SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

PROCESSUS DE MARKOV ET DIFFUSION A DEUX INDICES

TWO-PARAMETER DIFFUSION AND MARKOV PROCESSES

P. LEFORT

CENTRE DE FIABILITE
C.N.E.T. CPM/FMI. 196, rue de Paris. 92220 BAGNEUX

RESUME

Une propriété de Markov est définie pour des processus à deux indices. Cette définition, directement inspirée du cas à un indice, est compatible avec celles déjà données pour des champs gaussiens. On montre l'existence et l'unicité de la solution d'une équation différentielle stochastique relative à des processus à deux indices. Les conditions, assurant la propriété de Markov, restent encore à préciser en général. On propose un cas particulier d'équation où le caractère Markovien de la solution est conjecturé.

SUMMARY

For two-parameter processes a Markov property is defined. This definition is directly inspired by the one parameter case and is compatible with the one already used for gaussian fields. A stochastic differential equation for a two parameter process is considered and the existence and uniqueness of its solution are proved. It is not yet known under which conditions the solution of such a general equation is Markovian. Nevertheless a particular type of stochastic differential equation is proposed for which the Markov property is conjectured.

PROCESSUS DE MARKOV ET DIFFUSION A DEUX INDICES

TWO-PARAMETER DIFFUSION AND MARKOV PROCESSES

1. INTRODUCTION

La définition d'une propriété markovienne pour les processus à deux indices a soulevé un certain nombre de difficultés conceptuelles dues à la perte de la relation d'ordre total en passant de la droite au plan. La tentative faite par CAIROLI dans (5) ne semble pas avoir abouti à un concept de propriété markovienne facilement manipulable. Par contre, dans le cas des processus gaussiens, les définitions équivalentes données par NUALART et SANZ dans (1) et KOREZLIOGLU dans (2) ont permis de faire des extensions immédiates des propriétés des processus gaussiens markoviens à un paramètre. On définit ici une propriété markovienne pour les processus à deux indices qui semble être une généralisation raisonnable de la propriété markovienne pour les processus à un indice.

Au paragraphe 3, on donne la définition de la propriété markovienne pour des processus à deux indices, et on étudie rapidement les conséquences de cette définition ; on montre que celle-ci est équivalente à celle qui a été proposée par NUALART et SANZ dans (1) et qu'elle coïncide avec celle de KOREZLIOGLU dans le cas gaussien. Une étude plus détaillée sur la propriété markovienne est publiée dans (6). Au paragraphe 4, on étudie l'existence et l'unicité d'une équation de diffusion à deux paramètres qui a été proposée par J. SZPIRGLAS, et on conjecture une forme particulière de cette équation dont la solution serait un processus markovien.

2. PRELIMINAIRES

Dans toute la suite, $z = (x,y)$ représentera un point générique de $\mathbb{R}^2_+$. Etant donnés deux points z et z', on écrit $z < z'$ pour $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$, $z \ll z''$ pour $x < x'$ et $y < y'$, et $z \wedge z'$ pour $x \leqslant x'$ et $y \geqslant y'$. On désigne par $z \otimes z'$ le point (x,y'), par $z \wedge z'$ le point $(\inf(x,y), \inf(x',y'))$ et par $z \vee z'$ le point $(\sup(x,x'), \sup(y,y'))$. On note $]z,z']$ le rectangle $\{u \in \mathbb{R}^2_+ ;\ z \ll u < z'\}$ et on pose $R_z =]o,z]$. Tous les processus considérés ici seront indexés par R_{z_0}, $(z_0 = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2_+)$ et seront définis sur un espace probabilisé $(\Omega, \underline{A}, \mathbb{P})$.

La théorie de l'intégration stochastique développée dans (3) et (4) est basée sur une filtration $\underline{F} = (\underline{F}_z, z \in \mathbb{R}^2_+)$ de sous-tribus de $\underline{A}$, vérifiant les conditions ci-dessous

(F1) $\underline{F}$ est croissante (i.e. $z < z' \Rightarrow \underline{F}_z \subset \underline{F}_{z'}$).

(F2) $\underline{F}_0$ contient tous les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables de $\underline{A}$.

