SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

FACTORISATION SPECTRALE ET EQUATION DE RICCATI

G. FAVIER

"LASSY"-Equipe de Recherche Associée au C.N.R.S. - 41 Bd. Napoléon III- 06041 Nice Cedex

G. SALUT

L.A.A.S. 7 avenue du Colonel Roche 31400 TOULOUSE

RESUME

Etant donné un processus stochastique $\{y(k)\}$, scalaire, discret, stationnaire, centré et de spectre $\Phi_{yy}(z)$ rationnel, le problème du filtrage linéaire optimal consiste à factoriser ce spectre de manière à en trouver le facteur stable et à inverse stable.
L'utilisation d'une forme canonique spéciale des équations d'état permet de montrer de manière explicite le lien qui existe entre le problème de la factorisation spectrale et la résolution de l'équation de RICCATI associée au problème du filtrage linéaire optimal.
Nous donnons une modélisation adéquate des matrices de covariance (Q,S,R), obtenue directement et simplement à partir du spectre $\Phi_{yy}(z)$, et permettant de calculer les paramètres de la factorisation à l'aide de la résolution de deux équations de RICCATI d'ordre n. De nouveaux algorithmes de Réalisation Stochastique sont déduits de cette modélisation.
Des résultats numériques de simulation sont donnés.

SUMMARY

A scalar, discrete, stationary, zero-mean stochastic process $\{y(k)\}$ with a rational spectral density $\Phi_{yy}(z)$ being given, the optimal linear filtering problem consists in factorizing this spectrum in order to find the stable factor with stable inverse.
The use of a special canonical form for the state equations permits to show explicitly the link which exists between the spectral factorization problem and the solution of the RICCATI's equation, associated with the optimal linear filtering problem.

We will define a special covariance matrices modelization directly and simply obtained from the spectrum $\Phi_{yy}(z)$, and permitting to compute the parameters of the factorization using the solution of two RICCATI's equations of order n.
New stochastic realization algorithms are deduced from this modelization. Numerical results of simulation are given.

FACTORISATION SPECTRALE et EQUATION de RICCATI

I - INTRODUCTION

Le problème considéré dans cet article est le suivant :
Etant donné un processus stochastique, discret, scalaire, stationnaire, centré, du second ordre, $\{y(k)\}$, et de spectre $\Phi_{yy}(z)$ rationnel :

$$(1) \qquad \Phi_{yy}(z) = \frac{\sum_{i=-n}^{i=+n} \beta_i z^i}{\sum_{i=-n}^{i=+n} \alpha_i z^i}$$

trouver une fonction $\Phi^+(z)$ satisfaisant l'égalité :

$$(2) \qquad \Phi_{yy}(z) = \Phi^+(z)\ \Phi^+(z^{-1})$$

et telle que $\Phi^+(z)$ soit stable et à inverse stable, c'est-à-dire dont les zéros et les pôles sont situés à l'intérieur du cercle unité.

Ce problème est généralement appelé "Problème de la Factorisation Spectrale".

Définitions :

Par définition, $\Phi_{yy}(z)$ est obtenu à l'aide de la transformée en z bilatérale de la fonction d'autocorrélation $\varphi_{yy}(i)$ du signal $\{y(k)\}$.

Soit :

$$(3) \qquad \Phi_{yy}(z) = \sum_{j=-\infty}^{j=+\infty} \varphi_{yy}(j)\, z^{-j}$$

Avec :

$$(4) \qquad \varphi_{yy}(j) = E\left[y(k+j)\ y(k)\right].$$

Nous définirons également une deuxième factorisation du spectre :

$$(5) \qquad \Phi_{yy}(z) = \Phi_+(z) + \Phi_+(z^{-1})$$

Avec :

$$(6) \qquad \Phi_+(z) = \frac{1}{2}\varphi_{yy}(o) + \sum_{j=1}^{j=+\infty} \varphi_{yy}(j)\, z^{-j}$$

La fonction $\Phi^+(z)$, qui correspond au "Facteur Fort" du spectre, peut s'interpréter comme la fonction de transfert du filtre qui, excité par un bruit blanc, donne en sortie un signal admettant $\Phi_{yy}(z)$ pour spectre. Ce filtre est souvent appelé "Filtre Formateur", et nous le représenterons sous la forme :

$$(7) \qquad \Phi^+(z) = \frac{\sum_{i=o}^{i=n} b_i z^i}{\sum_{i=o}^{i=n} a_i z^i} \qquad \text{avec } a_n = 1$$

ou encore :

$$(8) \qquad \Phi^+(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

La formulation de [N. WIENER - 1949] pour le problème du filtrage linéaire, dans le cas d'un processus stationnaire et scalaire, fait appel à la résolution d'une équation du type WIENER-HOPF, qui est directement liée au problème de la factorisation spectrale.

