

# SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

---

THEORIE ET PRATIQUE DE L'ANALYSE DE FOURIER EN BANDE ETROITE  
A PARTIR DE PLUSIEURS DIZAINES DE MILLIERS D'ECHANTILLONS.  
APPLICATION A L'ETUDE DES RESONANCES FAIBLEMENT AMORTIES.

Vital THIEBAUD

HEWLETT PACKARD France, Z.I. de Courtaboeuf, B.P. n°6, Avenue des Tropiques 91400 ORSAY

---

## RESUME

L'analyse numérique du signal par transformée rapide de FOURIER, après avoir ouvert le champ d'applications nouvelles, s'est par ailleurs heurtée à des limitations intrinsèques rendant son utilisation délicate notamment dans le domaine de l'analyse des structures présentant des modes de résonances fines.

L'analyse de FOURIER numérique en bande étroite permet d'outrepasser ces limites et de venir à bout de l'étude de problèmes traités jusqu'ici de manière inachevée.

Le but de cet exposé est de montrer :

- la théorie à la base de l'analyse en bande étroite et les réalisations pratiques qui en découlent ;
- une application typique à l'analyse d'une fonction transfert d'un dispositif ;
- l'application à deux cas de structures excitées sur pot vibrant par du bruit.

## SUMMARY

The digital signal analysis based on the fast FOURIER transform, while disclosing a wide range of new applications, has encountered some intrinsic limitations which make sometimes it difficult to accomplish a meaningful analysis : this is the case, for instance, in the study of structures which exhibit sharp resonances.

The narrowband digital FOURIER analysis allows us to overcome such restrictions and give a correct solution to problems inadequately studied so far.

The goods of this paper are to illustrate :

- the theory on which the narrowband analysis is based as well as the possible applications
- a transfer function measurement where full advantage can be taken from a narrowband approach
- an analysis carried out on two structures excited by a signal output from a shaker.

TITRE : THEORY AND PRACTICS OF NARROWBAND FOURIER ANALYSIS BASED ON SEVERAL TENS OF THOUSANDS OF SAMPLES. APPLICATION TO THE STUDY OF SLIGHTLY DAMPED RESONANCES.



THEORIE ET PRATIQUE DE L'ANALYSE DE FOURIER EN BANDE ETROITE  
 A PARTIR DE PLUSIEURS DIZAINES DE MILLIERS D'ECHANTILLONS.  
 APPLICATION A L'ETUDE DES RESONANCES FAIBLEMENT AMORTIES.

THEORIE ET PRATIQUE DE L'ANALYSE DE FOURIER EN BANDE ETROITE

La transformée de FOURIER associée à un signal du temps  $x(t)$  un spectre  $X(f)$  dans le domaine des fréquences défini par

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

avec  $\omega = 2\pi f$  la pulsation  
 $f$  la fréquence

Typiquement, on considère  $x(t) = 0$  dans les temps négatifs, ce qui ramène les bornes de l'intégrale à  $\int_0^{+\infty}$  appelée transformée du signal unilatéral

$x(t)$ . De plus la limite supérieure étant généralement bornée, on écrit

$$X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$T \rightarrow \infty$

Lorsque la fonction continue  $x(t)$  est numérisée avec un pas d'échantillonnage  $\Delta t$  sur une durée  $T = N \Delta t$  limitée par le nombre de points acquis  $N$  l'intégrale se ramène à une sommation du type

$$X(m \Delta f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n \Delta t) \cdot e^{-j2\pi mn/N}$$

Les paramètres de l'échantillonnage

résolution  $\Delta t = \frac{1}{f_e}$  où  $f_e$  = fréquence d'échantillonnage

et fenêtre  $T = N \cdot \Delta t$  avec  $N = 2^n$

entraînent dans le domaine de fréquence ceux de la résolution  $\Delta f = \frac{1}{T}$

et de la fenêtre d'analyse  $F_{max} = \frac{f_e}{2} = \frac{N}{2} \Delta f = \frac{1}{2 \Delta t}$

Dès lors que la fenêtre d'un domaine et résolution de l'autre sont inversement liées et que fenêtre et résolution d'un même domaine sont couplées par le nombre de points, lui-même imposé par la mémoire de travail, il se trouve que: une fois  $N$  imposé, un seul parmi des quatre paramètres  $\Delta t, T, \Delta f, F_{max}$  peut être choisi et fixe tous les autres.

