

# SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

## DETECTION-ESTIMATION FORMELLE

J.P.R. LETOUZEY \*

Ingénieur Conseil — 20, rue Foriel, 26000 Valence

### RESUME

*On se pose, de façon formelle, le problème de savoir si un signal bruité appartient ou non à une classe de signaux donnés, et d'estimer le signal dans cette classe.*

*On adopte le formalisme de Dirac comme outil mathématique commode à l'étude abstraite des signaux indépendamment de leurs représentations.*

*On démontre qu'il existe un estimateur formel qui minimise la covariance de l'erreur d'estimation du signal sur la classe considérée. Cet estimateur a une structure formelle de filtre adapté et est, bien entendu, indépendant de toute représentation et peut s'exprimer sur des espaces différents permettant de prendre en compte les problèmes d'échantillonnage.*

*On définit un critère mixte de détection du signal et de son estimation dans la classe.*

*Il est possible d'introduire une notion de récursivité formelle indépendante de la notion du temps et de développer un estimateur récursif du signal.*

*On introduit de façon formelle les fonctions d'ambiguïtés généralisées. On montre comment on peut utiliser l'estimateur formel pour réaliser certains ambiguïmètres. Un exemple est donné à titre d'application.*

### SUMMARY

*The purpose of this paper is to show how it is possible to use a formal treatment to know whether a deterministic signal in noise belongs or not to a given set and to estimate it in that set.*

*Formal techniques of Dirac are used as a convenient tool in studying abstract signals independently of their «representations».*

*It is shown that there exists a formal minimum variance linear estimator which has the formal structure of an adaptive filter. It is of course independent of any «representation» and can be expressed on different abstract spaces which can take account of sampling problems.*

*A mixed criterion is defined to detect and to estimate a signal in its set. It is possible to introduce a formal recursive concept independently of the time concept and to develop a formal recursive estimator.*

*Generalized ambiguity functions are introduced in a formal way. It is shown the formal estimator can be used to realize some ambiguity function processor. An application is presented.*

PLAN • Introduction • 1. Rappel de définitions • 2. Détection estimation formelle • 3. Récursivité formelle • 4. Fonctions d'ambiguïté généralisées • 5. Application • 6. Conclusion • Annexe • Références • Tableaux et figures.

\* Ingénieur Civil de l'Aéronautique — Master of Sciences in Physics M.I.T.



## DETECTION-ESTIMATION FORMELLE

### INTRODUCTION

En physique quantique, il est bien admis maintenant de travailler sur les états des systèmes physiques indépendamment de toute représentation [1]. Il est beaucoup plus rare de voir traiter les signaux en tant que concept abstrait, indépendamment de leurs représentations qu'elles soient temporelles, fréquentielles ou encore temps-fréquence. Dans cet esprit, il est proposé ici de développer un concept abstrait de détecteur-estimateur. Il est toutefois supposé que le concept d'«espace-signal» abstrait [2] est connu du lecteur. Cet espace est désigné ici par  $\mathcal{X}$ , il possède au moins une structure d'espace vectoriel sur un corps, un produit scalaire, et est complet

Le tableau N° 1 présente quatre exemples très utilisés d'un tel espace-signal  $\mathcal{X}$  selon que les représentations sont à horizons non bornés, à horizon temporel ou fréquentiel borné, à horizons temporel et fréquentiel bornés. Les «états libres» de représentations sont définis en tant qu'états propres d'opérateurs de translation. Les relations de fermeture et d'orthogonalité suffisent en elles-mêmes pour définir  $\mathcal{X}$ .

Il est à remarquer qu'il existe d'autres représentations de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathbb{C}$  telles que les représentations  $k-q-m$  et  $k-q-\mu$  pour lesquelles les états libres sont spectres communs aux trois opérateurs de translation  $T(mH)$ ,  $\Theta(y\Omega)$  et respectivement  $\Theta(\lambda\frac{H}{N})$  et  $T(\rho\frac{H}{N})$  où  $H$  et  $\Omega$  sont des horizons bornés temporel et fréquentiel tels que  $\Omega H = 2\pi N$ ,  $m$  et  $v \in \mathbb{Z}$ ,  $\lambda$  et  $\rho \in \mathbb{Z}/N$  [4].

Le tableau N° 2 définit ces représentations ainsi que les représentations dites  $\mu-k$  et  $q-m$  et la représentation  $k-q$ . Ces dernières représentations sont fort utiles pour traiter les problèmes d'échantillonnages temporel, spectral ou numérique de manière formelle. On notera ainsi la correspondance biunivoque qui existe entre  $\mathcal{H}_N$  et  $\tilde{\mathcal{H}}_N \subset \mathcal{H}$  [4].

Les tableaux 1 et 2 peuvent être, bien entendu, généralisés à des «espaces-signaux» définis sur  $\mathbb{C}^n$ , en particulier pour  $n = 2$  et  $3$ , cas très fréquents en physique du solide par exemple [5].

On conçoit que la multiplicité des représentations de  $\mathcal{X}$  et des choix du corps sur lequel  $\mathcal{X}$  est défini, n'est pas sans compliquer inutilement les problèmes pratiques de détection-estimation : un traitement formel permet d'aborder chaque application avec le même point de vue et laisse à l'utilisateur le choix de la représentation la plus adaptée aux conditions expérimentales de l'application.

La notation de Dirac est supposée connue par le lecteur [6], cette notation permet de simplifier l'écriture et rend les démonstrations plus aisées à trouver.

### 1 RAPPEL de DÉFINITIONS :

#### 1.1 Définitions :

##### 1.1.1 États stochastiques :

Sur l'espace  $\mathcal{X}$  on peut définir un processus aléatoire  $|X\rangle$  comme un état de  $\mathcal{X}$  dont les réalisations sont des variables aléatoires. Ainsi, si  $|\phi\rangle$  est un état de base d'une représentation de  $\mathcal{X}$ ,  $\langle\phi|X\rangle$  est une variable aléatoire. Cette définition est indépendante de toute représentation particulière et ne met l'accent que sur l'aspect stochastique du processus en tant que caractère intrinsèque.

##### 1.1.2 État moyen :

$$|m\rangle = E[X]$$

où  $E$  est l'opérateur linéaire d'espérance mathématique.

##### 1.1.3 Opérateur de covariance :

$$\Gamma_X = E[X-m\rangle\langle X-m]$$

Notation :

Nous conviendrons que  $E[|a\rangle\langle a|]$  peut s'écrire  $E[a\rangle\langle a]$  en laissant tomber à droite et à gauche les barres verticales des «kets» et «bras». L'état  $|X-m\rangle$  est bien entendu l'état  $|X\rangle - |m\rangle$ .

##### 1.1.4 Processus stationnaire au sens strict :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad T(t)|X\rangle = |X\rangle$$

où  $T(t)$  est l'opérateur unitaire de translation temporelle sur  $\mathcal{X}$ . Dans ce cas l'état moyen  $|m\rangle$  est une constante.

