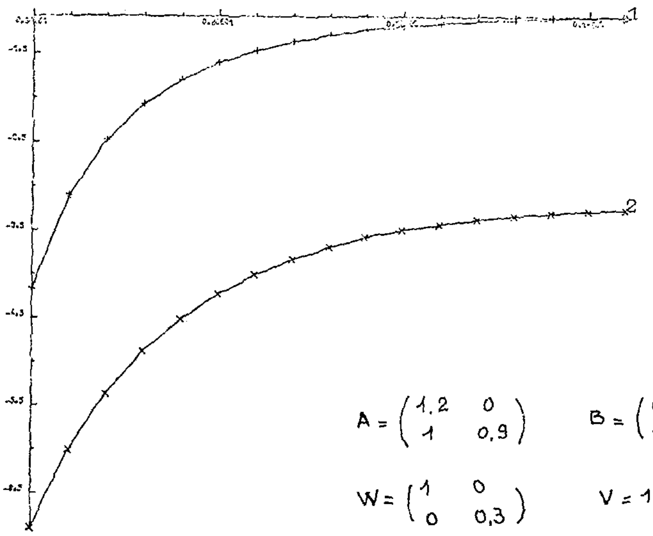
[3] COSAERT K. et GOTTZEIN E.
A decoupled shifting memory filter method for radio tracking of space vehicles
Interp. Astronaut. Congr. 18th Belgrade 1967

[4] JAZWINSKI A.H.
Stochastic processes and filtering theory (Livre) . Academic Press 1970 (pp. 255-258)

[5] de LARMINAT Ph.
Filtrage et commande selon un critère à horizon mobile. Revue RAIRO, 1972, 05, pp. 73-86

[6] FRIEDLAND B.
On effect of incorrect gain in Kalman filter
IEEE Trans. AC, Oct. 1967, p. 610

[7] JOSEPH et TOU
On linear control theory
Trans. AIEE 80, part II, pp. 193, 196, 1961.

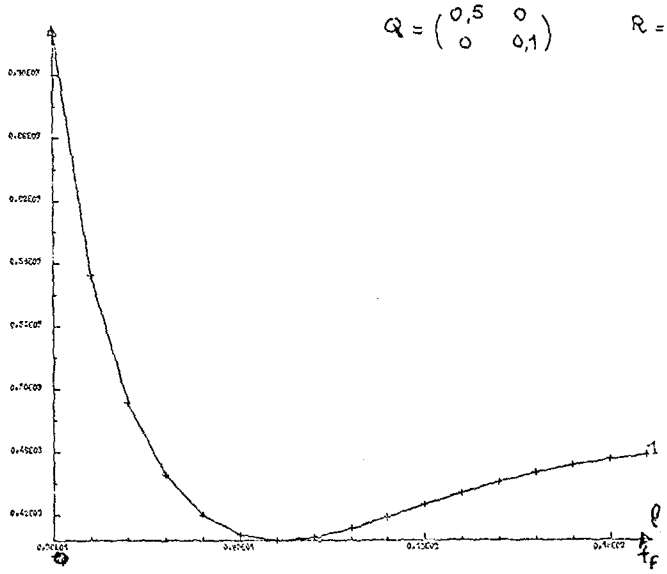


Trajectoire du gain optimal

$$A = \begin{pmatrix} 1,2 & 0 \\ 1 & 0,9 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$$

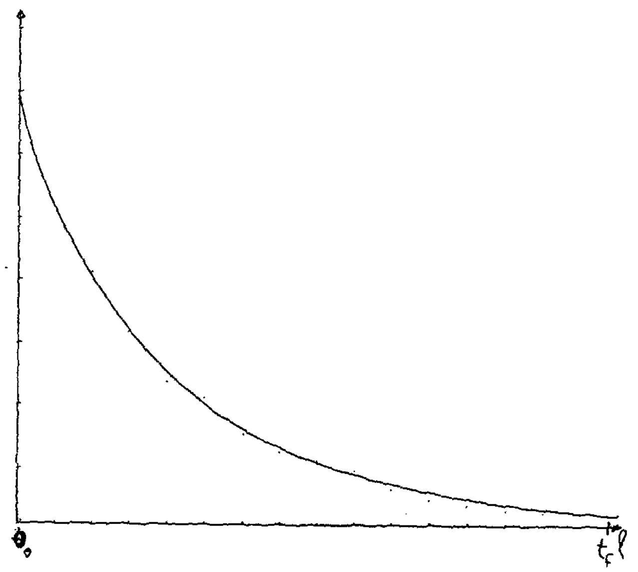
$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{pmatrix} \qquad V = 10 \qquad X_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 50 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{pmatrix} \qquad R = 15 \qquad S = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$