Cependant, cette approche présente les inconvénients suivants :
- nécessité de calculer les zéros des polynômes,
- difficulté pour rendre cette solution récursive vis-à-vis du temps,
- difficulté de généralisation au cas multidimensionnel.

[R. E. KALMAN - 1960] a résolu le problème du filtrage linéaire non pas en utilisant directement l'information contenue dans le spectre, mais à partir d'une modélisation du processus dans l'espace d'état de telle sorte que ce processus apparaisse comme étant la sortie d'un système dynamique linéaire excité par un bruit blanc.

Un tel modèle s'écrit :

$$(9) \qquad \begin{cases} x(k+1) = F\,x(k) + w(k) \\ y(k) \quad\ \ = H\,x(k) + v(k) \end{cases}$$

où :

$x(k)$ représente le vecteur d'état de dimension n, tel que :

$$(10) \qquad E\left[x(o)\right] = o \quad , \quad E\left[x(o)\ x^T(o)\right] = P_o$$

$\{w(k)\}$ et $\{v(k)\}$ sont des séquences de bruit blanc, supposées non corrélées avec $x(o)$, de moyenne nulle, et de covariance :

$$(11) \qquad E\left\{ \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^T(i) & v^T(i) \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} \delta(k-i)$$

Avec :

$$(12) \qquad \delta(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = o \\ o & \text{si } j \neq o \end{cases}$$

Le spectre $\Phi_{yy}(z)$ calculé à partir de la représentation (9) est égal à :

$$(13) \qquad \Phi_{yy}(z) = H(zI-F)^{-1}Q(z^{-1}I-F)^{-T}H^T + H(zI-F)^{-1}S + S^T(z^{-1}I-F)^{-T}H^T + R$$

Les équations du filtre de KALMAN en régime permanent conduisent à la Forme Filtre [P. FAURRE-1973], associée au modèle (9).

$$(14) \qquad \begin{cases} \hat{x}(k+1) = F\hat{x}(k) + K\tilde{y}(k) \\ y(k) = H\hat{x}(k) + \tilde{y}(k) \end{cases}$$

où

$\{\hat{x}(k)\}$ représente la prédiction linéaire optimale de l'état.

$\{\tilde{y}(k)\}$ qui est appelé Processus d'Innovation, est un bruit blanc de variance $\tilde{Y}_o$.

(F-KH) est une matrice asymptotiquement stable,
K gain stationnaire du filtre, est obtenu à partir de la solution stationnaire, définie positive, de l'équation de RICCATI :

$$(15) \qquad P = FPF^T - (FPH^T + S)(HPH^T + R)^{-1}(HPF^T + S^T) + Q$$

et

$$(16) \qquad K = (FPH^T + S)\ (HPH^T + R)^{-1}$$

La fonction de transfert du filtre est :

(17) $\quad G(z) = H(zI - F)^{-1}\,K+1$

Et nous avons :

(18) $\quad \Phi_{yy}(z) = G(z)\,\tilde{Y}_\circ\,G(z^{-1})$

Soit :

(19) $\quad \Phi_{yy}(z) = \left[H(zI-F)^{-1}\,K+1\right]\tilde{Y}_\circ\left[H(z^{-1}I-F)^{-1}K+1\right]$

D'autre part, $G(z)$ ayant pour pôles les valeurs propres de F et pour zéros les valeurs propres de $(F-KH)$, c'est une fraction rationnelle en z stable et à inverse stable.
Par suite, comme il est bien connu, $G(z)$ constitue le Facteur Fort du spectre $\Phi_{yy}(z)$.

Nous avons donc :

(20) $\quad \Phi^{+}(z) = G(z)\;\tilde{Y}_\circ^{\;1/2}$

Cependant, la formulation de KALMAN nécessite la connaissance a priori de l'ensemble des paramètres caractéristiques du modèle (9), à savoir (F,H,Q,R,S).
En pratique, on ne dispose pas d'une telle connaissance a priori, et il est nécessaire d'effectuer au préalable une identification des paramètres du modèle.
Une classe d'algorithmes permettant de résoudre simultanément les problèmes d'identification et de filtrage, est constituée par les algorithmes de Réalisation Stochastique construits sur la Forme Filtre (14). L'information utilisée est la fonction d'autocorrélation du processus.
Comme pour l'algorithme de [B. D. O. ANDERSON-1967], qui semble avoir formulé pour la première fois une solution algébrique pour le problème de Factorisation Spectrale, ces algorithmes se décomposent en deux étapes :

- La première étape est constituée d'un algorithme de Réalisation Minimale [B. L. HO, R. E. KALMAN-1966], qui consiste à obtenir un quadruplet (F,G,H,L), ou de manière équivalente une fonction de transfert $\dfrac{C(z)}{A(z)}$, à partir de $\Phi_{+}(z)$.