Rappelons que :  $\forall t \quad \langle t|T(\tau)|s\rangle = \langle t-\tau|s\rangle$   
 $T(\tau)|t\rangle = |t+\tau\rangle$

Processus stationnaire du second ordre :

$$\forall t \quad \begin{cases} T(t)|X\rangle = |X\rangle \\ [\Gamma_X(t), \Gamma_X] = 0 \end{cases}$$

Processus centré :  $E[X] = |0\rangle$

##### 1.1.5 Opérateur de covariance mutuelle : $\Gamma_{XY} = E[X\rangle\langle Y]$

$|X\rangle$  et  $|Y\rangle$  sont dits stationnaires corrélés si :

$$\forall t \quad [\Gamma_X(t), \Gamma_{XY}] = 0$$

##### 1.1.6 Processus à corrélation microscopique :

C'est un processus aléatoire stationnaire du second ordre, centré dont l'opérateur de covariance  $\Gamma_0$  est aléatoire est colinéaire à l'opérateur identité :

$$\Gamma_0 = E[X_0\rangle\langle X_0] \triangleq k \cdot \mathbf{I}$$

Rappelons que l'opérateur  $\mathbf{I}$  est celui qui intervient dans toutes les relations de complétion gérant les différentes «bases» de représentation de  $\mathcal{X}$ .

### 1.2 REMARQUES

1.2.1 Les opérateurs de covariance propre et mutuelle sont hermitiques, donc de valeurs propres réelles.

1.2.2 Le concept de covariance propre met en évidence, de façon formelle, sa véritable signification : c'est l'espérance mathématique d'une projection selon la direction du processus aléatoire centré lui-même. C'est donc une sorte de «projecteur» moyen du processus.



DÉTECTION-ESTIMATION FORMELLE

A ce titre, les valeurs propres de  $\Gamma$  sont toutes réelles positives.

1.2.3 On peut assimiler un opérateur de covariance propre stationnaire à un filtre stationnaire :

$\exists F$  opérateur linéaire tel que :  $\Gamma \equiv FF^+$  &  $\forall t \quad [\mathcal{T}(t), F] = 0$

F n'est défini qu'à un opérateur unitaire près. (Notion de phase généralisée).

Nous rappelons que puisque F est opérateur linéaire sur  $\mathcal{X}$  toute transformée de F existe et est définie sur  $\mathcal{X}$ .

1.2.4 Opérateur de covariance réduite associé au processus aléatoire  $|x\rangle$

$$\gamma_x = \frac{E[|x\rangle\langle x|]}{\text{Trace } E[|x\rangle\langle x|]}$$

Opérateur de corrélation réduite associé à l'état  $|s\rangle$

$$\gamma_s = \frac{|s\rangle\langle s|}{\text{Trace } |s\rangle\langle s|}$$

Les opérateurs  $\gamma_x$  et  $\gamma_s$  sont deux entités tout à fait comparables et émanant de la même définition.

Une telle conception permet de lever la dualité énergie/puissance qui existe entre les signaux aléatoires et/ou déterministes d'énergie ou de puissance finie : covariance réduite et corrélation réduite sont confondues pour tout signal normalisable et ceci indépendamment de toute hypothèse d'ergodicité [2].

Notons bien que  $\text{Trace } E[|x\rangle\langle x|]$  est la puissance moyenne du bruit  $|x\rangle$  et  $\text{tr } |s\rangle\langle s|$  est l'énergie du signal déterministe  $|s\rangle$ .

Le spectre de  $E[|x\rangle\langle x|]$  constitue la densité de puissance de  $|x\rangle$  c'est la distribution spectrale énergétique ; celui de  $|s\rangle\langle s|$  la densité d'énergie du signal.

Les fonctions de corrélation et de covariance réduites reçoivent la même définition :

$$c(\tau) = \text{tr } \gamma \cdot \mathcal{T}^+(\tau)$$

Une telle définition redonne d'ailleurs à ces fonctions leur vrai sens : ce sont des invariants fonctionnels.

- 1.2.5 i)  $\text{tr } \gamma_s = 1$  &  $\text{tr } \gamma_s^2 = 1$  car  $\gamma_s$  projecteur élémentaire
- ii)  $\text{tr } \gamma_x = 1$  &  $1 \leq \frac{1}{\text{tr } \gamma_x^2} \leq \frac{1}{\text{tr } \gamma_x}$

car  $\gamma_x$  n'est pas un projecteur et respect de l'inégalité de Schwartz  $\text{tr } (\Gamma + \lambda I)^2 \gg 0$ .

$\gamma_0$  est la covariance réduite d'un processus à corrélation microscopique.

1.2.6 Sur  $\mathcal{H}_N$  (cf tableau 1), espace hermitien de dimension N, on trouve naturellement :

$$\text{tr } \gamma_{0,N}^2 = \frac{1}{N} \leq \text{tr } \gamma_N^2 \leq 1$$

$\gamma_{0,N}$  n'est, bien entendu, pas un bruit à corrélation microscopique. Ce dernier ne peut pas être représenté sur  $\mathcal{H}_N$  sans subir de coloration.

2 DÉTECTION-ESTIMATION FORMELLE

2.1 Cas général

Soit  $\mathcal{P}\mathcal{X}$  le sous-espace de  $\mathcal{X}$  sur lequel on veut estimer un état quelconque  $|y\rangle$ . Soit  $|\hat{y}\rangle$  l'estimée de  $|y\rangle$  sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$ . Soit P le projecteur de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$ .

$$P^2 = P \quad \& \quad P^+ = P \quad \& \quad P|\hat{y}\rangle = |\hat{y}\rangle$$

Le critère d'estimation est celui qui existe au sens de la norme définie sur  $\mathcal{X}$  c'est-à-dire la distance entre  $|y\rangle$  et  $|\hat{y}\rangle$

$$C = ||y\rangle - |\hat{y}\rangle|^2 \text{ minimum}$$

Pour P donné, la meilleure estimée est bien entendue :

$$|\hat{y}\rangle = P|y\rangle$$

Cette estimation est non biaisée et le critère d'estimation s'écrit alors :

$$C = \langle y | I - P | y \rangle$$

Si l'état  $|y\rangle$  est bruité par le processus stochastique  $|x\rangle$ , l'opérateur de covariance de l'erreur d'estimation due à ce bruit s'exprime par :

$$\Sigma = E[|\hat{z} - \hat{y}\rangle\langle \hat{z} - \hat{y}|]$$

où  $|z\rangle = |y\rangle + |x\rangle$

or  $|\hat{z}\rangle$ , estimée en présence de bruit n'est autre que  $P|y+x\rangle$

soit  $|\hat{y}\rangle + P|x\rangle$

Par conséquent :

$$\Sigma = E[|Px\rangle\langle xP|]$$

soit :  $\Sigma = P\Gamma_x P$

S'il est possible de choisir P dans une classe donnée, on prendra celui qui minimisera  $\Sigma$ .

2.2 Application au filtrage linéaire et à l'estimation

Soit  $\mathcal{X}_F$  le sous-espace de  $\mathcal{X}$  formé par les états de  $\mathcal{P}\mathcal{X}$  filtrés par l'opérateur linéaire F :

$$\mathcal{X}_F = P_F \mathcal{X} \triangleq \{ |s\rangle, \exists |s'\rangle \quad |s\rangle = F P |s'\rangle \}$$

$P_F$  est le projecteur de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{X}_F$ , P est un projecteur particulier sur la classe des signaux qui nous intéressent.

Par exemple P peut être de dimension M :

$$P = \sum_{i=0}^{M-1} |i\rangle\langle i|$$

où  $|i\rangle\langle i|$  est le projecteur élémentaire selon l'état  $|i\rangle$  à reconnaître.