(F3) $\underline{F}$ est continue à droite (i.e. $\underline{F}_z = \bigcap_{\substack{z' > z \\ z' \neq z}} \underline{F}_{z'}$)

(F4) Si on pose $\underline{F}^1_z = \bigvee_{t \in [0,y_0]} \underline{F}_{(x,t)}$, $\underline{F}^2_z = \bigvee_{s \in [0,x_0]} \underline{F}_{(s,y)}$

$\underline{F}^1_z$ et $\underline{F}^2_z$ sont conditionnellement indépendantes par rapport à $\underline{F}_z$.

On utilisera la terminologie suivante en ce qui concerne les différents types de Passé relatif à la filtration $\underline{F}$; $\underline{F}_z$ sera appelée le Passé strict jusqu'au point z, $\underline{F}^1_z$ le Passé horizontal, $\underline{F}^2_z$ le Passé vertical, et $\underline{F}^*_z = \underline{F}^1_z \vee \underline{F}^2_z$ le Passé large.

En ce qui concerne la filtration $\underline{F}$, on étendra l'ensemble d'indices au domaine $D = \{z \not> 0\}$ en posant $\underline{F}_z = (\Omega, \phi)$, $\forall z \in D$. D'une façon similaire, on étend le processus $(X_z, z \in R_{z_0})$ à $(X_z,\ z \in R_{z_0} \cup D)$ en posant $X_z = 0\ \forall z \in D)$.

Pour un processus $X = (X_z, z \in \mathbb{R}^2_+)$ on pose

$$X]z,z'] = X_{z'} + X_z - X_{z \otimes z'} - X_{z' \otimes z}.$$

On dit qu'un processus $(M_z, z \in R_{z_0})$, intégrable, est :

- Une martingale forte si M_z est $\underline{F}_z$-adapté et, $\forall z' > z$, $E(M]z,z'] \mid \underline{F}^*_z) = 0$
- Une martingale si M_z est $\underline{F}_z$-adapté et, $\forall z' > z$, $E(M_{z'} \mid \underline{F}_z) = M_z$.
- Une 1-martingale (ou martingale horizontale) si M_z est $\underline{F}^1_z$-adaptée) et, $\forall x < x'$, $\forall y$: $E(M_{(x',y)} \mid \underline{F}^1_{(x,y)}) = M_{(x,y)}$.
- Une 2-martingale (ou martingale verticale) si M_z est $\underline{F}^2_z$-adaptée, et, $\forall x$, $\forall y' > y$: $E(M_{(x,y')} \mid \underline{F}^2_{(x,y)}) = M_{(x,y)}$.
- Une martingale faible si M_z est $\underline{F}_z$-adapté et, $\forall z' > z$, $E(M]z,z'] \mid \underline{F}_z) = 0$.

On montre qu'une martingale forte est une martingale ; qu'une martingale est une 1 et 2-martingale, et qu'une 1 et 2-martingale adaptée est une martingale ; enfin qu'une 1-martingale, ou une 2-martingale, est une martingale faible.

Soit B une mesure aléatoire gaussienne centrée définie sur les boréliens de $\mathbb{R}^2_+$, telle que $E(B(A)\ B(A')) = |A \cap A'|$, où $|A|$ désigne la mesure de Lebesgue du borélien A. Un drap brownien $B = (B_z, z \in R_{z_0})$ est la version continue du processus défini par $B_z = B(R_z)$.

On démontre que la filtration naturelle complétée de B vérifie les propriétés (F1)-(F4) définies plus haut. On se réfère à CAIROLI et WALSH (3), et WONG et ZAKAI (4), pour la définition des intégrales stochastiques par rapport au drap brownien relativement à $\underline{F}$ sa filtration naturelle.