Par exemple si  $N = 1024$  et  $F_{max} = 50$  kHz on a  $\Delta t = \frac{1}{2 F_{max}} = 10 \mu s$

Donc  $T = 10,24$  ms et  $\Delta f = \frac{10^3}{10,24} \approx 100$  Hz.

Si en pareil cas on désire une résolution en fréquence de  $\Delta f = 25$  Hz dans la même largeur de bande, le seul moyen est d'augmenter le nombre de points d'un coefficient égal au rapport  $\frac{100}{25} = 4$ , c'est-à-dire de passer de

$N = 1024$  à  $N = 4096$ . On imagine immédiatement qu'il est hors de question, si l'on veut atteindre l'ordre de grandeur du Hz, de travailler sur 128 fois 1024 points pour des raisons d'encombrement de mémoire, d'autant plus que pour le calcul d'une fonction de transfert

$$H = \frac{\overline{Gyx}}{\overline{Gxx}}$$

et de cohérence  $\gamma^2 = \frac{|\overline{Gyx}|^2}{\overline{Gxx} \overline{Gyy}}$

à partir de  $\overline{Gxx}$  moyenne des spectres de puissance à l'entrée

$\overline{Gyy}$  moyenne des spectres de puissance à la sortie

$\overline{Gyx}$  moyenne des interspectres

il faut disposer d'un minimum de six à huit fois cette taille mémoire pour l'acquisition de  $x$  et de  $y$  avec mémoires-tampons et le cumul des spectres de puissance propres et croisés en double précision si l'on ne veut perdre

de la dynamique. A fortiori atteindre des résolutions en dessous du Hz postule en faveur des gabarits de travail atteignant l'ordre de grandeur du million de mots.

Il existe des centres de calculs de très grande capacité permettant le traitement d'un nombre si important de données, basé sur des algorithmes de décomposition en blocs partiels ; à ce sujet la transformée rapide de FOURIER elle-même se ramène à une base modeste de transformée discrète sur un nombre de points restreints (2, 4 ou 8 par exemple), les algorithmes dont il est question ici étant une extension de ce concept à un nombre de points excédant la taille mémoire du moyen de calcul lui-même.

La transformée de FOURIER en bande étroite connue aussi sous le nom de ZOOM (ou BSFA band selectable Fourier analysis) tente de résoudre ce problème en concentrant tous les points de calculs d'un moyen relativement restreint, la mémoire disponible d'un minicalculetur par exemple, sur une portion de fréquence, uniquement en partant d'un concept plus physique qu'informatique comme celui ébauché ci-dessus.

Si l'on considère qu'il est rarement nécessaire de disposer d'une résolution ultra-fine sur toute la bande, et que même dans ce cas l'outil décrit ici convient également, on peut ébaucher un système ou un logiciel de traitement qui découle de l'hétérodynage numérique inspiré directement des équations à la base de la translation d'un spectre. En effet, comme il est difficile de réaliser un filtre passe-bande idéal étroit autour d'une fréquence d'intérêt relativement élevée, il est plus aisé de translater le spectre autour d'une nouvelle origine, centrée à la fréquence centrale d'intérêt, et d'isoler la bande d'intérêt par un filtre passe-bas centré en cette nouvelle origine.

Considérons le signal  $x(t)$  et sa transformée de FOURIER associée  $X(f)$

$$x(t) \longleftrightarrow X(f)$$

si  $x(t)$  est une fonction réelle,

$X(f)$  est une fonction complexe paire ou symétrique en parties réelles ou en amplitudes  
 impaire ou antisymétrique en parties imaginaires ou en phases

selon les propriétés d'Hermite, et  $x(t)$  est dite fonction hermitienne.