D'après le § 2.1, la meilleure estimée sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$  filtré c'est-à-dire  $\mathcal{X}_F$ , connaissant l'état filtré  $|z'\rangle = F|z\rangle$  n'est autre que :

$$|\hat{y}'\rangle = P_F |z'\rangle$$

et la covariance sur l'erreur d'estimation est  $\Sigma' = P_F \Gamma' P_F$

en définissant :  $\Gamma' = E[|x'\rangle\langle x'|] = F \Gamma F^+$

La valeur du critère d'estimation est :  $C_F = \langle z' | I - P_F | z' \rangle$

Le problème revient à trouver  $P_F$  et à minimiser  $\Sigma$  erreur d'estimation de  $|y\rangle$  due aux bruits.

2.3 Pseudo-inverse fonctionnelle :

Le projecteur  $P_F$  doit satisfaire à

$$(i) \begin{cases} P_F^2 = P_F \quad \& \quad P_F^+ = P_F \\ \forall |s\rangle, \quad P_F F P |s\rangle \equiv F P |s\rangle \end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases} P_F^2 = P_F \\ P_F F P = F P \quad \& \quad P F^+ P_F = P F^+ \end{cases}$$

Posons  $P_F = F P A P F^+$ , A opérateur sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$  solution de :

$$A P F^+ F P = P \quad \& \quad P F^+ F P A = P$$

d'où :

$$A = (P F^+ F P)^{-1} \text{ l'inversion étant comprise sur } \mathcal{P}\mathcal{X}, \text{ c'est-à-dire } A^{-1} A \equiv P.$$

On trouve donc :

$$(ii) \quad P_F = F P (P F^+ F P)^{-1} P F^+$$

qui vérifie bien toutes les propriétés (i).



DÉTECTION-ESTIMATION FORMELLE

Par conséquent :

L'estimée  $\hat{y}$  sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$  est donc :

$$(iii) \quad \hat{y} = P(PF^+FP)^{-1}PF^+z$$

Nous donnerons le nom d'opérateur fonctionnel pseudo-inverse à ce dernier opérateur :

$$P_F^* = P(PF^+FP)^{-1}PF^+$$

Si P est de la forme proposée au § 2.2,  $PF^+FP$  n'est autre qu'une matrice carrée de dimension M et  $P_F^*$  permet d'estimer les paramètres linéaires de projection de  $|y\rangle$  sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$  connaissant  $F|y\rangle$ .

D'après 2.1, cet opérateur est non biaisé et minimise le critère d'estimation à F donné.

Remarque I :

On peut noter que :  $tr P_F = tr P$

Remarque II :

L'opérateur  $PF^+FP$  est hermitique, si le spectre (réel) de  $(PF^+FP)^2$  n'est pas dispersé — bon conditionnement — il est suffisamment régulier pour permettre une inversion stable sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$ .

Remarque III :

Il y a autant d'estimateurs que de filtres possibles, tous sont non biaisés et de critère nul si l'état à estimer est non bruité et appartient à la classe  $\mathcal{P}\mathcal{X}$ .

Ce qui les distingue entre eux c'est d'une part le conditionnement de l'opérateur  $PF^+FP$  conférant plus ou moins de stabilité et d'autre part la covariance de l'erreur d'estimation en présence de bruit.

2.4 Filtrage adapté fonctionnel :

Peut-on trouver F tel que l'erreur d'estimation sur  $\hat{y}$  soit de covariance minimale ?

$$\Sigma = E[\hat{z} - \hat{y}] \langle \hat{z} - \hat{y} \rangle = P_F^* \Gamma^{-1} P_F^*$$

Remarquons que  $\Sigma' \equiv F \Sigma F^+$  et que  $\Sigma$  est un opérateur défini, non négatif sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$  plus aisé à manipuler sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$  que  $\Sigma'$  sur  $\mathcal{X}$ .

$$\Sigma = P(PF^+FP)^{-1}PF^+(F\Gamma F^+)FP(PF^+FP)^{-1}P$$

En général sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$ ,  $\Sigma$  admet une inverse :  $\Sigma^{-1} = P$

$$\Sigma^{-1} = (PF^+FP)(PF^+F\Gamma F^+FP)^{-1}(PF^+FP)$$

On démontre (annexe) que :

$$\Sigma^{-1} \leq P\Gamma^{-1}P$$

et que l'égalité a lieu si  $\Gamma^{-1} \equiv F^+F$ . (On dit que A est supérieur à B, si A-B, A, B sont définis non négatifs).

Le filtre F qui réalise la meilleure estimation de  $|y\rangle$  sur  $\mathcal{P}\mathcal{X}$  est donc un filtre de blanchiment.

Le tableau N° 3 résume les résultats de ce paragraphe 2.

Remarque 1 :

Dans l'expression d'estimation optimale  $\hat{y}$  on peut considérer le filtre d'estimation  $P(P\Gamma^{-1}P)^{-1}P\Gamma^{-1}H^{-1}$

comme un filtre de blanchiment  $H^{-1}$  suivi d'un filtre adapté

$$P_F = P(P\Gamma^{-1}P)^{-1}P\Gamma^{-1}H^{-1}$$

ou encore :

$$\hat{y} = \sum \Gamma^{-1} [ |y\rangle + |x\rangle ]$$

Remarque 2 : si  $P = \sum |i\rangle \langle i|$  avec  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$  alors

$$\langle i|P\Gamma^{-1}P|i\rangle \equiv \langle i|\Gamma^{-1}|i\rangle \triangleq \Sigma_{ij}^{-1}$$

Il vient

Remarque 3 :

P peut être un projecteur plus complexe tel qu'une troncatu-

re, un échantillonnage, un interpolateur (respectivement PT, PN, PI temporels, PT.PN.PI est un projecteur).

Ainsi l'expression suivante a une signification :

$$\begin{bmatrix} \langle 0|\hat{y} \rangle \\ \dots \\ \langle M-1|\hat{y} \rangle \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} \langle 0|PT.PN.PI.\tilde{F}^{-1}.PI|S_N \rangle \\ \dots \\ \langle M-1|PT.PN.PI.\tilde{F}^{-1}.PI|S_N \rangle \end{bmatrix}$$

avec :

$$\Sigma_{ij}^{-1} = \langle i|PT.PN.PI.\tilde{F}^{-1}.PI.PN.PT|j \rangle$$

Une telle procédure a été expérimentée lors d'un problème d'inversion de champ (filtrage spatial) et a donné de bons résultats :

Il a été remarqué notamment un meilleur comportement des algorithmes de recherches de minima dû principalement à l'utilisation d'un PI particulier, le levé de doute entre des minima locaux dû à l'introduction des PT et PN dans le calcul de  $\Sigma$  enfin un critère d'estimation plus optimal dû à l'introduction de  $\tilde{F}^{-1}$  qui dans ce cas particulier, prenait en compte un bruit spatial basse fréquence important causé par l'environnement des capteurs et leur bruit propre, et assurait une meilleure convergence de l'algorithme.