  Cette étape conduit à l'obtention du facteur stable $A(z)$ du dénominateur spectral.

- La deuxième étape correspond à la factorisation du numérateur spectral. Elle nécessite la résolution d'une équation de RICCATI et conduit à l'obtention du gain de KALMAN, et par conséquent au facteur stable $B(z)$.
  Cette étape peut être réalisée à l'aide de la fonction d'autocorrélation du processus ([P. FAURRE - 1973], [E. TSE , N. GUPTA - 1975]), ou de la fonction d'autocorrélation d'un pseudo-processus d'innovation ([B. CAREW , P. R. BELANGER - 1973], [C. A. BOZZO - 1975]).

<u>Remarque</u> : comme le montre [M. J. DENHAM-1975], le passage d'une Réalisation Minimale (F,G,H,L) de $\Phi_{+}(z)$ à la Réalisation Minimale (F_1,G_1,H_1,L_1) de $\Phi^{+}(z)$ est obtenu à l'aide de la résolution d'une équation de RICCATI, et on a :

$$(F_1, G_1, H_1, L_1) = (F, K, H, I)$$

ce qui correspond à la représentation sous Forme Filtre (14), les équations de passage étant en fait identiques aux équations de l'algorithme de FAURRE.

Ainsi que nous l'avons rappelé ci-dessus, l'approche dans l'espace d'état permet d'obtenir le Facteur Fort du spectre, en deux étapes .

Cependant, la considération de Formes Canoniques peut simplifier de manière appréciable les calculs intervenant dans chacune de ces étapes.

Ainsi, en utilisant la Forme Canonique de [G. SALUT 1976], [G. FAVIER - 1977] a obtenu de nouveaux algorithmes de Réalisation Stochastique.

Dans le cas d'une sortie scalaire, cette Forme Canonique s'écrit :

(21) $$\begin{cases} x(k+1) = Jx(k) + Ay(k) + w(k) \\ y(k) \quad\;\;\, = Hx(k) + v(k) \end{cases}$$

Avec :

(22) $$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} -a_\circ \\ \vdots \\ -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Et :

(23) $$E\left\{\begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w^T(i) & v^T(i) \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix}\delta(k-i)$$

La Forme Filtre associée au modèle (21) peut s'écrire :

(24) $$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = J\hat{x}(k) + Ay(k) + B\,\nu(k) \\ y(k) \quad\;\;\, = H\hat{x}(k) + b_n\,\nu(k) \end{cases}$$

Avec

(25) $$B = \begin{bmatrix} b_\circ \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

et : $\{\nu(k)\}$ est un bruit blanc de variance unitée.

Le vecteur de gain B est obtenu à partir de la solution stationnaire de l'équation de RICCATI suivante

(26) $\quad P = JPJ^T - (JPH^T+S)(HPH^T+R)^{-1}(HPJ^T+S^T) + Q$

(27) $\quad B = (JPH^T+S)(HPH^T+R)^{-1/2}$

Cette Forme Filtre Canonique est caractérisée par :

- n paramètres dynamiques : $\{a_\circ, \ldots, a_{n-1}\}$
- $(n+1)$ paramètres statistiques : $\{b_\circ, \ldots, b_n\}$

D'autre part, la fonction de transfert du filtre correspondant est :

(28) $$G(z) = \frac{\sum_{i=0}^{i=n} b_i\, z^i}{\sum_{i=0}^{i=n} a_i\, z^i} \qquad \text{avec } a_n = 1$$

$G(z)$ et par conséquent le modèle (24) s'expriment directement en fonction des paramètres du Facteur Fort (7) du spectre.
A partir de l'équation (28), nous pouvons en déduire la représentation du processus $\{y(k)\}$ sous forme d'une équation récurrente :

(29) $$y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n) = b_n \tilde{y}(k) + \ldots + b_0 \tilde{y}(k-n)$$

Un tel modèle est appelé ARMA (Autorégressif à Moyenne Mobile) .