Considérons ce même signal translaté sur l'axe des temps d'une quantité  $\tau$ , en retard par ex., alors on associe à

$$x(t - \tau) \longleftrightarrow e^{-j\omega\tau} X(f)$$

une transformée dont seule la composition des phases a été affectée par rapport au signal d'origine par l'addition de l'argument linéaire

$$-\omega\tau = -2\pi f\tau$$

en fonction de la fréquence. Cette propriété particulière au théorème de la translation du signal (ici dans le domaine des temps) est bien connue sous le nom restrictif de théorème du retard.

Le théorème de l'avance associe à

$$x(t + \tau) \longleftrightarrow e^{+j\omega\tau} X(f)$$

De la même manière, on peut considérer la translation en fréquence d'une quantité  $f_0$  vers la gauche

$$X(f + f_0)$$

à partir de la relation de la translation vers la droite

$$e^{+j\omega\tau} x(t) \longleftrightarrow X(f - f_0)$$

avec  $\omega_0 = 2\pi f_0$

et lui associer

$$e^{-j\omega\tau} x(t) \longleftrightarrow X(f + f_0)$$

Un tel signal est complexe dans le domaine des temps puisque le développement d'EULER implique

$$e^{-j\omega\tau} = \underbrace{\cos \omega\tau}_{\text{composante réelle}} - j \underbrace{\sin \omega\tau}_{\text{composante imaginaire}}$$

alors même que  $x(t)$  est un signal réel.

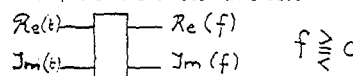
Ce nouveau signal complexe temporel ne respecte donc plus les propriétés hermitiennes rappelées ci-dessus, et a donc une transformée  $X(f + f_0)$  bien évidemment non symétrique et antisymétrique respectivement en parties réelles et imaginaires autour de la nouvelle origine de fréquence du fait que ces relations n'existaient d'ailleurs pas autour de  $f_0$ .

Le signal ainsi translaté en fréquence se décompose dans le domaine des temps en un signal réel  $x(t) \cdot \cos \omega\tau$  et en un signal imaginaire  $-j x(t) \cdot \sin \omega\tau$

devant chacun faire l'objet d'un filtrage passe-bas par convolution temporelle avec la réponse impulsionnelle du filtre équivalent à la largeur de bande  $B$  d'intérêt, avant de faire l'objet de la transformation complexe de FOURIER.

On parle ici de la transformée complexe de FOURIER (algorithme original de COOLEY-TUKEY, réf. IEEE 1966) par opposition à la transformée réelle de FOURIER réservée aux seuls signaux hermitiens dont on ne calcule les spectres que pour  $f \geq 0$  (algorithme dérivé de BERGLAND de la BELL TEL. 1969)

Il faudrait parler ici plus précisément de transformée de domaine complexe à domaine complexe schématisée comme suit

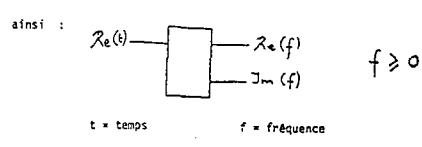


$t$  = temps

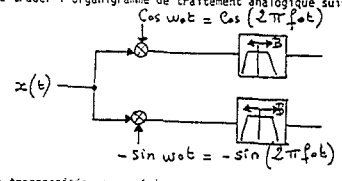
$f$  = fréquence

par opposition à la transformée de domaine réel à domaine complexe schématisée

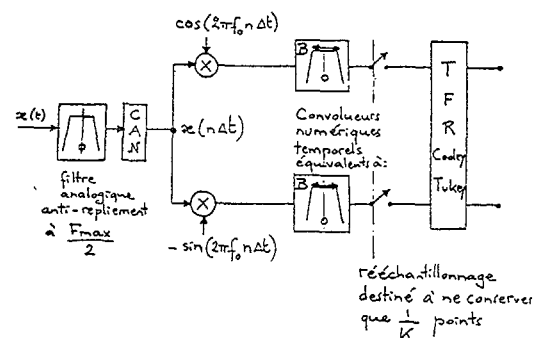
THEORIE ET PRATIQUE DE L'ANALYSE DE FOURIER EN BANDE ETROITE  
 A PARTIR DE PLUSIEURS DIZAINES DE MILLIERS D'ECHANTILLONS.  
 APPLICATION A L'ETUDE DES RESONANCES FAIBLEMENT AMORTIES.