2.5 Critère de détection-estimation :

Le critère d'estimation au sens du § 2.1 n'est autre que

$$C_e = \langle z' | I - P_F | z' \rangle$$

Le rapport signal à bruit a posteriori est :

$$S/B = \frac{\langle \hat{y}' | \hat{y}' \rangle}{tr \Sigma'} = \frac{\langle z' | \Sigma^{-1} | z' \rangle}{tr P} = \frac{\langle \hat{y}' | \hat{z}' \rangle}{tr P}$$

et constitue un critère de détection dans le bruit.

Nous proposons comme critère mixte de détection-estimation la forme suivante :

$$C_{D-e} = \frac{\langle \hat{y}' | z' \rangle}{tr P + \langle z' | I - \Sigma^{-1} | z' \rangle}$$

$C_e$ , qu'on appellera énergie résiduelle,

est l'énergie de la partie du signal qui, après blanchiment, n'est pas reconnue comme faisant partie de la classe  $\mathcal{P}\mathcal{X}$ .  $\langle \hat{y}' | \hat{y}' \rangle$  est l'énergie du signal, après filtrage, identifié comme signal de la classe  $\mathcal{P}\mathcal{X}$ ,  $tr P$  est l'espérance mathématique de l'énergie du bruit, après blanchiment, reconnu comme partie de la classe  $\mathcal{P}\mathcal{X}$ .

Si  $C_e = 0$ ,  $C_{D-e}$  n'est autre que  $S/B$ .

Si  $C_e \neq 0$  et  $S/B \gg 1$ ,  $C_{D-e}$  peut être très petit si le signal n'est pas de la classe  $\mathcal{P}\mathcal{X}$ .

Si P est  $\sum_{i=0}^{M-1} |i\rangle \langle i|$  alors la trace de P est M et

$\langle \hat{y}' | \hat{y}' \rangle$  est donné par :

$$\langle \hat{y}' | \hat{z}' \rangle = \sum \langle i | \hat{y}' \rangle \langle i | H^{-1} | z' \rangle$$

Il faut noter par ailleurs que

$\langle z' | z' \rangle = \langle z | \Gamma^{-1} | z \rangle$ , énergie du signal blanchi, est une grandeur sans dimension.

2.6 Application :

Reconnaitre un signal de la forme :

$$S_{\lambda_0 \lambda_1}(t) = \lambda_0 \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha}} \left( 1 + \left( \frac{t-\tau}{\alpha} \right)^2 \right)^{-1/2} + \lambda_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} \frac{t-\tau}{2 + \left( \frac{t-\tau}{\alpha} \right)^2}$$

c'est-à-dire en définitive estimer les paramètres  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ . Le signal  $s'(t)$  est issu d'un capteur de fonction de transfert  $G(p)$ , le bruit à la sortie du capteur est de densité spectrale  $\phi(\omega)$ .

$$P = |0\rangle \langle 0| + |1\rangle \langle 1|$$

$$s_0(t) = \langle t | 0 \rangle \quad \& \quad s_1(t) = \langle t | 1 \rangle$$

DÉTECTION-ESTIMATION FORMELLE

En appliquant le formalisme de Dirac aux relations du tableau 3, dans une représentation fréquentielle, on trouve naturellement :

$$\langle i | \Gamma^{-1} | j \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_i^*(\omega) S_j(\omega)}{\phi(\omega)} |G(\omega)|^2 d\omega \triangleq \Sigma_{ij}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\lambda}_0 \\ \hat{\lambda}_1 \end{bmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} S_0^*(\omega) \cdot S(\omega) \cdot \frac{G^*(\omega)}{\phi(\omega)} d\omega \\ \int_{-\infty}^{\infty} S_1^*(\omega) \cdot S(\omega) \cdot \frac{G^*(\omega)}{\phi(\omega)} d\omega \end{bmatrix} = \Sigma \begin{bmatrix} \tilde{\lambda}_0 \\ \tilde{\lambda}_1 \end{bmatrix}$$

Le critère de détection-estimation s'écrit alors dans :

$$C_{d,e} = \frac{\hat{\lambda}_0 \tilde{\lambda}_0 + \hat{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_1}{2 + \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega - \hat{\lambda}_0 \tilde{\lambda}_0 - \hat{\lambda}_1 \tilde{\lambda}_1}$$

On rappelle que l'erreur d'estimation sur  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$  est :

$$\Sigma = (P \Gamma^{-1} P)^{-1}$$

En pratique, si l'on travaille sur  $\mathcal{H}_N$  — en prenant les précautions d'usage [4] — il faut introduire le projecteur de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathcal{H}_N$  et passer par isomorphisme sur  $\mathcal{H}_N$  en toute rigueur.

2.7 Cas de plusieurs capteurs :

On peut généraliser ce formalisme au cas de la détection-estimation de K signaux  $|\gamma_i\rangle$  à reconnaître sur les classes  $P_i \mathcal{X}$  et limités par les bruits bi. On introduit alors :

$$\mathcal{P} = \mathcal{D}iag[P_0, P_1, \dots, P_{K-1}] \quad K \quad B = (b_0, b_1, \dots, b_{K-1})^t$$

$$\Gamma = E[B \langle B |] \quad K \quad |\hat{\gamma}\rangle = (|\hat{\gamma}_0\rangle, \dots, |\hat{\gamma}_{K-1}\rangle)^t$$

$$|z'\rangle = (|z'_0\rangle, \dots, |z'_{K-1}\rangle)^t$$

La meilleure estimée est alors :

$$|\hat{\gamma}\rangle = \mathcal{P} (\mathcal{P} \Gamma^{-1} \mathcal{P})^{-1} \mathcal{P} \mathcal{X}^+ |z'\rangle$$

Le filtre  $\mathcal{X}^+$  est un filtre de blanchiment d'orthogonalisation des K bruits.

Le critère global de détection-estimation des K signaux est alors :

$$C_{d-e} = \frac{\langle \hat{\gamma} | \hat{\gamma} \rangle}{b^t \mathcal{P} + \langle z' | \mathcal{I} - \mathcal{P} \mathcal{F} | z' \rangle}$$

L'introduction d'un tel critère global s'avère intéressant lorsque les rapports signaux à bruits sont très différents d'un cas de détection à un autre et lorsque le filtre  $\Gamma^{-1}$  est auto-adaptatif : on ne privilégie a priori aucune voie par rapport aux autres.

3. RÉCURSIVITÉ FORMELLE

3.1 Évolution et découvert :

En général, l'observateur n'a pas accès d'emblée à toute une représentation de  $\mathcal{X}$ , mais celle-ci lui est révélée petit à petit dans un sens d'évolution bien défini, ceci veut dire que la complétion de l'espace ne lui est pas accessible d'un seul coup.

Soit donc une partition de  $\mathcal{X}$  définie par les projecteurs orthogonaux  $P_i$ , que nous supposons dénombrables pour commodité des démonstrations.

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_i \quad K \quad P_i = P_i^+ \quad K \quad \Sigma P_i = \mathcal{I}$$

$\mathcal{I}$  n'est pas accessible, mais est découvert petit à petit, soit le projecteur défini par la récurrence :

$$\Pi_{n+1} = \Pi_n + P_{n+1}$$

Nous donnerons à l'indice n le nom d'évolution. Celle-ci est orientée dans le sens croissant de n.  $\Pi_n$  est le projecteur de découvert ou découvert à l'évolution n.