II – FACTORISATION SPECTRALE ET EQUATION DE RICCATI

II.1 Présentation d'un nouvel algorithme de factorisation spectrale :

Nous allons nous intéresser tout d'abord au problème de la factorisation du numérateur spectral.

Considérons le modèle d'état (21) et définissons le vecteur de bruit suivant :

(30) $$w_G(k) = \begin{bmatrix} w(k) \\ v(k) \end{bmatrix}$$

Soit Q_G la matrice de covariance de w_G.

Nous allons montrer dans ce paragraphe que l'ensemble des paramètres statistiques (Q,R,S), ou de manière équivalente la matrice de covariance Q_G, peut être obtenue directement et simplement à partir du spectre $\Phi_{yy}(z)$, en choisissant une structure de TOEPLITZ pour Q_G.

Soit :

(31) $$Q_G = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & q_n \\ q_1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & q_1 \\ q_n & \cdots & q_1 & q_0 \end{bmatrix}$$

En appliquant la transformée en z aux équations (21), nous obtenons :

(32) $$\left[1 - H(zI-J)^{-1}A\right] Y(z) = H(zI-J)^{-1}W(z) + V(z)$$

où Y(z), W(z) et V(z) sont respectivement les transformées en z de $\{y(k)\}$, $\{w(k)\}$ et $\{v(k)\}$.

Par suite , nous avons :

(33) $$Y(z) = \frac{\left[H(zI-J)^{-1} \,\vdots\, 1\right] W_G(z)}{1 - H(zI-J)^{-1} A}$$

En remarquant que (zI – J) a la forme de Jordan :

(34) $$zI-J = \begin{bmatrix} z & & & 0 \\ -1 & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & -1 & z \end{bmatrix}$$

nous en déduisons que :

(35) $$(zI-J)^{-1} = \begin{bmatrix} z^{-1} & & & 0 \\ z^{-2} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ z^{-n} & \cdots & z^{-2} & z^{-1} \end{bmatrix}$$

et :

(36) $$H(zI-J)^{-1} = \left[z^{-n}\; z^{-n+1} \ldots\; z^{-2}\; z^{-1}\right]$$

Le spectre $\Phi_{yy}(z)$ est alors obtenu à partir des équations (33) et (36) :

(37) $$\Phi_{yy}(z) = \frac{\left[z^{-n} \ldots z^{-1}\; 1\right] \Phi_{w_G w_G} \left[z^{n} \ldots z\; 1\right]^T}{(1 + a_{n-1} z^{-1} + \ldots + a_0 z^{-n})(1 + a_{n-1} z + \ldots + a_0 z^{n})}$$

Posons :

(38) $$\Phi_{yy}(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

Comme il était prévisible à partir du modèle (21) qui fait apparaître les paramètres A correspondant au facteur stable du dénominateur spectral, D(z) est obtenu sous forme factorisée.

Calculons N(z) en remplaçant $\Phi_{w_G w_G}$ par Q_G, exprimée sous forme de TOEPLITZ à l'aide de l'équation (31).

Nous obtenons alors :

(39) $$N(z) = (n+1)q_0 + \sum_{i=1}^{i=n} (n+1-i)\, q_i (z^i + z^{-i})$$

En comparant cette égalité avec l'expression (1) du spectre, nous pouvons conclure que :

(40) $$\boxed{q_i = \frac{\beta_i}{n+1-i} \qquad \forall\, i \in [\,0, n\,]}$$

Par conséquent nous en déduisons l'algorithme suivant pour la factorisation du numérateur spectral :

1/• Calculer les coefficients "q_i" à l'aide de la relation (40).
Former le triplet (Q,R,S) :

(41) $$Q = \begin{bmatrix} q_0 & \cdots & q_{n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n-1} & \cdots & q_0 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} q_n \\ \vdots \\ q_1 \end{bmatrix} \qquad R = q_0$$

2/ • Résoudre l'équation de RICCATI :

(42) $$P = JPJ^T - (JPH^T + S)(HPH^T + R)^{-1}(HPJ^T + S^T) + Q$$

3/ • L'esnemble des paramètres "b_i" caractérisant le facteur stable du numérateur spectral, est obtenu à l'aide de la solution stationnaire de l'équation précédente

(43) $$B = (JPH^T + S)(HPH^T + R)^{-1/2}$$

(44) $$b_n^2 = HPH^T + R$$

Ainsi, à l'opération de factorisation du numérateur spectral, nous avons associé la résolution de l'équation de RICCATI (42).