Si $(f(z),\ z \in R_{z_0})$ est un processus mesurable, $\underline{F}$-adapté, tel que $\int_{R_{z_0}} E|f(z)|^2 dz < +\infty$, alors $\int_{R_z} f(u)dB_u$ est une martingale forte telle que

$$E\left|\int_{R_z} f(u)dB_u\right|^2 = \int_{R_z} E|f(u)|^2 du, \ \forall z \in R_{z_0}.$$

PROCESSUS DE MARKOV ET DIFFUSION
A DEUX INDICES
TWO-PARAMETER DIFFUSION AND MARKOV PROCESSES

Si $\psi(z,z')$ est une fonction mesurable de (z,z'), telle que
- $\psi(z,z') = 0$ sauf si $z\Lambda z'$
- $\psi(z,z')$ est $\underline{\underline{F}}_{zvz'}$-mesurable
- $\int_{R^2_{z_0}} E|\psi(z,z')|^2 dz\,dz' < +\infty$

alors l'intégrale stochastique $\int_{R_z\times R_z}\psi(u,v)dB_u dB_v$ est une martingale telle que

$$E\Big|\int_{R_z\times R_z}\psi(u,v)dB_u dB_v\Big|^2 = \int_{R_z\times R_z}E|\psi(u,v)|^2 du\,dv.$$

De même, les intégrales $\int_{R_z\times R_z}\psi(u,v)du\,dB_v$ et $\int_{R_z\times R_z}\psi(u,v)dB_u dv$ sont respectivement une 1-martingale et une 2-martingale, telles que

$$E\Big|\int_{R_z\times R_z}\psi(u,v)du\,dB_v\Big|^2 = \int_{R_z\times R_z}E|\psi(u,v)|^2 du\,dv$$
$$= E\Big|\int_{R_z\times R_z}\psi(u,v)dB_u\,dv\Big|^2.$$

Une semi-martingale du drap brownien est définie dans (4) par :

$$X_z = X_o + \int_{R_z}(\theta(u)du + \phi(u)dB_u) \qquad (2.1)$$
$$+\int_{R_z\times R_z}I(u,v)\left[\psi(u,v)dB_u dB_v + f(u,v)\,du\,dB_v + g(u,v)dB_u dv\right]$$

où $I(z,z')$ désigne l'indicatrice de l'ensemble $\{(z,z')\ ;\ z\Lambda z'\}$, les différentes intégrales stochastiques étant définies comme plus haut.

C'est sous cette forme qu'on étudiera, au paragraphe 4, une Equation Différentielle Stochastique à deux paramètres.

3. PROPRIETES DE MARKOV

3.1 - CARACTERISATION GENERALE

On considère dans ce paragraphe un processus $X = (X_z, z\in R_{z_0})$ et sa filtration naturelle complétée et rendue continue à droite $\underline{\underline{F}}$.

Dans le but de simplifier les notations, on désignera par $P(X_1,\dots,X_n|\underline{\underline{G}})$ la loi de probabilité d'un ensemble $(X_1,\dots,X_n)$ de variables aléatoires conditionnellement à une sous-tribu $\underline{\underline{G}}$ de $\underline{\underline{A}}$.

Si $z'\in R^c_z$, $z'\Lambda z$ est le point de R_z le plus proche de z'.

<u>DEFINITION 1.</u>

Le processus $X=(X_z, z\in R_{z_0})$ est dit markovien si, $\forall z\in R_{z_0}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall z_1,\dots,z_n\in R^c_z$,

$$P(X_{z_1},X_{z_2},\dots,X_{z_n}|\underline{\underline{F}}_z) = P(X_{z_1},\dots,X_{z_n}|X_{z_1\Lambda z},X_{z_2\Lambda z},\dots,X_{z_n\Lambda z}) \qquad (3.1)$$

<u>REMARQUE 1.</u> La condition (3.1) est équivalente à la suivante $\forall z\in R_{z_0}$, $\forall f_1,\dots,f_n$ fonctions boréliennes bornées, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall z_1,\dots,z_n\in R^c_z$, (3.2)

$$E\Big(\prod_{i=1}^n f_i(X_{z_i})|\underline{\underline{F}}_z\Big) = E\Big(\prod_{i=1}^n f_i(X_{z_i})|X_{z_1\Lambda z},\dots,X_{z_n\Lambda z}\Big)$$

<u>DEFINITION 2.</u>

X est dit horizontalement markovien si $\forall z\in R_{z_0}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall z_1,\dots,z_n\in(R_{z\otimes z_0})^c$, (3.3)

$$P(X_{z_1},\dots,X_{z_n}|\underline{\underline{F}}^1_z) = P(X_{z_1},\dots,X_{z_n}|X_{z\otimes z_1},\dots,X_{z\otimes z_n})$$

X est dit verticalement markovien si

$\forall z\in R_{z_0}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\forall z_1,\dots,z_n\in(R_{z_0\otimes z})^c$ (3.4)

$$P(X_{z_1},\dots,X_{z_n}|\underline{\underline{F}}^2_z) = P(X_{z_1},\dots,X_{z_n}|X_{z_1\otimes z},\dots,X_{z_n\otimes z})$$

La proposition suivante donne une caractérisation de la propriété markovienne moins redondante que la définition 1.