Valeurs du critère de filtrage pour différents gains constants

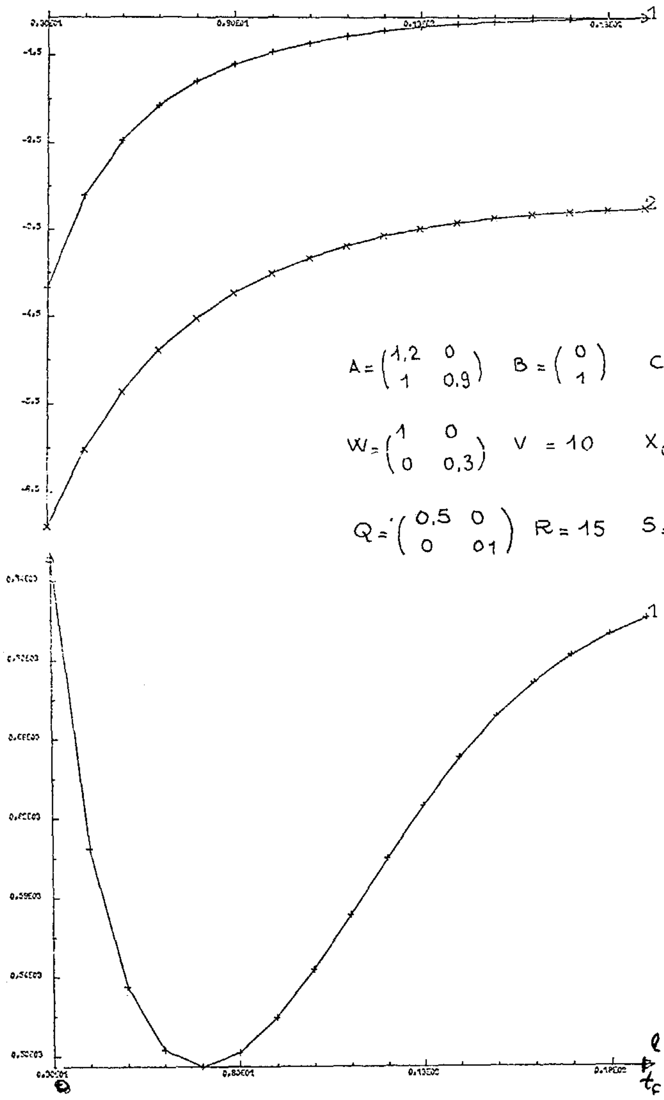
FIGURE 1



Valeurs du critère de commande pour différents gains constants

FIGURE 3

FILTRE LINEAIRE OPTIMAL A HORIZON PASSE GLISSANT (VRAIMENT) LIMITE



Trajectoire du gain optimal

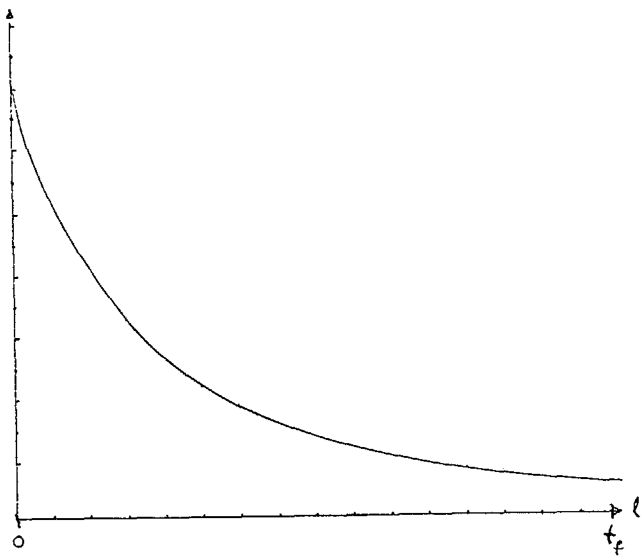
$$A = \begin{pmatrix} 1{,}2 & 0 \\ 1 & 0{,}9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 \end{pmatrix} \quad V = 10 \quad X_0 = \begin{pmatrix} 250 & 0 \\ 0 & 150 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 0 & 01 \end{pmatrix} \quad R = 15 \quad S = \begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Valeurs du critère de filtrage pour différents gains constants

FIGURE 2



Valeurs du critère de commande pour différents gains constants

FIGURE 4