3.2 Estimateur fonctionnel récursif : cas du bruit blanc :

$$s: \quad \Gamma = \mathcal{I} \quad , \quad |\hat{\gamma}\rangle = P |z\rangle$$

A l'évolution n, l'observateur n'a accès qu'au découvert  $|z, n\rangle = \Pi_n |z\rangle$  la meilleure estimée à l'évolution n'est donc, d'après le § 2 :

$$|\hat{\gamma}, n\rangle = P (\Pi_n P)^{-1} P |z, n\rangle = \Sigma_n |z, n\rangle$$

$$\text{où } \Sigma_n = P (P \Pi_n P)^{-1} P$$

Le problème est d'évaluer l'évolution n+1 de l'estimée et de la covariance d'erreur, on démontre alors :

$$\Sigma_{n+1}^{-1} = \Sigma_n^{-1} + P P_{n+1} P \triangleq P \Pi_{n+1} P$$

d'où

$$j) \quad \Sigma_{n+1} = \Sigma_n - \Sigma_n P_{n+1} [P_{n+1} + P_{n+1} \Sigma_n P_{n+1}]^{-1} P_{n+1} \Sigma_n$$

L'évolution de l'estimée se déduit de :

$$|\hat{\gamma}, n+1\rangle = \Sigma_{n+1} |z, n+1\rangle = \Sigma_{n+1} |z, n\rangle + \Sigma_{n+1} P_{n+1} |z\rangle$$

soit :

$$j') \quad |\hat{\gamma}, n+1\rangle = |\hat{\gamma}, n\rangle + \Sigma_{n+1} [P_{n+1} |z\rangle - P_{n+1} |\hat{\gamma}, n\rangle]$$

La nouvelle estimation est donc égale à l'ancienne augmentée de l'écart entre l'estimation ancienne et la mesure évaluée à l'évolution n+1, affectée du gain fonctionnel  $K = \Sigma_{n+1}$ .

$P_{n+1} |z\rangle$  caractérise bien la nouvelle information sur  $|z\rangle$

L'état :  $|iN\rangle = P_{n+1} |z\rangle - P_{n+1} |\hat{\gamma}, n\rangle$  est l'innovation à l'évolution n+1.

On appellera opérateur d'innovation :

$$IN_{n+1} = P_{n+1} - P_{n+1} \Sigma_n \Pi_n$$

On démontre que la covariance d'innovation est donnée par :

$$ii) \quad Q_{n+1} = P_{n+1} + P_{n+1} \Sigma_n P_{n+1}$$

On peut donc écrire :

$$\Sigma_{n+1} = \Sigma_n - \Sigma_n Q_{n+1}^{-1} \Sigma_n$$

On définira  $Q_{n+1}^{-1}$  par :

$$Q_{n+1}^{-1} Q_{n+1} = P_{n+1}$$

Le critère d'estimation à l'évolution n est

$$C_{n+1} = \langle z, n+1 | \hat{\gamma}, n+1 \rangle$$

On définit l'opérateur critère par :

$$C_{n+1} \triangleq \langle z | C_{n+1} | z \rangle \text{ soit } C_{n+1} = \Pi_{n+1} \Sigma_{n+1} \Pi_{n+1}$$

et on démontre que :

$$jv) \quad C_{n+1} = C_n + P_{n+1} - IN_{n+1}^+ Q_{n+1}^{-1} IN_{n+1}$$

Application :

$$P_n = |n\rangle \langle n|$$

$$C_{n+1} = C_n + z^2(n+1) - |z(n+1) - \hat{\gamma}_n(n+1)|^2 \frac{1}{1+k^2}$$

avec  $k_{n+1}^2 = \langle u+1 | \Sigma_u | u+1 \rangle$

Les relations (j) à (jv) constituent la représentation récursive de l'estimateur selon les  $P_i$ .

3.3 Initialisation à l'évolution n : cas d'un bruit quelconque :

Soit  $P_F$  le projecteur sur l'ensemble des signaux de la classe

$P \mathcal{X}$  filtrés :

$$i) \quad P_F = F P (P F^+ P F)^{-1} F^+ P$$

On souhaite estimer  $|\gamma\rangle$  connaissant le découvert

$$\Pi_n F |z\rangle = |z', n\rangle$$

Le projecteur sur l'espace des signaux ainsi découverts est :

$$ii) \quad P_{F,n} = \Pi_n P_F (P_F \Pi_n P_F)^{-1} P_F \Pi_n$$

En explicitant  $P_F$  dans  $P_{F,n}$  par (i), on démontre que :

$$P_{F,n} = \Pi_n F P (P F^+ \Pi_n F P)^{-1} P F^+ \Pi_n$$

En conséquence, la meilleure estimée sur  $P \mathcal{X}$  à l'évolution n, connaissant  $|z', n\rangle$  est :

$$\begin{cases} |\hat{\gamma}, n\rangle = \Sigma_n F^+ |z', n\rangle \\ \Sigma_n = P (P F^+ \Pi_n F P)^{-1} P \quad F^+ \Gamma F = \mathcal{I} \end{cases}$$

On notera que le blanchiment  $F^+$  élargit l'horizon de  $|z', n\rangle$





DÉTECTION-ESTIMATION FORMELLE

3.4 Estimateur récursif : cas d'un bruit quelconque :

$$\Sigma_{n+1}^{-1} = \Sigma_n^{-1} + PF^+ P_{n+1} FP$$

Il suffit donc de remplacer dans les expressions (i) à (iv)

du § 3.2  $PP_{n+1}$  par  $PF^+ P_{n+1}$  et  $P_{n+1}P$  par  $P_{n+1}FP$ .  
d'où :

iii)  $Q_{n+1} = P_{n+1} + P_{n+1}F\Sigma_n F^+ P_{n+1}$

i)  $\Sigma_{n+1} = \Sigma_n - \Sigma_n F^+ Q_{n+1}^{-1} F \Sigma_n$

ii)  $|\hat{y}'_{n+1}\rangle = |\hat{y}'_n\rangle + \Sigma_{n+1}^{-1} F^+ |N\rangle$   
 $|N\rangle = P_{n+1}|z'\rangle - P_{n+1}|\hat{y}'_n\rangle$

$$|N_{n+1}\rangle = P_{n+1} - P_{n+1}F\Sigma_n F^+ \Pi_n$$

iv)  $c'_{n+1} = \langle z' | C_{n+1} | z' \rangle = \langle z'_{n+1} | \hat{y}'_{n+1} \rangle$

$$C_{n+1} = C_n + P_{n+1} - |N_{n+1}\rangle \langle N_{n+1}|$$

3.5 Généralisation :

Comme au § 2.7, il est possible de généraliser la récursivité formelle au cas de K signaux  $\{y_i\}$

4 FONCTIONS D'AMBIGUITÉ GÉNÉRALISÉE :

4.1 Définition :

L'expérimentateur, «l'observateur», qui décrit un phénomène adopte un système de coordonnées inertielles  $\vec{\alpha}$  très particulier parmi beaucoup d'autres pour décrire le phénomène. Tout observateur utilisant un système de coordonnées inertielles différent est capable de rendre compte de ces phénomènes, en particulier d'observer et d'identifier un signal. Si deux observateurs O et O' utilisent respectivement les systèmes de coordonnées inertielles S et S', O observera l'état  $|i\rangle$  tandis que O' observera l'état  $|i'\rangle$ , on définit ainsi un opérateur  $U$  sur  $\mathcal{H}$  qui doit satisfaire au principe de superposition des états et à la conservation du produit scalaire. U est donc un opérateur unitaire :  $UU^\dagger = I$

On définit la loi de composition  $U(\vec{\alpha}') U(\vec{\beta}) = U(\mathcal{R}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}))$  sur ces opérateurs qui leur confère une structure du groupe de Lie si f est une fonction analytique des variables continues  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  [8].