<u>PROPOSITION 1.</u>

X est markovien si, et seulement si, X est horizontalement et verticalement markovien.

La propriété markovienne confère à la filtration $\underline{\underline{F}}$ toutes les propriétés utiles au calcul stochastique, en particulier (F4) du paragraphe 2. La démonstration de ce fait et celle de la proposition 1 sont faciles et plutôt géométriques ; elles sont données en détail dans (6).

Le théorème suivant donne une troisième caractérisation de la propriété markovienne, mentionnée et développée dans le cas gaussien, par NUALART et SANZ dans (1).

<u>THEOREME 1.</u>

X est markovien si, et seulement si

$$\forall z, \forall z'>z, P(X_{z'}|\underline{\underline{F}}^*_z) = P(X_{z'}|X_{z\otimes z'},X_z,X_{z'\otimes z}) \qquad (3.5)$$

<u>Démonstration</u>. Si X est un processus vérifiant la relation (3.5), on montre, en utilisant plusieurs fois (3.5), que X est markovien ; la démonstration, qui est purement géométrique, est donnée en détail dans (6).
La réciproque est moins évidente, on en donne donc ici la démonstration, après avoir établi un lemme prélimi -naire.

<u>LEMME 1.</u>

Soit $\underline{\underline{F}}$ et $\underline{\underline{G}}$ des sous-tribus de $\underline{\underline{A}}$, telles que $\underline{\underline{F}}\subset\underline{\underline{G}}$, et $X,Y_1,\dots,Y_n$ des variables aléatoires de $L^2(\Omega,\underline{\underline{A}},P)$, telles que $\forall f,g_1,\dots,g_n$ fonctions boréliennes bornées,

$$E\Big(f(X)\prod_{i=1}^n g_i(Y_i)|\underline{\underline{F}}\Big) = E\Big(f(X)\prod_{i=1}^n g_i(Y_i)|\underline{\underline{G}}\Big)$$

alors,

$$E(f(X)|\underline{\underline{F}}\vee\sigma(Y_1,\dots,Y_n)) = E(f(X)|\underline{\underline{G}}\vee\sigma(Y_1,\dots,Y_n))$$

où $\sigma(Y_1,\dots,Y_n)$ désigne la plus petite tribu qui rend mesurables les Y_i.

<u>Démonstration</u>. On suppose n = 1 pour simplifier. Un raisonnement de classes monotones montre que toute v.a.

$\underline{\underline{F}} \vee \sigma(Y)$ (resp. $\underline{\underline{G}} \vee \sigma(Y)$)-mesurable, positive bornée, est limite croissante de sommes finies du type $\sum_i U_i h_i(Y)$ où U_i est $\underline{\underline{F}}$ (resp. $\underline{\underline{G}}$)-mesurable et h_i borélienne bornée. On en déduit, d'une part, qu'il suffit de vérifier.:

$E(f(X)g(Y)Z) = E(E(f(X)/\underline{\underline{F}} \vee \sigma(Y))g(Y)Z)$

pour Z v.a. $\underline{\underline{G}}$-mesurable et g borélienne bornées.

D'autre part, qu'on obtient grâce à l'hypothèse :

$E(E(f(X)/\underline{\underline{F}} \vee \sigma(Y))g(Y)Z) = E(E(E(f(X)/\underline{\underline{F}} \vee \sigma(Y))g(Y)/\underline{\underline{F}})Z)$.

Cette relation conduit au résultat.

<u>Démonstration</u>.

Revenons maintenant au théorème 1 et considérons X un processus markovien.

Soit à calculer $E(f(X_{z'})|\underline{\underline{F}}_z^*)$, pour $z' > z$.