Il est évident, vu la symétrie du problème, que la factorisation du dénominateur spectral peut être effectuée de la même façon, les paramètres "q_i" étant cette fois calculés à partir des coefficients " α_i" de l'expression (1) du spectre.

D'autre part, le coefficient "a_n" ayant été normalisé à 1 dans l'expression (7), et par analogie avec l'équation (44) nous avons :

(45) $$HPH^T + R = 1$$

Par suite, l'équation (42) se simplifie et devient :

(46) $$P = JPJ^T - (JPH^T + S)(HPJ^T + S^T) + Q$$

De même, l'équation (43) s'écrit :

(47) $$A = -(JPH^T + S)$$

Le changement de signe provient de la définition (22) du vecteur A, composé des paramètres "a_i" changés de signe.

En résumé, le problème de la factorisation spectrale peut être résolu à l'aide de deux équations de RICCATI, comme nous l'indiquons dans le tableau 1 .

$$\Phi_{yy}(z) = \frac{\sum_{i=-n}^{i=+n} \beta_i z^i}{\sum_{i=-n}^{i=+n} \alpha_i z^i}$$

$$q_i = \frac{\alpha_i}{n+1-i} \qquad q_i = \frac{\beta_i}{n+1-i}$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 & \cdots & q_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_n & \cdots & q_0 \end{bmatrix}$$

$$P = JPJ^T - (JPH^T + S)(HPJ^T + S^T) + Q \qquad P = JPJ^T - (JPH^T + S)(HPH^T + R)^{-1}(HPJ^T + S^T) + Q$$

$$A = -(JPH^T + S) \qquad \begin{aligned} B &= (JPH^T + S)(HPH^T + R)^{-\frac{1}{2}} \\ b_n^2 &= HPH^T + R \end{aligned}$$

Tableau 1 - Factorisation Spectrale par Résolution de deux équations de RICCATI.

II - 2 Application à l'obtention d'un nouvel Algorithme de Réalisation Stochastique :

Dans le paragraphe précédent, nous avons mis en évidence que le problème de la factorisation spectrale peut être résolu à l'aide de deux équations de RICCATI, pour lesquelles les matrices de covariance (Q, R, S) sont calculées directement à partir des coefficients "α_i" et "β_i" du dénominateur et du numérateur spectral.
Cependant, d'un point de vue pratique, nous ne disposons pas en général du spectre exprimé sous forme de fraction rationnelle (1). L'information disponible est le plus souvent la fonction d'autocorrélation du processus. Dans ce cas, nous allons proposer un nouvel algorithme de Réalisation Stochastique construit sur la Forme Filtre Canonique (24).
Comme nous l'avons indiqué au § I, cet algorithme sera composé de deux parties :

• 1ère partie : Algorithme de Réalisation Minimale permettant d'estimer les paramètres A correspondant au facteur stable du dénominateur spectral.

Cette estimation peut s'effectuer par simple inversion d'une matrice de HANKEL [G. FAVIER - 1977] .

Nous avons :

(48) $$A = \begin{bmatrix} \varphi_{yy}(1) & \cdots & \varphi_{yy}(n) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{yy}(n) & \cdots & \varphi_{yy}(2n-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \varphi_{yy}(n+1) \\ \vdots \\ \varphi_{yy}(2n) \end{bmatrix}$$

• 2ème partie : Algorithme de factorisation du numérateur spectral.
Pour cela, nous effectuons au préalable le filtrage du signal $\{y(k)\}$ à travers la partie autorégressive (AR) estimée dans l'étape précédente.
Nous obtenons ainsi un nouveau signal :

(49) $$s(k) = y(k) + a_{n-1}\, y(k-1) + \ldots + a_0\, y(k-n)$$

Par comparaison avec le modèle ARMA (29) représentatif du signal $\{y(k)\}$ nous avons également :

(50) $s(k) = b_n\, \tilde{y}(k) + \ldots + b_o\, \tilde{y}(k-n)$

Par suite, le signal $\{s(k)\}$ apparaît comme étant un processus purement MA (à Moyenne Mobile) d'ordre n , et nous avons :

(51) $\varphi_{ss}(j) = o \qquad \forall\ j > n$

Le spectre $\Phi_{ss}(z)$ qui est égal à la transformée en z bilatérale de la fonction d'autocorrélation $\{\varphi_{ss}(j)\}$ s'écrit donc :

(52) $$\Phi_{ss}(z) = \sum_{j=-n}^{j=+n} \varphi_{ss}(j)\, z^{-j}$$

D'autre part, la Forme Canonique (21) associée au signal $\{s(k)\}$ peut s'écrire :

