SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

PROCESSUS AUTOREGRESSIFS A DEUX INDICES ET LEUR FILTRAGE LINEAIRE RECURSIF

TWO-PARAMETER AUTOREGRESSIVE PROCESSES AND THEIR RECURSIVE LINEAR FILTERING

H. KOREZLIOGLU

DEPARTEMENT SYSTEMES ET COMMUNICATIONS
ENST. 46 rue Barrault, 75634 PARIS - Cedex 13

RESUME

Une caractérisation des processus autorégressifs d'ordre (p,q) à deux indices discrets est donnée et les processus de Markov au sens large sont définis comme étant des processus autorégressifs d'ordre (1,1). Les propriétés des processus autorégressifs sont étudiées et leur représentation en fonction de leurs innovations est obtenue. Il est montré que les processus autorégressifs d'ordre (p,q) peuvent être représentés comme des processus de Markov au sens large.

Différents types d'équations de filtrage linéaire récursif sont donnés pour un processus de Markov au sens large dans le cas où l'observation est définie comme dans le modèle de filtrage de Kalman à un indice.

SUMMARY

A characterization of two - discrete parameter autoregressive processes of order (p,q) is given and wide sense Markov processes are defined as autoregressive processes of order (1,1). Properties of autoregressive processes are studied and their representation in terms of their innovations is given. It is shown that autoregressive processes of order (p,q) can be represented as wide sense Markov processes.

Various kinds of recursive linear filtering equations are given for a wide sense Markov process, when the observation is defined as in the one-parameter Kalman filtering model.

PROCESSUS AUTOREGRESSIFS A DEUX INDICES ET LEUR FILTRAGE LINEAIRE RECURSIF
TWO-PARAMETER AUTOREGRESSIVE PROCESSES AND THEIR RECURSIVE LINEAR FILTERING

1. INTRODUCTION

Grâce à l'intérêt suscité par leurs applications au traitement d'images, la caractérisation et le filtrage des processus à deux indices possède une bibliographie abondante. La grande variété des approches et des résultats obtenus est due, en premier lieu, au libre choix de la notion de passé pour les processus à deux indices, notion qui influe à la fois sur la caractérisation des processus et sur la récurrence dans le problème de filtrage.

La notion de passé considérée ici est celle qui est utilisée dans la théorie des martingales à deux indices correspondant à la relation d'ordre partiel de $\mathbb{R}^2$ (cf. références dans [6]).

Dans le paragraphe 3, nous donnons une définition des processus autorégressifs d'ordre (p,q) et étudions les différentes propriétés de ces processus. Nous définissons alors les processus markoviens au sens large comme étant des processus autorégressifs d'ordre (1,1) et montrons que tout processus autorégressif d'ordre (p,q) possède une représentation comme un processus markovien au sens large.

Le paragraphe 4, donne les résultats principaux sur le filtrage d'un processus d'état qui est un processus markovien au sens large lorsque l'observation est définie comme dans le modèle de filtrage de Kalman à un indice. Les résultats obtenus sont aussi bien applicables au cas où le processus d'état est un processus autorégressif d'ordre (p,q).

La caractérisation des processus à deux indices markoviens au sens large a déjà été considérée dans [2] et [3] pour des indices discrets et dans [4] pour des indices continus. Le présent travail constitue une extension de la méthode de [3] à la caractérisation des processus autorégressifs. Le problème de filtrage linéaire des processus à deux indices est étudié dans [2] et [3] pour des indices discrets et dans [4] et [6] pour des indices continus et le problème de filtrage non linéaire à indices continus est étudié dans [5].

2. NOTATIONS ET CONVENTIONS

Toutes les v.a. considérées ici seront supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\underline{A},P)$ fixé une fois pour toutes. (v.a. = variable aléatoire). Elles seront à valeurs dans des $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 1$; elles seront centrées et auront leurs composantes dans $L^2(\Omega,\underline{A},P)$. Nous ne distinguerons pas les v.a. de leurs P-classes d'équivalence. A part les processus stationnaires qui sont toujours indexés par $\mathbb{Z}^2$, tous les processus aléatoires seront indexés par $\mathbb{N}^2$. Si un processus X, indexé par $\mathbb{N}^2$, est donné, il nous sera utile d'étendre le domaine des indices aux entiers négatifs en posant X=o lorsqu'au moins un des indices est négatif. Il sera toujours sous-entendu que cette extension est faite.