Remarquons que,

si $\underline{\underline{G}}_z^1 = \sigma(X_{z'}, z'\Lambda z) = \bigvee[\sigma(X_{z_1},\dots,X_{z_n}); \forall i, z_i\Lambda z]$, alors

$$\underline{\underline{F}}_z^* = \underline{\underline{F}}_z^2 \vee \underline{\underline{G}}_z^1 = \underline{\underline{F}}_z^2 \bigvee [\sigma(X_{z_1},\dots,X_{z_n}); \forall i, z_i\Lambda z].$$

Soient donc $z_1,\dots,z_n$ tels que $\forall i, z_i\Lambda z$ et $g_1,\dots,g_n$ boréliennes bornées,

alors $E(f(X_{z'})\prod_{i=1}^n g_i(X_{z_i})|\underline{\underline{F}}_z^2)$

$$= E(f(X_{z'})\prod_{i=1}^n g_i(X_{z_i})|X_{z'\boxtimes z}, X_{z_1\boxtimes z},\dots,X_{z_n\boxtimes z}).$$

D'où, en appliquant le lemme 1,

$$E(f(X_{z'})|\underline{\underline{F}}_z^2 \vee \sigma(X_{z_1},\dots,X_{z_n}))$$

$$= E(f(X_{z'})|X_{z'\boxtimes z}, X_{z_1\boxtimes z},\dots,X_{z_1},\dots,X_{z_n}).$$

Or, les tribus $\underline{\underline{F}}_z^2 \vee \sigma(X_{z_1},\dots,X_{z_n})$ engendrent $\underline{\underline{F}}_z^*$, tandis que les tribus $\sigma(X_{z_1\boxtimes z},\dots,X_{z_n\boxtimes z},X_{z_1},\dots X_{z_n})$ engendrent $\underline{\underline{G}}_z^1$.

Le théorème de classe monotone permet alors d'écrire

$$E(f(X_{z'})|\underline{\underline{F}}_z^*) = E(f(X_{z'})|\underline{\underline{G}}_z^1 \vee \sigma(X_{z'\boxtimes z}))$$

Mais $E(f(X_{z'})g(X_{z'\boxtimes z})|\underline{\underline{G}}_z^1) = E(f(X_{z'})g(X_{z'\boxtimes z})|\underline{\underline{F}}_z^1|\underline{\underline{G}}_z^1)$

$$= E(f(X_{z'})g(X_{z'\boxtimes z})|X_{z\boxtimes z'}, X_z|\underline{\underline{G}}_z^1)$$

$$= E(f(X_{z'})g(X_{z'\boxtimes z})|X_{z\boxtimes z'}, X_z).$$

En appliquant une nouvelle fois le lemme 1, on a (3.5).

La proposition suivante met en évidence le caractère fondamental d'un processus de Markov : conditionnellement au présent (strict ou large), futur et passé (strict ou large) sont indépendants.

Soient

$\underline{\underline{K}}_z^* = \sigma(X_{z'}, z' \succ z, x'=x \text{ ou } y'=y)$ = tribu du présent large

$\underline{\underline{G}}_z^* = \sigma(X_{z'}, z' \succ z)$ = tribu du futur strict

$K_z = \sigma(X_{z'}, z'<z, x'=x \text{ ou } y'=y)$ = tribu du présent strict

$\underline{\underline{G}}_z = \sigma(X_{z'}, z' \not< z)$ = tribu du futur large.

(On remarque que passé, présent et futur stricts forment une partition de R_{z_0}, de même que passé, présent et futur larges).

<u>PROPOSITION 4</u>.

> $\forall Y\ \underline{\underline{G}}_z^*$-mesurable, bornée, $E(Y|\underline{\underline{F}}_z^*) = E(Y|\underline{\underline{K}}_z^*)$.
>
> $\forall Y\ \underline{\underline{G}}_z$-mesurable, bornée, $E(Y|\underline{\underline{F}}_z) = E(Y|\underline{\underline{K}}_z)$.

<u>REMARQUE 2</u>. Etant donné une filtration $\underline{\underline{F}}$ quelconque, satisfaisant aux conditions (F1)-(F4) du paragraphe 2, il est possible de définir la propriété markovienne d'un processus X relativement à cette filtration, exactement comme dans la définition (3.1).