Si  $U(\vec{\alpha})$  et  $V(\vec{\beta})$  sont des opérateurs unitaires de ce type, appartenant ou non au même groupe ou sous-groupe, on appelle fonction d'ambiguïté entre  $\vec{\alpha}$  et  $\vec{\beta}$  la fonction :

$$\chi(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \text{Tr} U(\vec{\alpha}) \gamma V^\dagger(\vec{\beta}) \in \mathbb{C}$$

où  $\gamma$  est l'opérateur de corrélation ou de covariance réduite du signal observé (cf § 1.2.4). C'est un invariant fonctionnel.

4.2 Exemples :

4.2.1 Autocorrélation :

$$\chi(t, t') = \text{tr} \mathcal{T}(t) \gamma \mathcal{T}^\dagger(t') = \frac{\varphi(t-t)}{\varphi(t)}$$

4.2.2 Ambiguïté temps-fréquence :

$$\chi(t, \omega) = \text{tr} \mathcal{T}(t) \gamma \Theta^\dagger(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(u-t) \cdot \delta^*(u) e^{-i\omega u} du$$

4.2.3 Ambiguïté translation-affinité :

$$\chi(\tau, \alpha) = \text{tr} \mathcal{A}(\alpha) \gamma \mathcal{T}^\dagger(\tau) \approx 0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot \delta^*(t-\tau) \frac{d\tau}{\langle \alpha | \alpha \rangle}$$

Nota :

Si  $X, P, J$  sont les générateurs des groupes de Lie de translations fréquentielles, de translations temporelles et d'affinité, on rappelle que :

$$[X, P] = i \quad [J, X] = iX \quad [P, J] = iP$$

et que :

$$\mathcal{T}(\tau) = e^{-i\tau P} \quad \mathcal{X}(\omega) = e^{i\omega X} \quad \mathcal{A}(\alpha) = e^{i\text{Log} \alpha J}$$

Ainsi :

$$\langle t | \mathcal{T}(\tau) | s \rangle = \langle t-\tau | s \rangle \quad \mathcal{X} \langle \omega | \Theta(\tau) | s \rangle = \langle \omega + \tau | s \rangle$$

$$\langle \alpha | \mathcal{A}(\alpha) | s \rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \langle \frac{\alpha}{\alpha} | s \rangle$$

4.2.4 Généralisation

Si  $\mathcal{H}$  est défini sur un corps  $\mathbb{C}^n$ , U et V peuvent être des opérateurs des sous-groupes de Galilée ou de Lorentz, couramment utilisés en Physique [9].

4.3 Fonction d'interambiguïté :

Soit :  $\gamma_{ij} = \frac{|i\rangle \langle i|}{\langle i|i\rangle \langle j|j\rangle}^{1/2}$  ou  $\frac{E[|X_i\rangle \langle X_j|]}{(\text{tr} \Gamma_{X_i} \cdot \text{tr} \Gamma_{X_j})^{1/2}}$

Alors :

$$\chi_{ij}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \triangleq \text{tr} U(\vec{\alpha}) \gamma_{ij} V^\dagger(\vec{\beta})$$

4.4 Intensité d'ambiguïté :

$$I_{ij}(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \triangleq |\chi_{ij}(\vec{\alpha}, \vec{\beta})|^2$$

C'est la fonction habituellement générée par les processeurs à optique cohérente [7].

5 APPLICATION

Soit :  $P = \sum |i\rangle \langle i|$  avec  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$

$$\chi_i(\alpha, \tau) = \text{tr} \mathcal{A}(\alpha) \frac{|i\rangle \langle i|}{\langle i|i\rangle} \mathcal{T}^\dagger(\tau) = \frac{\langle s | \mathcal{T}(\tau) \mathcal{A}^\dagger(\alpha) | i \rangle}{\sqrt{\langle s | s \rangle}}$$

On définit alors l'intensité d'ambiguïté par rapport à l'espace  $\mathcal{P}\mathcal{H}$  par :

$$I(\alpha, \tau) \triangleq \sum_i |\chi_i(\alpha, \tau)|^2 = \frac{\langle s | \mathcal{T}(\tau) \mathcal{A}(\alpha) \mathcal{P} \mathcal{A}^\dagger \mathcal{T}^\dagger | s \rangle}{\langle s | s \rangle}$$

On reconnaît ici le critère d'estimation de l'appartenance de l'état  $\mathcal{A}^\dagger \mathcal{T}^\dagger | s \rangle$  à la classe  $\mathcal{P}\mathcal{H}$ . Ainsi le critère d'estimation défini au § 2 apparaît-il comme une fonction d'ambiguïté particulière lorsque P est observé selon des points de vue inertiels différents.

Dans l'application du § 2.6 on a ainsi :

$$\langle t | \mathcal{T}(\tau) \mathcal{A}(\alpha) | i \rangle = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \langle \frac{t-\tau}{\alpha} | i \rangle = s_i(t)$$

Ceci reste bien entendu valable pour tout projecteur et a fortiori pour le PF optimal (cf § 2.3).

Le critère de détection-estimation défini au § 2.5 est donc à considérer comme une extension de la notion d'intensité d'ambiguïté : appliqué à l'exemple du § 2.6, il permet de trouver les paramètres non linéaires «d'observation»  $\tau$  et  $\alpha$ , puis ceux d'estimation d'état  $\lambda_0$  et  $\lambda_1$ .

La figure N° 1 représente un signal de la forme considérée au § 2.6, tronqué volontairement. La figure N° 2 représente le critère de détection-estimation du § 2.5 : c'est un véritable ambiguïmètre, le plan considéré pour le tracé est  $\tau$  en abscisse,  $\text{Log} \alpha$  en ordonnée.



## DÉTECTION-ESTIMATION FORMELLE

### 6 CONCLUSION

L'intention de l'auteur était d'une part de donner un très bref aperçu d'un certain nombre d'idées sur le plan purement formel dans le but, non pas de compliquer les notions classiques, mais, au contraire, de les intégrer dans un formalisme d'usage très général et simple permettant d'aborder des problèmes de complexité très différentes avec le même point de vue, d'autre part de montrer que de tels outils sont effectivement applicables.

Le formalisme qui vient d'être décrit a fait l'objet de plusieurs applications par le Société CROUZET que cela soit en représentation spectrale, en temps différé, en récursivité temps réel, avec ou sans auto-adaptations du filtre de blanchiment. La plupart des applications considérées traitait du problème d'inversion de champ physique en temps réel. Crouzet présente au cours de ce même colloque, le système informatique qui réalise cet ambiguïmètre «affinité-translation» en temps réel avec une définition de près de 2000 points.