Pour un processus $X = \{X_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $\underline{\underline{H}}^X_{m,n}$ représentera le plus petit sous-espace hilbertien de $L^2(\Omega,\underline{A},P)$ contenant $\{X^k_{i,j} : k = 1,\dots,p ;\ i \leqslant m,\ j \leqslant n\}$ où $X^k_{i,j}$ est la $k^{\text{ième}}$ composante de $X_{i,j}$. $\underline{\underline{H}}^X_{m,\infty}$ et $\underline{\underline{H}}^X_{\infty,n}$ représenterons respectivement les plus petits sous-espaces hilbertiens de $L^2(\Omega,\underline{A},P)$ contenant $\{X^k_{i,j} : k = 1,\dots,p ;\ i \leqslant m,\ j \in \mathbb{N}\}$ et $\{X^k_{i,j} : k = 1,\dots,p ;\ i \in \mathbb{N},\ j \leqslant n\}$.

Si Z est une v.a. avec composantes dans $L^2(\Omega,\underline{A},P)$ et si $\underline{\underline{H}}$ est un sous-espace hilbertien de $L^2(\Omega,\underline{A},P)$, nous désignerons par $(Z/\underline{\underline{H}})$ la v.a. dont les composantes sont les projections sur $\underline{\underline{H}}$ des composantes de Z. Si les composantes de Z appartiennent à $\underline{\underline{H}}$ nous écrirons $Z \in \underline{\underline{H}}$ et si les composantes de Z sont orthogonales à $\underline{\underline{H}}$, nous écrirons $Z \perp \underline{\underline{H}}$. Si $Y_1, \dots, Y_n$ sont des v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et si $\underline{\underline{H}}$ est le plus petit sous-espace hilbertien de $L^2(\Omega,\underline{A},P)$ engendré par $Y_1, \dots, Y_n$, alors, pour $Z \in L^2(\Omega,\underline{A},P)$, $(Z/\underline{\underline{H}})$ sera aussi désigné par $(Z/Y_1, \dots, Y_n)$.

Si $\underline{\underline{H}}_1$ et $\underline{\underline{H}}_2$ sont des sous-espaces hilbertiens de $L^2(\Omega,\underline{A},P)$, $\underline{\underline{H}}_1 \vee \underline{\underline{H}}_2$ représentera le plus petit sous-espace hilbertien de $L^2(\Omega,\underline{A},P)$ contenant $\underline{\underline{H}}_1$ et $\underline{\underline{H}}_2$. Remarquer que, avec notre convention d'étendre le domaine des indices d'un processus $X = \{X_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ aux entiers négatifs, on a $\underline{\underline{H}}^X_{m,\infty} \vee \underline{\underline{H}}^X_{\infty,n} = \underline{\underline{H}}^X_{\infty,n}$ (resp. $\underline{\underline{H}}^X_{m,\infty}$), si $m < o$ (resp. $n < o$). Si $\underline{\underline{H}}_1$ et $\underline{\underline{H}}_2$ sont des espaces de Hilbert tels que $\underline{\underline{H}}_1 \subset \underline{\underline{H}}_2$, alors $\underline{\underline{H}}_2 \ominus \underline{\underline{H}}_1$ désignera le complément orthogonal de $\underline{\underline{H}}_1$ dans $\underline{\underline{H}}_2$.

Les v.a. seront représentées par des vecteurs-colonnes. Le signe $*$ représentera la transposée pour une matrice, $L(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q)$ l'espace de toutes les matrices q x p et I la matrice unité.

Nous écrirons $(k,l) \leqslant (m,n)$ pour $k \leqslant m$, $l \leqslant n$; $(k,l) < (m,n)$ pour $k \leqslant m$, $l \leqslant n$, $(k,l) \neq (m,n)$ et $(k,l) << (m,n)$ pour $k < m$, $l < n$.