On peut conjecturer que le théorème 1 est encore vrai sous cette nouvelle formulation. En tout cas, un examen attentif de la démonstration de ce théorème montre que, dans le cas où la filtration $\underline{\underline{F}}$ est la filtration naturelle d'un mouvement brownien, tous les résultats précédents restent vrais sans aucune modification.

3.2 - CAS GAUSSIEN.

Dans ce paragraphe, $X = (X_z, z \in R_{z_0})$ représente un processus gaussien centré. Pour un processus gaussien $\underline{\underline{H}}_z$ représentera le plus petit sous-espace hilbertien de $L^2(\Omega,\underline{\underline{A}},P)$ contenant la famille $(X_{z'}, z'<z)$.

Pour une variable aléatoire Z de $L^2(\Omega,\underline{\underline{A}},P)$, et un sous-espace hilbertien $\underline{\underline{H}}$ de $L^2(\Omega,\underline{\underline{A}},P)$, $(Z/\underline{\underline{H}})$ désignera la projection orthogonale de Z sur $\underline{\underline{H}}$.

<u>PROPOSITION 5</u>.

> X est markovien si, et seulement si,
>
> $\forall z \in R_{z_0}$, $\forall z' \not< z$, $(X_{z'}|\underline{\underline{H}}_z) = (X_{z'}|X_{z'\Lambda z})$ (3.6)

<u>Démonstration</u>. L'équivalence de (3.6) avec (3.1) dans le cas gaussien, est due au fait que la tribu $\underline{\underline{G}}_z$ est engendrée par les combinaisons linéaires des $X_{z'}$, $z' \not< z$.

Le théorème 1 prend alors la forme suivante :

<u>THEOREME 1'</u>.

> X est markovien si, et seulement si
>
> $\forall z \in R_{z_0}$, $\forall z' > z$, $(X_{z'}|\underline{\underline{H}}_z) = aX_{z'\boxtimes z} + bX_z + cX_{z\boxtimes z'}$, (3.7)
>
> où a, b et c sont des constantes de projection.

La caractérisation des processus gaussiens markoviens par (3.6) et (3.7) a été considérée par KOREZLIOGLU dans (2) et par NUALART et SANZ dans (1).

Avec des hypothèses de régularité sur sa fonction de covariance, comme dans (1) et (2), on peut mettre un processus gaussien markovien nul sur les axes sous la forme suivante

$$X_z = \phi(z)\int_{R_z} G(u)dB_u,$$

où $\phi(z)$ est une fonction non aléatoire continue positive et $G(u)$ est non aléatoire de carré intégrable.

Supposons maintenant que ϕ soit de classe C^2 et G de classe C^1, alors, en différenciant par rapport à x puis y, on obtient l'équation suivante :

$$dX_{xy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(x,y)\,\phi^{-1}(x,y)X_{xy}dxdy + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)\int_0^y G(x,\beta)dB_{x\beta}\right)dy \tag{3.8}$$
$$+\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)\int_0^x G(\alpha,y)dB_{\alpha y}\right)dx + \phi(x,y)G(x,y)dB_{xy}$$

où $\phi^{-1}(x,y)$ désigne l'inverse de $\phi(x,y)$ et où dX_{xy} représente la différentielle d'ordre 2 par rapport à x et y.

On montre que X est une semi-martingale du type (2.1) qui a la forme intégrale suivante, où u=(s,t) et v=(s',t') :

$$X_z = \int_{R_z}\frac{\partial^2\phi}{\partial s\partial t}(s,t)\phi^{-1}(s,t)X_{st}du + \int_{R_z}\phi(u)G(u)dB_u \tag{3.9}$$
$$+\int_{R_z\times R_z} I(u,v)\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}(u\vee v)\frac{\partial G}{\partial s}(u\wedge v)dudB_v + \frac{\partial\phi}{\partial s'}(u\vee v)\frac{\partial G}{\partial t'}(u\wedge v)dB_u dv\right]$$

On reviendra sur ce type d'équation à la fin du paragraphe suivant.

4. EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

D'une façon analogue aux processus à un indice, on définit une Equation Différentielle Stochastique (E.D.S.) comme une semi-martingale, dont les termes figurant dans les intégrales sont fonctions instantanées de X_z.