(53) $$\begin{cases} x(k+1) = J\,x(k) + w(k) \\ s(k) \quad\;\; = H\,x(k) + v(k) \end{cases}$$

Par analogie avec l'équation (37), nous avons :

(54) $$\Phi_{ss}(z) = \left[z^{-n} \ldots z^{-1} \ 1\right] \Phi_{w_G w_G} \left[z^{n} \ldots z \ 1\right]^T$$

En fixant $\Phi_{w_G w_G}$ (c'est-à-dire Q_G) avec la structure de TOEPLITZ définie en (31),nous obtenons :

(55) $$\Phi_{ss}(z) = (n+1)q_o + \sum_{i=1}^{i=n} (n+1-i) q_i\, (z^{i} + z^{-i})$$

En comparant les expressions (52) et (55) de $\Phi_{ss}(z)$, nous en déduisons que :

(56) $$\boxed{q_i = \frac{\varphi_{ss}(i)}{n+1-i} \qquad \forall\ i \in [o,n]}$$

Les paramètres "b_i" de la factorisation du numérateur spectral peuvent être alors obtenus à l'aide de la résolution de l'équation de RICCATI (42), mais en fixant les paramètres "q_i" avec les valeurs indiquées par l'équation (56).

<u>Remarque</u> : cette équation de RICCATI peut être avantageusement remplacée par une équation du type CHANDRASEKHAR [G. FAVIER, G. ALENGRIN-1979].

En remarquant que les résultats obtenus dans cet article peuvent être appliqués au modèle (24) après avoir effectué la transformation :

(57) $\tilde{y}(k) = b_n\, \nu(k)$

nous en déduisons les (2n + 1) équations non linéaires couplées permettant de calculer les paramètres "b_i":

(58) $$\begin{cases} \tilde{Y}_o(k) = \{1 - [L_n(k-1)]^2\}\, \tilde{Y}_o(k-1) \\ L_i(k) = \dfrac{[1-\delta(i-1)]\, L_{i-1}(k-1) - L_n(k-1) D_i(k-1)}{1 - [L_n(k-1)]^2} \\ D_i(k) = D_i(k-1) - L_n(k-1)\, L_i(k) \end{cases}$$

où $L_i(k)$ et $D_i(k)$ représentent la $i^{\underline{\text{ème}}}$ composante des vecteurs L(k) et D(k), de dimension n . ($i \in [1,n]$).

D'autre part, les conditions initiales sont :

(59) $$\begin{cases} \tilde{Y}_o(o) = HP_oH^T + R \\ D(o) \;\; = (JP_oH^T + S)(HP_oH^T + R)^{-1} \\ L(o) \;\;\, = D(o) \end{cases}$$

où P_o est solution de l'équation de LYAPOUNOV

(60) $P_o = JP_oJ^T + Q$

En utilisant la structure particulière des matrices J et Q, nous obtenons :

(61) $P_o(i,j) = i\, q_{j-i} \qquad \forall\ i \leqslant j$

avec :

(62) $P_o(j,i) = P_o(i,j)$

Et par suite, les conditions initiales peuvent s'exprimer de la manière suivante :

(63) $$\begin{cases} \tilde{Y}_o(o) = (n+1)q_o \\ D_i(o) = \dfrac{i}{n+1} \quad \dfrac{q_{n-i+1}}{q_o} \\ L_i(o) = D_i(o) \end{cases}$$

La transformation (57) permet alors de passer des paramètres ($\tilde{Y}_o$, D), solution des équations (58), aux paramètres (b_n, B) à l'aide des relations :

(64) $$\begin{cases} b_n = \tilde{Y}_o^{1/2} \\ B \;\; = D\tilde{Y}_o^{1/2} \end{cases}$$