3. PROCESSUS AUTOREGRESSIFS ET PROCESSUS MARKOVIENS AU SENS LARGE

Dans ce qui suit, $X = \{X_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ représentera un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^\alpha$. Dans le but de simplifier les notations nous poserons $\underline{\underline{H}}_{m,n} = \underline{\underline{H}}^X_{m,n}$.

PROCESSUS AUTOREGRESSIFS A DEUX INDICES
ET LEUR FILTRAGE LINEAIRE RECURSIF
TWO-PARAMETER AUTOREGRESSIVE PROCESSES
AND THEIR RECURSIVE LINEAR FILTERING

DEFINITION 1 : X est dit horizontalement autorégressif d'ordre $p > o$, si

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{k,\infty}) = (X_{m,n}/X_{k,n}, \ldots , X_{k-p+1,n}) \quad \text{pour } k < m. \tag{3.1}$$

X est dit verticalement autorégressif d'ordre $q > o$, si

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{\infty,l}) = (X_{m,n}/X_{m,l}, \ldots , X_{m,l-q+1}) \quad \text{pour } l < n. \tag{3.2}$$

X est dit autorégressif d'ordre (p,q), s'il est horizontalement autorégressif d'ordre p et verticalement autorégressif d'ordre q.

Dans la suite, P.A. (p,q) remplacera l'expression "processus autorégressif d'ordre (p,q)".

Les conditions (3.1) et (3.2) sont respectivement équivalentes aux suivantes :

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{k,l}) = (X_{m,n}/X_{k,n}, \ldots , X_{k-p+1,n}) \quad \text{pour } k < m,\ l \geqslant n, \tag{3.1'}$$

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{k,l}) = (X_{m,n}/X_{m,l}, \ldots , X_{m,l-q+1}) \quad \text{pour } k \geqslant m,\ l < n. \tag{3.2'}$$

PROPOSITION 1 : Pour un P.A. (p,q) X, on a

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{k,l}) = (X_{m,n}/\{X_{k-i,l-j} : i=o,\ldots,p-1 ;\ j=o,\ldots,q-1\}) \quad \text{pour } (k,l) << (m,n). \tag{3.3}$$

Démonstration : Il suffit de considérer les égalités :

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{k,l}) = ((X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{k,\infty})/\underline{\underline{H}}_{\infty,l}) = ((X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{\infty,l})/\underline{\underline{H}}_{k,\infty}) \tag{3.4}$$

REMARQUE 1 : La condition (3.1) (ou(3.1')) est satisfaite pour tout $k < m$, si elle est satisfaite pour $k = m-1$. De même, la condition (3.2) (ou(3.2')) est satisfaite pour tout $l < n$, si elle est satisfaite pour $l = n-1$.

Pour un P.A. (p,q) X, posons

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{m-1,\infty}) = \sum_{i=1}^{p} \varphi^h_i (m,n)\, X_{m-i,n} \tag{3.5}$$

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{\infty,n-1}) = \sum_{j=1}^{q} \varphi^v_j (m,n)\, X_{m,n-j} \tag{3.6}$$

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{m-1,n-1}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \varphi_{i,j} (m,n)\, X_{m-i,n-j} \tag{3.7}$$

D'après (3.3) ... (3.6), on peut écrire :

$$\begin{aligned}(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{m-1,n-1}) &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \varphi^h_i (m,n)\varphi^v_j (m-i,n)X_{m-i,n-j} \\ &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \varphi^v_j (m,n)\varphi^h_i (m,n-j)X_{m-i,n-j}\end{aligned} \tag{3.8}$$

En comparant (3.7) et (3.8) on obtient :

$$\varphi_{i,j}(m,n) = \varphi^h_i(m,n)\varphi^v_j(m-i,n) = \varphi^v_j(m,n)\varphi^h_i(m,n-j) \tag{3.9}$$

PROPOSITION 2 : Pour un P.A. (p,q) X, on a

$$\underline{\underline{H}}_{m,\infty} \ominus \underline{\underline{H}}_{m,n} \perp \underline{\underline{H}}_{\infty,n} \ominus \underline{\underline{H}}_{m,n} \tag{3.10}$$