On étudie donc l'Equation Différentielle Stochastique suivante :

$$X_z + X_o - X_x^1 - X_y^2 = \int_{R_z}\left[\Theta(u,X_u)du + \phi(u,X_u)dB_u\right]$$
$$+\int_{R_z\times R_z} I(u,v)\left[\psi(u,v,X_{u\vee v})dB_u dB_v + f(u,v,X_{u\vee v})dudB_v \right. \tag{4.1}$$
$$\left. + g(u,v,X_{u\vee v})dB_u dv\right]$$

où X_o représente la valeur à l'origine, X_x^1 et X_y^2 les valeurs sur les axes, avec $X_o = X_o^1 = X_o^2$.

X_o, X_x^1, X_y^2 représentent les Conditions Initiales, et sont telles que X_o soit $\underline{\underline{F}}_o$-mesurable, X_x^1 soit $\underline{\underline{F}}_{(x,o)}$-mesurable, et X_y^2 soit $\underline{\underline{F}}_{(o,y)}$-mesurable.

Cette équation, dont l'étude a été suggérée par J. SZPIRGLAS, est une forme généralisée de celle qui a été étudiée par CAIROLI dans (5).

Le théorème suivant établit l'existence et l'unicité d'une solution pour l'équation (4.1), moyennant quelques hypothèses de régularité sur les fonctions Θ,ϕ,ψ, f et g.

<u>THEOREME 2.</u>

> Soit B un drap brownien, et $\underline{\underline{F}}$ sa filtration naturelle.
> Si les fonctions $\Theta(z,x)$ et $\phi(z,x)$ sont lipschitziennes par rapport à x, uniformément en z, et si $\psi(z,z',x)$, $f(z,z',x)$ et $g(z,z',x)$ sont lipschitziennes par rapport à x, uniformément en (z,z'), alors l'E.D.S. (4.1) admet une solution unique, dont les trajectoires sont continues.

<u>Démonstration</u>. On donne ici une idée de la démonstration, qui consiste à construire par approximations successives un processus vérifiant l'équation (4.1).

On appelle S l'opérateur sur les processus de carré intégrable, défini par

$$(SY)_z = -X_o + X_x^1 + X_y^2 + \int_{R_z}\left[\Theta(u,Y_u)du + \phi(u,Y_u)dB_u\right]$$
$$+\int_{R_z\times R_z} I(u,v)\left[\psi(u,v,Y_{u\vee v})dB_u dB_v + f(u,v,Y_{u\vee v})du\,dB_v + g(u,v,Y_{u\vee v})dB_u dv\right]$$

On définit alors la suite X^n de processus par

$$X_z^o = -X_o + X_x^1 + X_y^2$$
$$X_z^n = (SX^{n-1})_z = (S^n X^o)_z.$$

Grâce aux hypothèses de Lipschitz sur les fonctions Θ,ϕ,ψ, f et g, X_z^n converge presque sûrement et dans L^2 vers X_z, uniformément en z. La limite X_z vérifie évidemment $SX_z = X_z$, et est donc solution de l'E.D.S. définie par (4.1).

D'autre part, il est facile de voir, par récurrence sur n, que les X_z^n sont des processus continus en z ; la convergence uniforme en z de X_z^n entraîne alors la continuité des trajectoires du processus X_z.

On montre l'unicité de la solution, en considérant deux solutions de l'E.D.S. (4.1), soient X^1 et X^2, avec les mêmes conditions initiales ; X^1 et X^2 vérifient alors $E(\sup_{R_{z_o}}|X_z^1 - X_z^2|^2) = 0$, ce qui donne $X^1 = X^2$.

Le problème est de savoir sous quelles conditions supplémentaires l'E.D.S. (4.1), satisfaisant aux conditions du théorème 2, possède une solution markovienne. Ce problème n'est pas encore résolu dans toute sa généralité. Il est néanmoins possible, sous certaines contraintes de liaison entre les fonctions Θ,ϕ,ψ,f et g, d'écrire l'E.D.S. satisfaite par un processus $X = (X_z, z\epsilon R_{z_o})$ qui soit à la fois une diffusion horizontalement et verticalement markovienne.