A la lueur des considérations énoncées ci-dessus, il est dès lors limpide de tracer l'organigramme de traitement analogique suivant



sa transposition en numérique devenant excessivement simple :



Le processus de traitement doit être fondamentalement temps réel, à l'aide de dispositifs câblés, à moins de traiter en différé des données acquises en temps réel sur stockage de masse (disque ou bande).

La durée nominale d'une acquisition continue est portée de T à  $\bar{T} = K T$  et le nombre de degrés de liberté pour un traitement passe de N à  $K N$  puisque  $T = N \Delta t$  et  $\bar{T} = K T = K N \Delta t$ .

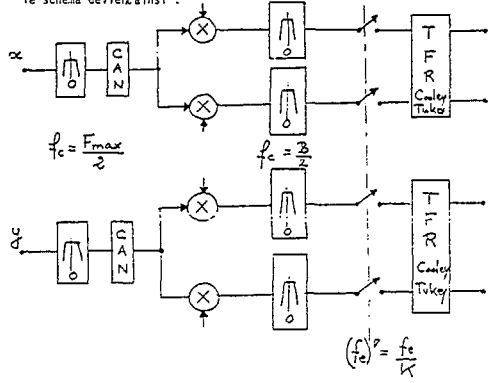
De ce fait la résolution s'effondre en passant de  $\Delta f = \frac{1}{T}$  à  $(\Delta f)^p = \frac{1}{\bar{T}} = \frac{\Delta f}{K}$

dans une bande utile B centrée autour de  $f_0$  telle que  $B = \frac{2(F_{max}/2)}{K} = \frac{F_{max}}{K} = \frac{f_c}{2K}$

avec  $B = \frac{(f_c)^p}{2}$  et  $(f_c)^p = \frac{f_c}{K}$  la fréquence de rééchantillonnage.

et  $(\Delta t)^p = \frac{1}{(f_c)^p} = \frac{K}{f_c} = K \Delta t$  le pas après rééchantillonnage. On appelle K le coefficient de loupe.

Il est à noter qu'un tel processus doit être doublé pour le traitement de deux signaux en vue d'extraire les fonctions de transfert et cohérence le schéma devienra ainsi :



Il y a lieu de souligner l'importance du filtrage analogique avant conversion analogique - numérique qui doit être idéal, de manière à éviter l'apparition de fréquences-images dans les fenêtres de bande étroite B. Celui-ci est assuré avec succès par des filtres elliptiques de CAUER dont la fréquence de coupure définie à 0.1 dB de la bande passante est calée au quart de la fréquence d'échantillonnage. Les filtres analogiques des voies x et y doivent par ailleurs être parfaitement appariés notamment en ce qui concerne le déphasage relatif entre-voies qui doit être restreint au strict minimum (typiquement inférieur à 2 degrés). Des considérations analogues prévalent dans le domaine des fréquences pour les deux ou quatre convolveurs numériques temporels destinés au filtrage passe-bas de largeur B entre  $-\frac{B}{2}$  et  $+\frac{B}{2}$ .

Il faut en effet rappeler que le processus, contrairement à l'hétérodynage analogique, vise non seulement l'analyse en amplitude mais en phase des phénomènes étudiés, plus précisément en parties réelles et imaginaires dont ces paramètres découlent.

Il va de soi qu'en présence de signaux aléatoires, les moyennes d'ensemble s'imposent de manière à réduire les erreurs d'estimation au même titre que dans l'analyse en large bande ; de la sorte le traitement porte sur acquisitions de durée  $\bar{T}$ .

Il découle finalement de ce qui précède que  $(K/2)$  calculs doivent être exécutés en vue d'obtenir sur toute la bande  $F_{max}/2$  l'analyse avec la résolution fine  $(\Delta f)^p$ .

Les pages qui suivent illustrent :

l'application du processus à l'étude d'un dispositif montrant l'incidence directe de la méthode sur l'analyse correcte des fonctions de transfert, et de cohérence,

puis l'extension à l'étude de structures excitées sur pot vibrant électrodynamique en vue de la caractérisation de leurs modes de résonance.