Démonstration : Les espaces $\underline{\underline{H}}_{m,\infty} \ominus \underline{\underline{H}}_{m,n}$ et $\underline{\underline{H}}_{\infty,n} \ominus \underline{\underline{H}}_{m,n}$ sont respectivement engendrés par $\{X_{i,j} - (X_{i,j}/\underline{\underline{H}}_{m,n}) : i \leqslant m,\ j > n\}$ et $\{X_{i,j} - (X_{i,j}/\underline{\underline{H}}_{m,n}) : i > m,\ j \leqslant n\}$ et ces deux ensembles sont mutuellement orthogonaux.

PROPOSITION 3 : Si X est un P.A. (p,q), alors, pour $(k,l) << (m,n)$, la v.a.

$$\hat{X}_{m,n} = (X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{k,\infty}) + (X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{\infty,l}) - (X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{k,l}) \tag{3.11}$$

est la projection de $X_{m,n}$ sur $\underline{\underline{H}}_{k,\infty} \vee \underline{\underline{H}}_{\infty,l}$

Démonstration : $\underline{\underline{H}}_{k,\infty} \vee \underline{\underline{H}}_{\infty,l}$ possède la décomposition orthogonale suivante :

$$\underline{\underline{H}}_{k,\infty} \vee \underline{\underline{H}}_{\infty,l} = (\underline{\underline{H}}_{k,\infty} \ominus \underline{\underline{H}}_{k,l}) \oplus (\underline{\underline{H}}_{\infty,l} \ominus \underline{\underline{H}}_{k,l}) \oplus \underline{\underline{H}}_{k,l} \tag{3.12}$$

D'où le résultat.

COROLLAIRE : Si X est un P.A. (p,q), alors le processus B définie par

$$B_{m,n} = X_{m,n} - \sum_{i=1}^{p} \varphi^h_i (m,n)\, X_{m-i,n} - \sum_{j=1}^{q} \varphi^v_j(m,n)X_{m,n-j} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} \varphi_{i,j} (m,n)\, X_{i,j} \tag{3.13}$$

est un processus orthogonal (un bruit blanc), i.e. $E[B_{m,n}\, B^*_{k,l}] = o$ pour $(m,n) \neq (k,l)$.

Démonstration : D'après la proposition 3, $(B_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{m-1,\infty} \vee \underline{\underline{H}}_{\infty,n-1}) = o$. Pour $(m,n) \neq (k,l)$, on a ou bien $B_{k,l} \in \underline{\underline{H}}_{m-1,\infty} \vee \underline{\underline{H}}_{\infty,n-1}$ ou bien $B_{m,n} \in \underline{\underline{H}}_{k-1,\infty} \vee \underline{\underline{H}}_{\infty,l-1}$. Dans les deux cas, $B_{m,n} \perp B_{k,l}$.

DEFINITION 2 : Pour un P.A. (p,q) X, le processus défini par (3.13) est appelé le processus d'innovation de X.

THEOREME 1 : Tout P.A. (p,q) X admet la représentation suivante en fonction de son processus d'innovation :

$$X_{m,n} = \sum_{i=o}^{m}\sum_{j=o}^{n} \Phi ((m,n), (i,j))\, B_{i,j} \tag{3.14}$$

où Φ peut être entièrement exprimé en fonction des coefficients $\varphi^h_i (k,l)$, $\varphi^v_j(k,l)$ avec $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant q$, $k \leqslant m$, $l \leqslant n$

Démonstration : L'expression (3.14) n'est rien d'autre que la représentation de $X_{m,n}$ dans $\underline{\underline{H}}^B_{m,n}$ et elle peut être déduite de (3.13) par récurrence.