L'auteur tient à remercier la Société Crouzet pour lui avoir traité l'exemple particulier présenté ici et remercie son collègue et ami Monsieur P. CARTON du DERA (CERT) qui a eu le grand mérite de démontrer la faisabilité pratique d'une telle approche formelle. Il remercie également Monsieur J.M. GLINER de chez Crouzet pour avoir mis en œuvre l'application temps réel sur le plan informatique avec succès et très grande méthode.

### RÉFÉRENCES

- (1) GORDON BAYM  
*Lectures on quantum mechanics*  
W.A. Benjamin, Inc. April 1973
- (2) G. BONNET  
*Considérations sur la représentation de l'analyse harmonique des signaux déterministes ou aléatoires.*  
*Annales des télécommunications. Tome 23, numéros 3 - 4, 1968*
- (3) A. BOHEC  
*Théorie des distributions, d'après le cours de l'École Polytechnique de Monsieur L. SCHWARTZ (1970)*
- (4) J.P.R. LETOUZEY  
*Echantillonnage formel (1976), document non diffusé*
- (5) W.A. HARRISON  
*Solid State Theory Mc. Graw-Hill Book (1970)*  
D. PINES *Elementary excitations in Solids. W.A. Benjamin (1963)*  
J. ZAK  
*Dynamics of electrons in Solids in external fields (k-q representation)*  
*Physical Review vol. 168, N3 (1969 - vol. 177, N3*
- (6) P.A.M. Dirac, loc. cit, foot note 3, p 47 ch. II
- (7) *Ambiguity Function display : an improved coherent processor.*  
*Applied optics / vol. 16, N3 / March 1977*
- (8) M. HAMER MESH  
*Group Theory, Addison-Wesley P.C. Inc. 1962*
- (9) S. WIENBERG  
*Advanced Quantum Mechanics, Physics 323. Fall 1972, M.I.T.*

ANNEXE k)  $H[xI + H^{-1}BH^{-1}][xI + H^{-1}BH^{-1}]^T H^{-1} \equiv$   
 $x^2 \Gamma + 2x B + B \Gamma^{-1} B^+ \quad \text{avec} \quad H H^T = \Gamma$   
 kk)  $(k) \Rightarrow x^2 \Gamma + 2x B + C \equiv V V^T + (C - B \Gamma^{-1} B^+)$   
 avec  $V = xH + B H^{-1} = H[xI + H^{-1}BH^{-1}]$   
 kkk)  $(xA + B) \Gamma (xA + B)^T$  est D.P.  $\forall x$ .  
 kv)  $(k) \wedge (kk) \Rightarrow$   
 $[A \Gamma B^+ + B \Gamma A^+][A \Gamma A^+]^{-1}[A \Gamma B^+ + B \Gamma A^+] \leq 4 B \Gamma B^+$

Inégalité de Schwartz fonctionnelle sur les formes définies positives.

u) Application :

$$A = P F^T F \Gamma^{-1} \quad \wedge \quad B = P$$

$$(P F^T F P)(P F^T F \Gamma^{-1} F^T F P)^{-1}(P F^T F P) \leq P \Gamma^{-1} P$$

soit  $\Sigma^{-1} \leq P \Gamma^{-1} P \quad \text{cf. § 2.4}$

L'égalité a lieu si :  $F F^T = I \quad \text{ou} \quad F^T F \Gamma = I$ .



DÉTECTION-ESTIMATION FORMELLE

TABEAU N° 1: ESPACES FONCTIONNELS USUELS EN TRAITEMENT DE SIGNAL

$\mathcal{H}$	ETAT LIBRE	ETAT PROPRE DES OPERATEURS	ORTHOGONALITE	COMPLETION
$\mathcal{H}$	$ u\rangle \quad u \in \mathbb{R}$	Generateur des translations spectrales: $X$	$\langle u   u' \rangle = \delta(u-u')$	$\int_{-\infty}^{+\infty}  u\rangle du \langle u  = I$
	$ k\rangle \quad k \in \mathbb{R}$	Generateur des translations spatiales: $K$	$\langle k   k' \rangle = \delta(k-k')$	$\int_{-\infty}^{+\infty}  k\rangle dk \langle k  = I$
	$\varphi_k(u) = \langle u   k \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{iku}$		$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k-k')u} du = \delta(k-k')$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(u-u')} dk = \delta(u-u')$
$\mathcal{H}_H$ $\mathcal{H}_{\text{c.c.R}}$	$ u\rangle \quad u \in H$	$X$	$\langle u   u' \rangle = \delta(u-u')$	$\int_H  u\rangle du \langle u  = I$
	$ \mu\rangle \quad \mu \in \mathbb{Z}$	Generateur des translations sur $H$	$\langle \mu   \mu' \rangle = \delta_{\mu, \mu'}$	$\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}  \mu\rangle \langle \mu  = I$
	$\varphi_{\mu}(u) = \langle u   \mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{H}} e^{\frac{2i\pi \mu u}{H}}$		$\frac{1}{H} \int_H e^{\frac{2i\pi(\mu-\mu')u}{H}} du = \delta_{\mu, \mu'}$	$\frac{1}{H} \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2i\pi \mu (u-u')}{H}} = \delta(u-u')$
$\mathcal{H}_{\Omega}$ $\mathcal{H}_{\text{c.c.M}}$	$ m\rangle \quad m \in \mathbb{Z}$	Generateur des translations sur $\Omega$	$\langle m   m' \rangle = \delta_{m, m'}$	$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}  m\rangle \langle m  = I$
	$ k\rangle \quad k \in \Omega$	$K$	$\langle k   k' \rangle = \delta(k-k')$	$\int_{\Omega}  k\rangle \langle k  dk = I$
	$\varphi_k(m) = \langle m   k \rangle = \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{\frac{2i\pi m k}{\Omega}}$		$\frac{1}{\Omega} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{\frac{2i\pi m (k-k')}{\Omega}} = \delta(k-k')$	$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} e^{\frac{2i\pi k (m-m')}{\Omega}} dk = \delta_{m, m'}$
$\mathcal{H}_N$	$ m\rangle \quad m \in \mathbb{Z}/N$	Echantillon	$\langle m   m' \rangle = \delta_{m, m'}$	$\sum_0^{N-1}  m\rangle \langle m  = I$
	$ \mu\rangle \quad \mu \in \mathbb{Z}/N$	Mode propre	$\langle \mu   \mu' \rangle = \delta_{\mu, \mu'}$	$\sum_0^{N-1}  \mu\rangle \langle \mu  = I$
	$\varphi_{\mu}(m) = \langle m   \mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2i\pi m \mu}{N}}$		$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi m (\mu-\mu')}{N}} = \delta_{\mu, \mu'}$	$\frac{1}{N} \sum_{\mu=0}^{N-1} e^{\frac{2i\pi \mu (m-m')}{N}} = \delta_{m, m'}$