- APPLICATION TYPIQUE A L'ANALYSE DES FONCTIONS DE TRANSFERT ET DE COHERENCE D'UN DISPOSITIF

Analysé en large bande, soit de  $0 + \Delta f$  à  $\frac{F_{max}}{2} = 25,6 \text{ kHz}$

avec une résolution de  $\Delta f = 100 \text{ Hz}$  liée à une durée nominale d'observation de  $T = 1/\Delta f = 10 \text{ ms}$ , ce dispositif présente aux environs de 5 kHz une (?) résonance non sanctionnée par la fonction de cohérence qui est pratiquement nulle, même au bout de  $M = 16$  moyennes d'ensemble.

Seul un temps d'observation plus long, ici  $\bar{T} = K T = 5,12 \text{ s}$  impliquant un coefficient de loupe de  $K = 512$  et un nombre de points acquis et traités sans discontinuité de  $K N = 512 \cdot 1024$  permet d'établir la relation de cause à effet de ce dispositif sanctionné après 16 moyennes par une cohérence quasi unitaire.

De fait on s'aperçoit qu'il y a deux résonances proches l'une de l'autre provoquant des battements vus comme une non-stationnarité au niveau du signal à la sortie de ce dispositif dans une fenêtre d'observation aussi courte que 10 ms.

Le modèle devient cependant parfaitement identifiable après analyse en bande étroite. Une série d'études dans des temps intermédiaires pris entre 10 ms et 5, 12 sec avec des coefficients de loupe en puissance de 2 montre comment s'établissent de mieux en mieux la relation de cause à effet et l'identification correcte de ce dispositif linéaire au fur et à mesure que la durée d'observation croît.

Cette constatation établit nettement qu'il est impossible d'établir une relation convenable de cause à effet d'un dispositif sans que la durée de prise en compte des signaux en présence soit pour le moins supérieure à celle de sa réponse impulsionnelle, surtout si l'excitation n'est pas une impulsion mais du bruit blanc comme c'est le cas ici.

- ETUDE DE STRUCTURES FAIBLEMENT AMORTIES

On dira qu'une structure est faiblement amortie dès lors que la cohérence sanctionnant les résonances de l'impédance mécanique sera inférieure à l'unité. Ceci veut dire qu'avec le moyen d'investigation choisi, la durée d'acquisition est insuffisante pour encadrer la réponse impulsionnelle liée à l'impédance.

Ici également, l'analyse en bande étroite vient à bout de l'identification correcte des phénomènes étudiés, sanctionnée par une cohérence égale à l'unité.

Deux cas d'application à l'étude des structures sont ici illustrés :

le premier concerne l'analyse en 5 régions de l'axe des fréquences où la cohérence présentait des anomalies, et où les incertitudes ont été levées par des loupes appropriées ;

le second illustre, dans une portion de fréquence, la possibilité de juxtaposer des réponses en bande étroite en vue de leur comparaison avec une analyse en large bande présentant des faiblesses en certains points de la cohérence.

Le critère choisi pour la loupe adéquate était de relever à l'unité la cohérence la plus faible et d'appliquer le coefficient à une partie de la bande passante en vue d'une observation globale du phénomène dans cette partie. On relève des différences de l'ordre de 4 dB sur les résonances les plus "touchées" par l'analyse en large bande.

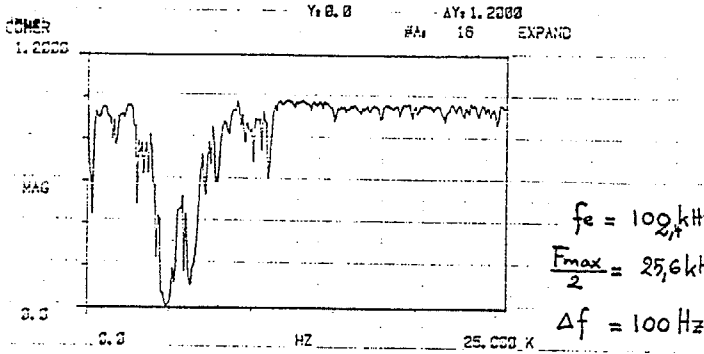


THEORIE ET PRATIQUE DE L'ANALYSE DE FOURIER EN BANDE ETROITE  
 A PARTIR DE PLUSIEURS DIZAINES DE MILLIERS D'ECHANTILLONS.  
 APPLICATION A L'ETUDE DES RESONANCES FAIBLEMENT AMORTIES.