Lorsque la fonction de covariance K de X définie par $K((m,n), (k,l)) = E(X_{m,n}\, X^*_{k,l})$ ne dépend que de m-k et n-l, (cas stationnaire), les expressions (3.5), (3.6) et (3.8) peuvent s'écrire respectivement comme suit :

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{m-1,\infty}) = \sum_{i=1}^{p} F^h_i\, X_{m-i,n} \tag{3.15}$$

$$(X_{m,n}/\underline{\underline{H}}_{\infty,n-1}) = \sum_{j=1}^{q} F^v_j\, X_{m,n-j} \tag{3.16}$$

$$(X_{m,n}/\underline{H}_{m-1,n-1}) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} F_i^h F_j^v X_{m-i,n-j} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} F_j^v F_i^h X_{m-i,n-j} \qquad (3.17)$$

où on a

$$F_i^h F_j^v = F_j^v F_i^h. \qquad (3.18)$$

Puisque les processus X et B sont stationnaires, elles admettent les représentations spectrales suivantes :

$$X_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m\omega + n\omega')}\, dZ_X(\omega,\omega')$$

$$B_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m\omega + n\omega')}\, dZ_B(\omega,\omega')$$

où Z_X et Z_B sont des processus à accroissements orthogonaux et $E[(dZ_B(\omega,\omega'))\,(dZ_B(\omega,\omega'))^*] = S\, d\omega\, d\omega'$, S étant une matrice **symétrique** définie-positive. En reportant X et B dans l'équation (3.13) on obtient la représentation spectrale de X en fonction de B :

$$X_{m,n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m\omega+n\omega')}\, L(\omega,\omega')\, dZ_B(\omega,\omega')$$

avec $L(\omega,\omega') = (I - \sum_{k=1}^{p} F_k^h e^{-jk\omega})^{-1}(I - \sum_{l=1}^{q} F_l^v e^{-jl\omega'})^{-1}$

Notons que les deux facteurs de L commutent, en vertu de (3.17) et (3.18).

DEFINITION 3 : X est dit markovien simple au sens large, s'il est autorégressif d'ordre (1,1).

Dans ce qui suit, PMSSL remplacera l'expression "processus markovien simple au sens large".

PROPOSITION 4 : Si X est un PMSSL, alors

$$(X_{m,n}/\underline{H}_{k,l}) = (X_{m,n}/X_{k,l}) \text{ pour } (k,l) \leqslant (m,n) \qquad (3.19)$$

Démonstration : Conséquence de la proposition 1.

COROLLAIRE : Si X est un PMSSL alors, pour tout chemin croissant C dans $\mathbb{N}^2$, le processus $\{X_{m,n} : (m,n) \in C\}$ est un processus markovien au sens large à un indice.

Soit $\varphi((m,n),(k,l))$ défini comme suit, pour $(k,l) \leqslant (m,n)$:

$$(X_{m,n}/X_{k,l}) = \varphi((m,n),(k,l))\, X_{k,l} \text{ si } (k,l)<(m,n) \qquad (3.20)$$

$$\varphi((m,n),(m,n)) = I. \qquad (3.21)$$

Alors le corollaire précédent entraîne :

$$\varphi((m,n),(i,j)) = \varphi((m,n),(k,l))\, \varphi((k,l),(i,j))$$

pour $(i,j) \leqslant (k,l) \leqslant (m,n)$ (3.22)

DEFINITION 4 : Une fonction $\varphi((m,n),(i,j))$ à valeurs dans $L(\mathbb{R}^\alpha,\mathbb{R}^\alpha)$, définie pour $(i,j) \leqslant (m,n)$, satisfaisant à (3.21) et (3.22) est appelée fonction de transition.

THEOREME 2 : Un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^\alpha$ est un PMSSL si et seulement si, il existe une fonction de transition φ à valeurs dans $L(\mathbb{R}^\alpha,\mathbb{R}^\alpha)$ et un processus orthogonal (bruit blanc) B à valeurs dans $\mathbb{R}^\alpha$ tels que

$$X_{m,n} = \sum_{i=o}^{p}\sum_{j=o}^{q} \varphi((m,n),(i,j))\, B_{i,j} \qquad (3.23)$$

Démonstration : Si X est un PMSSL, la relation (3.13) donne

$$X_{m,n} = \varphi((m,n),(m-1,n))X_{m-1,n} + \varphi((m,n),(m,n-1))X_{m,n-1} - \varphi((m,n),(m-1,n-1))X_{m-1,n-1} + B_{m,n} \qquad (3.24)$$

On obtient la représentation (3.23) par récurrence à l'aide de (3.24). Inversement, si X est donné par (3.23), on peut vérifier que X est un PMSSL.