TABEAU N° 2: AUTRES REPRESENTATIONS DE L'ESPACE FONCTIONNEL  $\mathcal{H}$

$\mathcal{H}$	ETAT LIBRE	ETAT PROPRE DES OPERATEURS	ORTHOGONALITE	COMPLETION
$\mathcal{H}$	$ \mu, k\rangle \quad \mu \in \mathbb{Z}, k \in \Omega$	$K \otimes T(m \frac{2\pi}{\Omega})$	$\langle \mu', k'   \mu, k \rangle = \delta_{\mu, \mu'} \delta(k-k')$	$\sum_{\mu=0}^{N-1} \int_{\Omega} dk  \mu, k\rangle \langle \mu, k  = I$
	$ q, m\rangle \quad q \in H, m \in \mathbb{Z}$	$X \otimes \Theta(\mu \frac{2\pi}{H})$	$\langle q', m'   q, m \rangle = \delta(q-q') \delta_{m, m'}$	$\sum_m \int_H dq  q, m\rangle \langle q, m  = I$
	$\langle q, m   \mu, k \rangle = \frac{1}{\sqrt{H\Omega}} \exp[ikq + \frac{2\pi}{\Omega} mk + \mu \Omega q]$			
	$ k, q\rangle \quad k \in \Omega, q \in H, N = \frac{H\Omega}{2\pi}$	$T(mH) \otimes \Theta(\mu \Omega)$	$\langle k', q'   k, q \rangle = \delta(k-k') \delta(q-q')$	$\int_{\Omega} dk \int_H dq  k, q\rangle \langle k, q  = I$
	$ k, q, m\rangle \quad k \in \Omega/N, q \in H/N, m \in \mathbb{Z}/N, \Omega H = 2\pi N$	$T(nH) \otimes \Theta(\mu \Omega) \otimes \Theta(\nu \frac{\Omega}{N})$	$\langle k', q', m'   k, q, m \rangle = \delta_{m, m'} \delta(k-k') \delta(q-q')$	$\int_{\Omega/N} dk \int_{H/N} dq \sum_{m=0}^{N-1}  k, q, m\rangle \langle k, q, m  = I$
$ k, q, \mu\rangle \quad k \in \Omega/N, q \in H/N, \mu \in \mathbb{Z}/N, \Omega H = 2\pi N$	$T(nH) \otimes T(m \frac{H}{N}) \otimes \Theta(\mu \Omega)$	$\langle k', q', \mu'   k, q, \mu \rangle = \delta_{\mu, \mu'} \delta(k-k') \delta(q-q')$	$\int_{\Omega/N} dk \int_{H/N} dq \sum_{\mu=0}^{N-1}  k, q, \mu\rangle \langle k, q, \mu  = I$	
			$\langle k', q', m   k, q, \mu \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[i2\pi \frac{m \mu}{N}] \delta(k-k') \delta(q-q') F_{\mu, m}(k, q) \quad F_{\mu, m}(k, q) = \exp[ikq + \frac{2\pi}{\Omega} km + \mu \Omega q]$	
$\tilde{\mathcal{H}}_N$	$\sqrt{\frac{2\pi}{N}}  0, m\rangle \quad m \in \mathbb{Z}/N$	$\Theta(\nu \frac{\Omega}{N})$	$\langle 0, m'   0, m \rangle = \delta_{m, m'} \delta(k) \delta(q)$	$\sum_{m=0}^{N-1}  0, m\rangle \langle 0, m  = \frac{N}{2\pi} P_N$
	$\sqrt{\frac{2\pi}{N}}  0, \mu\rangle \quad \mu \in \mathbb{Z}/N$	$T(m \frac{H}{N})$	$\langle 0, \mu'   0, \mu \rangle = \delta_{\mu, \mu'} \delta(k) \delta(q)$	$\sum_{\mu=0}^{N-1}  0, \mu\rangle \langle 0, \mu  = \frac{N}{2\pi} P_N$
	$\langle 0, m   0, \mu \rangle = \delta(q) \delta(k) \exp i2\pi \frac{\mu m}{N}$ D.F.T.			$P_N = \sum_{n, \nu} T(nH) \otimes \Theta(\nu \Omega)$

NOTA:  
1. Tout état de  $\tilde{\mathcal{H}}_N$  peut être généré par un état de  $\mathcal{H}_N$  et vice et versa. Sur  $\mathcal{H}_N$  les projecteurs  $P_{\Omega}$  et  $P_H$  commutent.

$\langle k', q' | X | k, q \rangle = (i \frac{\partial}{\partial k} + q) \delta(q-q') \delta(k-k')$   
 $\langle k', q' | K | k, q \rangle = -i \frac{\partial}{\partial q} \delta(q-q') \delta(k-k')$



DÉTECTION-ESTIMATION FORMELLE

TABLEAU N° 3 : Estimateurs

ÉTATS FILTRES $\mathcal{H}_F$	ÉTATS NON FILTRES $\mathcal{P}\mathcal{H}$
Projecteur d'estimation $P_F = H^{-1}P(P\Gamma^{-1}P)^{-1}PH^{\dagger} = P_{H^{-1}}$	Pseudo-inverse fonctionnelle $P_F^{\#} = P(P\Gamma^{-1})^{-1}PH^{\dagger} = \Sigma H^{-\dagger}$
État blanchi $ z'\rangle = H^{-1} z\rangle$	État $ z\rangle =  y\rangle +  X\rangle$
Blanchiment $\Gamma' = H^{-1}\Gamma H^{-\dagger} = I$	Covariance de bruit $\Gamma = E[X\rangle\langle X]$
Estimée filtrée $ \hat{y}'\rangle = P_{H^{-1}} z'\rangle = \Sigma' z'\rangle$	Estimée $ \hat{y}\rangle = P_{H^{-1}}^{\#} z\rangle = \Sigma H^{-\dagger} z\rangle$
Covariance d'erreur d'estimation filtrée $\Sigma' = P_{H^{-1}} = H^{-1}\Sigma H^{-\dagger}$ $\text{tr}\Sigma' = \text{tr}P X \quad \Sigma'^2 = \Sigma'$	Covariance d'erreur d'estimation $\Sigma = (P\Gamma^{-1}P)^{-1}$

FIGURE N° 1 : SIGNAL TRAITE

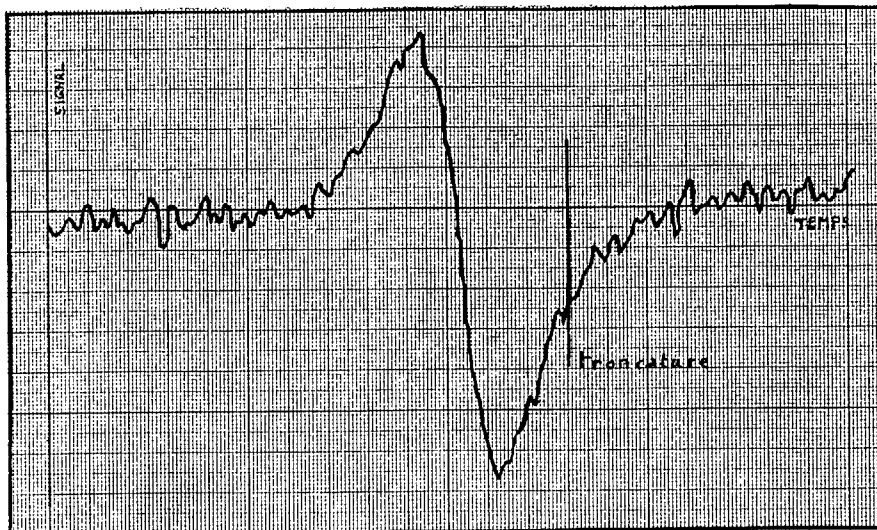


FIGURE N° 2 : CRITERE DE DÉTECTION-ESTIMATION : AMBIGUIMETRE