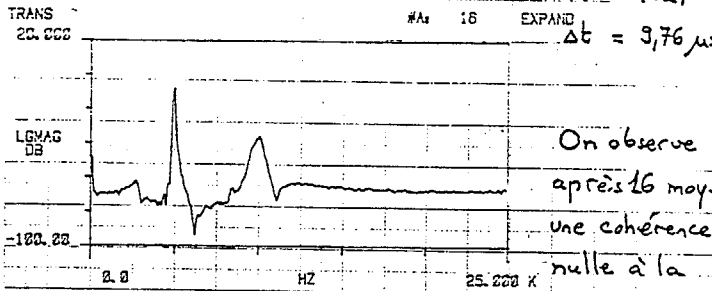
- CONCLUSION

L'analyse en bande étroite est la contribution la plus significative apportée ces dernières années à l'étude des résonances faiblement amorties des structures, et est donc devenue la base indispensable des systèmes destinés à l'analyse des modes de vibration de ces dernières.

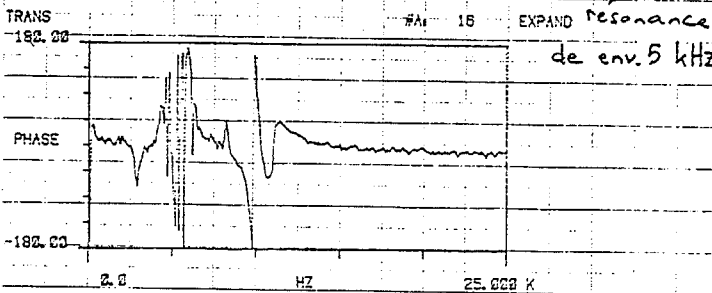
III Etude d'un dispositif en large bande



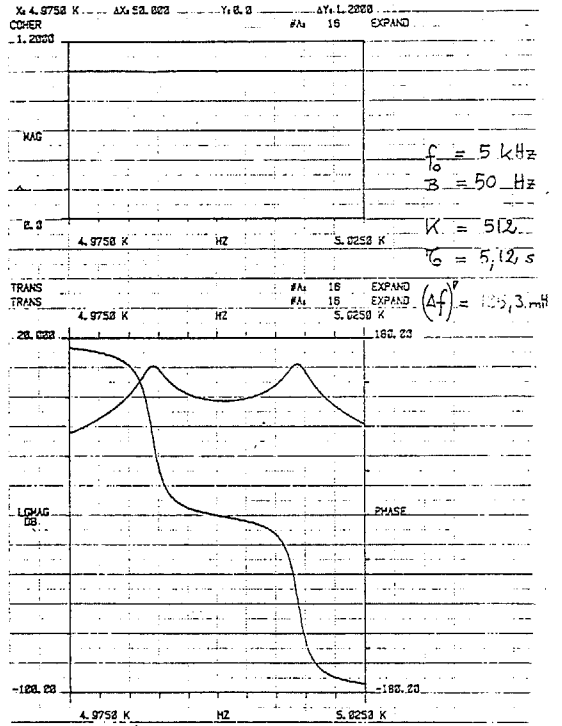
$f_c = 100 \text{ kHz}$   
 $\frac{F_{max}}{2} = 25,6 \text{ kHz}$   
 $\Delta f = 100 \text{ Hz}$   
 $T = 10 \text{ ms}$   
 $N = 1024$   
 $\Delta t = 3,76 \mu s$