REMARQUE 2 : Dans le cas où $\varphi((m,n),(i,j)) = F_{m-i,n-j}$ la relation (3.24) devient

$$X_{m,n} = F_{1,o}X_{m-1,n} + F_{o,1}X_{m,n-1} - F_{1,1}X_{m-1,n-1} + B_{m,n} \qquad (3.25)$$

où, d'après (3.22) ou (3.18), on a

$$F_{1,1} = F_{1,o}\, F_{o,1} = F_{o,1}\, F_{1,o}. \qquad (3.26)$$

Les processus stationnaires définis par (3.25) et (3.26) ont servi de base aux travaux d'Attasi [1] dans le problème d'identification des images.

Si X est un PMSSL, alors il satisfait aux relations de récurrence suivantes par rapport à chacun de ses paramètres :

$$X_{m,n} = \varphi((m,n),(m-1,n))X_{m-1,n} + \sum_{j=o}^{n} \varphi((m,n),(m,j))B_{m,j} \qquad (3.27)$$

$$X_{m,n} = \varphi((m,n),(m,n-1))X_{m,n-1} + \sum_{i=o}^{m} \varphi((m,n),(i,n))B_{i,n} \qquad (3.28)$$

On peut déduire de ses relations que le processus de colonnes de hauteur n $\{(X^*_{m,o} \ldots X^*_{m,n-1}\ X^*_{m,n})^* : m \in \mathbb{N}\}$ et le processus de lignes de largeur m $\{(X^*_{o,n} \ldots X^*_{m-1,n}\ X^*_{m,n})^* : n \in \mathbb{N}\}$ sont des processus markoviens au sens large à un indice, respectivement à valeurs dans $\mathbb{R}^{\alpha(n+1)}$ et $\mathbb{R}^{\alpha(m+1)}$.

Avant de terminer ce paragraphe, nous voudrions énoncer le théorème suivant qui relie l'étude des P.A. (p,q) à celle des PMSSL :

THEOREME 3 : Soit X un P.A. (p,q) de processus d'innovation $B = \{B_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ et posons

$$Z_{m,n} = (X^*_{m,n} \ldots X^*_{m-p+1,n}\ X^*_{m,n-1} \ldots X^*_{m-p+1,n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots X^*_{m,n-q+1} \ldots X^*_{m-p+1,n-q+1})^*$$

Alors le processus $Z = \{Z_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ est un PMSSL dont le processus d'innovation est $\{(B^*_{m,n}\ o \ldots o)^* : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$. Il est à noter que $Z_{m,n}$ peut être représenté par la matrice $(X_{m-i,n-j})_{i=o,\ldots,p-1,\ j=o,\ldots,q-1}$.

Démonstration : Après avoir remarqué que $\underline{H}^Z_{m,n} = \underline{H}^X_{m,n}$, il suffit de vérifier que Z est autorégressif d'ordre (1,1).

4. EQUATIONS DE FILTRAGE

Nous considérons un processus d'observation $Y = \{Y_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^\beta$ $(\beta \geq 1)$, défini par

$$Y_{m,n} = H_{m,n} X_{m,n} + W_{m,n} \qquad (4.1)$$

où X est un PMSSL à valeurs dans $\mathbb{R}^\alpha$ défini par (3.23), $H_{m,n}$ est une matrice $\beta \times \alpha$ non aléatoire et W est un bruit blanc (processus orthogonal) orthogonal à B.