L'algorithme de Réalisation Stochastique ainsi obtenu est résumé à l'aide du tableau 2 :

$$\{y(k)\}$$

$$\downarrow$$

$$\hat{\varphi}_{yy}(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N-i} y(k+i)\, y(k)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_\circ \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{yy}(1) & \cdots & \hat{\varphi}_{yy}(n) \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{\varphi}_{yy}(n) & \cdots & \hat{\varphi}_{yy}(2n-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\varphi}_{yy}(n+1) \\ \vdots \\ \hat{\varphi}_{yy}(2n) \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$s(k) = \sum_{i=o}^{i=n} \hat{a}_{n-i}\, y(k-i)$$

$$\downarrow$$

$$\hat{\varphi}_{ss}(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{k=N-i} s(k+i)\, s(k)$$

$$\downarrow$$

$$\hat{q}_i = \frac{\hat{\varphi}_{ss}(i)}{n+1-i}$$

$$\swarrow \qquad \searrow$$

$$\tilde{Y}_\circ(o) = (n+1)\,\hat{q}_\circ$$

$$D_i(o) = \frac{i}{n+1} \quad \frac{\hat{q}_{n-i+1}}{\hat{q}_\circ}$$

$$L_i(o) = D_i(o)$$

$$\downarrow$$

Equation de CHANDRASEKHAR (58)

$$\downarrow$$

$$\hat{b}_n = \tilde{Y}_\circ^{1/2}$$

$$\hat{B} = D\tilde{Y}_\circ^{1/2}$$

$$\begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{q}_\circ & \cdots & \hat{q}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \hat{q}_n & \cdots & \hat{q}_\circ \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

Equation de RICCATI (42)

$$\downarrow$$

$$\hat{b}_n = (HPH^T + R)^{1/2}$$

$$\hat{B} = (JPH^T + S)(HPH^T + R)^{-1/2}$$

Tableau 2 Algorithmes de Réalisation Stochastique

III - EXEMPLES D'APPLICATION

1. Application de l'algorithme de factorisation spectrale pour le dénominateur spectral :

Considérons un processus du second ordre :

$$\Phi^+(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_\circ}{z^2 + a_1 z + a_\circ}$$

Nous avons :

$$\Phi_{yy}(z) = \frac{\sum_{i=-2}^{i=+2} \beta_i z^i}{\sum_{i=-2}^{i=+2} \alpha_i z^i}$$

Avec :
$$\begin{cases} \alpha_\circ = 1 + a_1^2 + a_\circ^2 \\ \alpha_1 = a_1 + a_1 a_\circ \\ \alpha_2 = a_\circ \end{cases}$$

Dans ce cas il est facile de vérifier que :

$$a_\circ = \alpha_2$$

$$a_1 = \frac{\alpha_1}{1 + \alpha_2}$$

L'application de l'algorithme défini au §II.1 pour la factorisation du dénominateur spectral nous conduit à résoudre l'équation de RICCATI (46), avec :

$$q_i = \frac{\alpha_i}{3-i}$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o & o \\ o & p_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q_2^2 & q_2(p_2+q_1) \\ q_2(p_2+q_1) & (p_2+q_1)^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_\circ & q_1 \\ q_1 & q_\circ \end{bmatrix}$$

D'autre part, l'équation (47) nous donne :

$$\begin{cases} a_\circ = q_2 \\ a_1 = p_2 + q_1 \end{cases}$$

On obtient ainsi

$$\begin{cases} p_1 = q_\circ - q_2^2 \\ p_2 = \dfrac{q_1(1-q_2)}{1+q_2} \\ p_3 = 2q_\circ - q_2^2 - \dfrac{4q_1^2}{(1+q_2)^2} \end{cases}$$

et par suite :

$$\begin{cases} a_\circ = q_2 \\ a_1 = \dfrac{2q_1}{1+q_2} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} a_\circ = \alpha_2 \\ a_1 = \dfrac{\alpha_1}{1+\alpha_2} \end{cases}$$

2. Application de l'algorithme de Réalisation Stochastique utilisant l'équation de RICCATI :

Nous donnons ci-dessous les résultats numériques obtenus pour quatre exemples simulés à partir d'un modèle purement MA :

$y(k) = \tilde{y}(k) + b_1 \tilde{y}(k-1) + b_\circ \tilde{y}(k-2)$

avec $\varphi_{\tilde{y}\tilde{y}}(o) = 10$ (soit $b_n^2 = 10$)

Paramètres exacts	Valeurs exactes des coefficients	Valeurs estimées des coefficients	Paramètres estimés
$B = \begin{pmatrix} b_\circ \\ b_1 \end{pmatrix}$ $b_n^2 = 10$	$\begin{pmatrix} q_\circ \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \hat{q}_\circ \\ \hat{q}_1 \\ \hat{q}_2 \end{pmatrix}$	$\hat{B} = \begin{pmatrix} \hat{b}_\circ \\ \hat{b}_1 \end{pmatrix}$ $\hat{b}_n^2 = \hat{b}_2^2$
$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$	4,17 -2,5 0	4,308 -2,575 0,006	0,0006 - 0,495 10,27
$B = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}$	7,5 -7,5 5	7,739 -7,752 5,241	0,509 -0,998 10,296
$B = \begin{pmatrix} 0{,}16 \\ -1 \end{pmatrix}$	6,75 -5,8 1,6	6,977 -5,981 1,707	0,159 -0,959 10,75
$B = \begin{pmatrix} 0{,}625 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$	12,14 12,19 6,25	12,503 12,462 5,863	Non Convergence

Nous constatons donc que l'algorithme converge vers les bonnes valeurs des paramètres pour les trois premiers exemples.