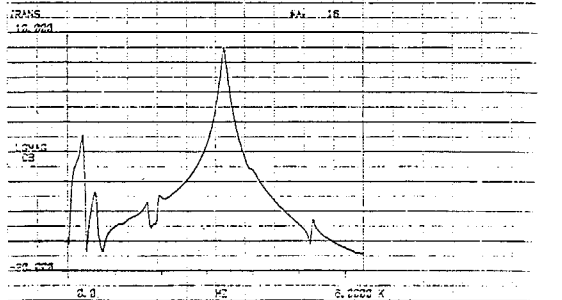
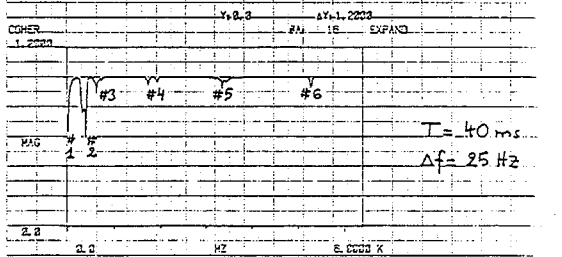
On observe après 16 moy. une cohérence nulle à la resonance de env. 5 kHz



III. 2. Etude du même dispositif en bande étroite

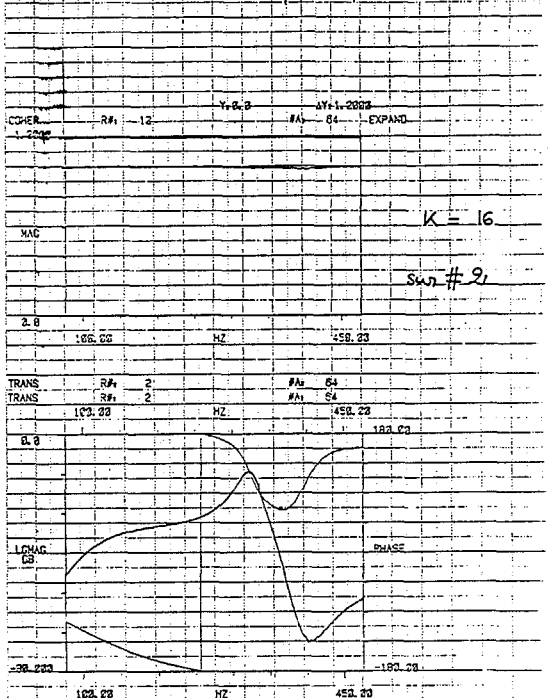


IV A. 1. Etude d'une structure sur pot vibrant en large bande (A)

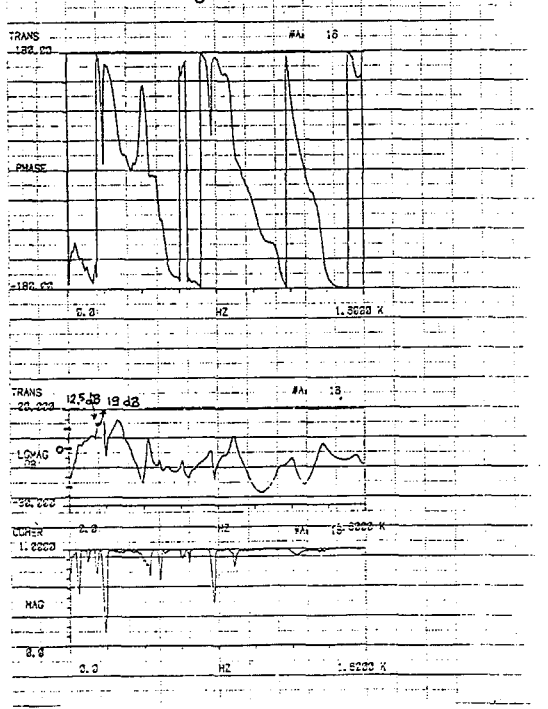


THEORIE ET PRATIQUE DE L'ANALYSE DE FOURIER EN BANDE ETROITE  
 A PARTIR DE PLUSIEURS DIZAINES DE MILLIERS D'ECHANTILLONS.  
 APPLICATION A L'ETUDE DES RESONANCES FAIBLEMENT AMORTIES.

IV A 3. Etude de la structure (A) en bande étroite sur le cas le plus défavorable (#2)



IV B 1. Etude de la structure (B) sur pot vibrant en large bande



IV B 2. Etude partielle de la même structure (B) avec  $K = 32$