Pour simplifier l'écriture, non allons poser $\underline{\underline{H}}^Y_{m,n} = \underline{\underline{G}}_{m,n}$, $\hat{X}_{m,n}(i,j) = (X_{m,n}/\underline{\underline{G}}_{i,j})$, $\varphi^h(m,n) = \varphi((m,n, (m-1,n))$, $\varphi^v(m,n) = \varphi((m,n),(m,n-1)$ et $\varphi^d(m,n) = \varphi((m,n), (m-1,n-1))$

<u>DEFINITION 5</u> : (i) L'ensemble

$$\gamma^h(m,n) = \{\gamma^h_j(m,n) = Y_{m,j} - H_{m,j}\hat{X}_{m,j}(m-1,n) : j=o,..,n\} \qquad (4.2)$$

est appelé <u>l'innovation horizontale de hauteur n au point</u> m. Cet ensemble engendre l'espace $\underline{\underline{G}}_{m,n} \ominus \underline{\underline{G}}_{m-1,n}$.

(ii) L'ensemble

$$\gamma^v(m,n) = \{\gamma^v_i(m,n) = Y_{i,n} - H_{i,n}\hat{X}_{i,n}(m,n-1) : i=o,..,m\} \qquad (4.3)$$

est appelé <u>l'innovation verticale de largeur m au point n</u>. Cet ensemble engendre l'espace $\underline{\underline{G}}_{m,n} \ominus \underline{\underline{G}}_{m,n-1}$.

(iii) Le vecteur

$$\gamma_{m,n} = Y_{m,n} - (X_{m,n}/\underline{\underline{G}}^*_{m-1,n-1}) \qquad (4.4)$$

où $\underline{\underline{G}}^*_{m-1,n-1} = \underline{\underline{G}}_{m,n-1} \vee \underline{\underline{G}}_{m-1,n}$, est appelé <u>l'innovation diagonale au point (m,n)</u>. Ce vecteur engendre $\underline{\underline{G}}_{m,n} \ominus \underline{\underline{G}}^*_{m,n}$.

Le processus de colonnes de hauteur n étant markovien, il peut être filtré par la méthode de Kalman en fonction du <u>processus d'observation de colonnes de hauteur n</u> : $\{(Y^*_{m,o} \ldots Y^*_{m,n-1}\ Y^*_{m,n})^* : m \in \mathbb{N}\}$.
On peut donc exprimer $(\hat{X}_{m,o}(m,n)^* \ldots \hat{X}_{m,n-1}(m,n)^*\ \hat{X}_{m,n}(m,n)^*)^*$ en fonction de $(\hat{X}_{m-1,o}(m-1,n)^* \ldots \hat{X}_{m-1,n-1}(m-1,n)^*\hat{X}_{m-1,n}(m-1,n)^*)^*$ et de $\gamma^h(m,n)$. Nous appelons l'équation correspondante <u>équation de filtrage horizontale de hauteur n</u> et désignons par $K^h(m,n)$ le gain du filtre de Kalman au point m.

De même, le processus de lignes de largeur m peut être filtré en fonction du <u>processus d'observation de lignes de largeur m</u> :
$\{(Y^*_{o,n} \ldots Y^*_{m-1,n}\ Y^*_{m,n})^* : n \in \mathbb{N}\}$. On peut exprimer $(\hat{X}_{o,n}(m,n)^* \ldots \hat{X}_{m-1,n}(m,n)^*\ \hat{X}_{m,n}(m,n)^*)^*$ en fonction de
$(\hat{X}_{o,n-1}(m,n-1)^* \ldots \hat{X}_{m-1,n-1}(m,n-1)^*\hat{X}_{m,n-1}(m,n-1))^*$ et de $\gamma^v(m,n)$. Nous appelons l'équation correspondante <u>équation de filtrage verticale de largeur m</u> et désignons par $K^v(m,n)$ le gain du filtre de Kalman au point n.

Nous appelons $\hat{X}_{m,n}(m,n)$ <u>l'estimation causale</u> de $X_{m,n}$. Désignons la par $\hat{X}_{m,n}$. Le processus d'estimation causale $\hat{X} = \{\hat{X}_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ satisfait à plusieurs types d'équations de récurrence que nous exprimons ci-dessous.