Par contre, il n'y a pas convergence pour le quatrième exemple. Ceci s'explique certainement par le fait que le système correspondant n'est pas à minimum de phase (il possède un zéro de module supérieur à l'unité). Cependant, si on fixe les coefficients de la matrice de TOEPLITZ avec leurs valeurs exactes $(q_\circ, q_1, q_2)$, alors l'algorithme converge vers la solution :

$$B = \begin{pmatrix} 0{,}621 \\ 1{,}495 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b_2^2 = 10{,}05$$

IV - CONCLUSION

Cet article nous a permis de montrer de manière explicite le lien qui existe entre le problème de la factorisation spectrale et la résolution de l'équation de RICCATI associée au problème du filtrage linéaire optimal.

Nous avons donné une modélisation adéquate des matrices de covariance (Q, R, S), obtenue directement et simplement à partir du spectre $\Phi_{yy}(z)$, et permettant de calculer le facteur fort $\Phi^+_{yy}(z)$ à l'aide de la résolution de deux équations de RICCATI d'ordre n . Ces deux équations possèdent la propriété importante d'être indépendantes l'une de l'autre.

Puis nous avons obtenu de nouveaux algorithmes de Réalisation Stochastique dont l'opération de factorisation du numérateur spectral peut être résolue en utilisant soit une équation de RICCATI, soit une équation de CHANDRASEKHAR. Cette dernière solution présente l'avantage d'être d'une grande simplicité.

REFERENCES

[B.D.O.ANDERSON - 1967]:"An algebraic solution to the spectral factorization problem". I.E.E.E. Tr., vol.AC-12, n°4, pp 410-414, August 1967.

[C.A. BOZZO - 1975]: "A discrete suboptimal adaptive estimation scheme for linear systems with unknown plant and measurement noise covariances". Proc. of the 6th IFAC World Congress, Boston, 1975.

[B.CAREW, P.R.BELANGER - 1973]: "Identification of optimum filter steady-state gain for systems with unknown noise covariances". I.E.E.E. Tr., vol. AC-18, n°6 , pp 582-587., December 1973.

[M.J.DENHAM - 1975]: "On the factorization of discrete-time rational spectral density matrices". I.E.E.E. Tr., on Automatic Control, pp 535-537, August 1975.

[P.FAURRE - 1973]: "Réalisations markoviennes de processus stationnaires". Rapport LABORIA, n°13, I.R.I.A., 78-Roquencourt, Mars 1973.

[G.FAVIER - 1977]: "Identification d'une représentation gaussienne markovienne. Algorithmes de réalisation stochastique". Thèse de Docteur-Ingénieur, Nice, Juin 1977.

[G.FAVIER - 1977]: "Identification d'une représentation gaussienne markovienne minimale à l'aide d'algorithmes de réalisation stochastique". Revue du CETHEDEC - n°51, pp 13-42 - 1977.

[G.FAVIER, G.ALENGRIN - 1979]: "Algorithmes de filtrage rapide. Application à l'identification des paramètres statistiques d'un modèle ARMA". Septième Colloque sur le Traitement du Signal et ses Applications. Nice 1979.

[B.L. HO, R.E.KALMAN - 1965]: "Effective construction of linear state-variable models from input-output data". Proc.3rd Allerton Conference, pp 449-459, 1965.

[R.E.KALMAN - 1960]: "A new approach to linear filtering and prediction problems" Trans.of A.S.M.E., Jnl. of Basic Engineering, vol.82D, pp.35-44, March 1960.

[G.SALUT - 1976]: "Identification optimale des systèmes linéaires stochastiques". Thèse de Doctorat d'Etat. Université P.Sabatier, Toulouse, 1976.

[E.TSE , N.GUPTA - 1975]: "Model structure determination and identifiability problems in system identification". Annual Report prepared for Office of Naval Research, Arlington, Virginia 22217. Contract N 00014 - 72 - C.0327, April 1975.

[N.WIENER - 1949]: "Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering Applications". New York Technology Press and Wiley. 1949.