Considérons l'équation suivante, inspirée du cas gaussien :

$$dX_{xy} = \bar\Theta(x,y,X_{xy})dxdy + \bar\phi(x,y,X_{xy})G(xy)dB_{xy}$$
$$+\bar\psi(x,y,X_{xy})\int_0^x G(\alpha,y)dB_{\alpha y}\int_0^y G(x,\beta)dB_{x\beta} \tag{4.2}$$
$$+\left[\bar f(x,y,X_{xy})\int_0^y G(x,\beta)dB_{x\beta}\right]dy$$
$$+\left[\bar g(x,y,X_{xy})\int_0^x G(\alpha,y)dB_{\alpha y}\right]dx$$

où G(x,y) est une fonction non aléatoire.

L'équation (4.2), si les fonctions $\bar\Theta,\bar\phi,\bar\psi,\bar f,\bar g$ et G sont suffisamment régulières, se met sous la forme (4.1) ; si u = (s,t) et v = (s',t'), (4.2) équivaut à (4.3) ci-dessous

$$\begin{aligned} X_z = & \int_{R_z} [\bar{\theta}(u,X_u)du + \bar{\phi}(u,X_u)dB_u] \\ & + \int_{R_z \times R_z} I(u,v)\bar{\psi}(uVv,X_{uVv})\frac{\partial G}{\partial s}(u\Lambda v)\frac{\partial G}{\partial t}(u\Lambda v)dB_u dB_v \\ & + \int_{R_z \times R_z} I(u,v)\Big[\bar{f}(uVv,X_{uVv})\frac{\partial G}{\partial s}(u\Lambda v)dudB_v \\ & + \bar{g}(uVv,X_{uVv})\frac{\partial G}{\partial t}(u\Lambda v)dB_u dv\Big] \end{aligned} \quad (4.3)$$

Sous des hypothèses de régularité qui permettraient d'appliquer le théorème 2, on peut déterminer des contraintes reliant ces fonctions, et qui permettent d'écrire les équations horizontale et verticale suivantes:

$$\begin{aligned} d_x X_{xy} &= f^h(x,y,X_{xy})dx + g^h(x,y,X_{xy}) \int_0^y G_{x\beta} dB_{x\beta} \\ d_y X_{xy} &= f^v(x,y,X_{xy})dy + g^v(x,y,X_{xy}) \int_0^x G_{\alpha y} dB_{\alpha y} \end{aligned} \quad (4.4)$$

où $d_x X_{xy}$ et $d_y X_{xy}$ représentent respectivement la variation du processus X suivant les axes horizontal et vertical.

Dans le cas où les coefficients sont assez réguliers pour que les équations (4.4) admettent une solution, alors, pour tout x et y, les solutions de ces équations sont des diffusions markoviennes en x et y respectivement. On peut alors affirmer que le processus X vérifiant, quand y varie, la famille d'équations horizontales, est horizontalement markovien ; X vérifiant, d'autre part, quand x varie, la famille d'équations verticales, il est verticalement markovien.

D'après la proposition (1), on peut donc affirmer que le processus, solution des équations équivalentes (4.2)-(4.3), est markovien.

Cette recherche fera l'objet d'une prochaine publication.

REFERENCES

(1) D. NUALART, M. SANZ, "A Markov property for two-parameter gaussian processes", Stochastica, Vol. II, n° 5, 1979.

(2) H. KOREZLIOGLU, "Two-parameter gaussian processes and their recursive linear filtering", Annales Scientifiques de l'Université de Clermont, Ecole d'été de Calcul des Probabilités, St Flour, 1978.

(3) R. CAIROLI, J. WALSH, "Stochastic integrals in the plane", Acta Mathematica, n° 134, 1975.

(4) E. WONG, M. ZAKAI, "Differentiation formulas for stochastic integrals in the plane", Stoch. Proc. and their Applications, Vol. 6, 1978.

(5) R. CAIROLI, "Sur une équation différentielle stochastique", C.R. Acad. Sc. Paris, T. 274, 1972.

(6) H. KOREZLIOGLU, P. LEFORT, "Propriétés markoviennes pour les processus à deux indices", ENST-D-79004, 1979.