<u>THEOREME 4</u> :

Equation horizontale :

$$\hat{X}_{m,n} = \varphi^h(m,n)\,\hat{X}_{m-1,n} + \sum_{j=o}^{n} K^h_{n,j}(m,n)\,\gamma^h_j(m,n) \qquad (4.5)$$

Equation verticale :

$$\hat{X}_{m,n} = \varphi^v(m,n)\,\hat{X}_{m,n-1} + \sum_{i=o}^{m} K^v_{m,i}(m,n)\,\gamma^v_i(m,n) \qquad (4.6)$$

Equation diagonale :

$$\hat{X}_{m,n} = \varphi^d(m,n)\,\hat{X}_{m-1,n-1} + \Gamma_{m,n}\gamma_{m,n} + \sum_{j=o}^{n-1} \Gamma^h_j(m,n)\gamma^h_j(m,n-1) + \sum_{i=o}^{m-1} \Gamma^v_i(m,n)\gamma^v_i(m-1,n) \qquad (4.7)$$

Les équations (4.5) et (4.6) sont déduites des équations de filtrage horizontale et verticale. La démonstration de (4.7) et le calcul des coefficients Γ en fonction de $K^h(m,n)$ et $K^v(m,n)$ sont donnés dans [2] et [3].

Finalement, notons que $\hat{X}$ satisfait aussi à l'équation suivante :

$$\hat{X}_{m,n} - \varphi^h(m,n)\,\hat{X}_{m-1,n} - \varphi^v(m,n)\,\hat{X}_{m,n-1} + \varphi^d(m,n)\,\hat{X}_{m-1,n-1} = f(\gamma_{m,n}, \gamma^h(m,n-1), \gamma^v(m-1,n)) \qquad (4.8)$$

où l'expression de f peut être facilement déduite du Théorème 4. Cette équation est l'analogue de (3.24), mais le second membre ne définit pas un processus orthogonal.

<u>CONCLUSIONS</u> :

(i) D'après le Théorème 3, le modèle de filtrage présenté plus haut est aussi bien applicable au cas où X est un P.A. (p,q). Dans ce cas, on peut même considérer un processus d'observation défini par :

$$Y_{m,n} = \sum_{i=o}^{p-1} \sum_{j=o}^{q-1} H^{i,j}_{m,n} X_{m-i,n-j} + W_{m,n}$$

où W est un bruit blanc orthogonal à X.

(ii) Les relations de récurrence (4.5), (4.6), (4.7) et (4.8) satisfaites par le processus d'estimation causale contiennent des estimations non causales. Elle ne sont donc pas suffisantes pour la détermination complète de $\hat{X}$. Les véritables équations récursives sont les équations de filtrage horizontale et verticale qui sont des équations de filtrage de Kalman à un indice.

(iii) Le Théorème 4 montre encore que, pour tout chemin croissant C dans $\mathbb{N}^2$, le processus $\{\hat{X}_{m,n} : (m,n) \in \mathbb{N}^2\}$ est un processus markovien au sens large à un indice. Mais $\hat{X}$ n'est pas un PMSSL au sens de la définition 3.

REFERENCES

[1] S. ATTASI, "Stochastic state representation of images", Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Vol. 107, Springer-Verlag, 1975, p. 218-230.

[2] H. KOREZLIOGLU, "Filtrage linéaire récursif des processus à deux indices discrets, markoviens au sens large". ENST-D-78004, 1978.

[3] H. KOREZLIOGLU, "Two-parameter discrete wide sense Markov processes and their recursive linear filtering". A paraître dans les Proceedings of the 4th International Symposium on The Mathematical Theory of Networks and Systems, July 3-6, 1979. Delft University of Technology, The Netherlands.

[4] H. KOREZLIOGLU, "Two-parameter Gaussian Markov processes and their recursive linear filtering", Annales Scien. de l'Université de Clermont, Ecole d'Eté de Calcul des Probabilités, Saint-Flour, 5-22 juillet 1978.

[5] H. KOREZLIOGLU, G. MAZZIOTTO & J. SZPIRGLAS, "Equations du filtrage non linéaire pour des processus à deux indices", C.R. Acad. Sc. PARIS, t. 287, Série A-891-893, 1978.

[6] E. WONG, "Recursive causal linear filtering for two-dimensional random fields", IEEE Trans. Inf. Th., IT-24, n° 1, p. 50-59, 1978.