

# SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS



NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

---

APPLICATION DE LA THEORIE DES RAYONS GENERALISES A LA PROPAGATION DES  
BASSES FREQUENCES DANS LES CHENAUx SONORES ET LES ZONES DE CONVERGENCE. \*  
APPLICATION OF GENERALIZED RAY THEORY TO ACOUSTIC LOW FREQUENCY PROPAGA-  
TION IN SOUND CHANNELS AND CONVERGENCE ZONES.

Alain PLAISANT

Thomson- C.S.F., Division ASM, Chemin des Travaux  
06802 Cagnes-sur-Mer - France

Thomson-C.S.F., ASM Division, Chemin des Travaux  
06802 Cagnes-sur-Mer, France

---

## RESUME

La théorie des rayons classiques donne, aux basses fréquences, de mauvais résultats en ce qui concerne les pertes de propagation au voisinage des points de retournement et des caustiques. On présente ici la théorie des rayons généralisés qui permet tout en conservant la représentation "rayons" de résoudre le problème des pertes de propagation. La méthode consiste à intégrer numériquement la fonction de Green associée au rayon considéré et obtenue par la théorie des rayons modifiés, plutôt que d'effectuer cette intégration par la méthode de la phase stationnaire comme le font les techniques classiques.

On présente les résultats obtenus dans une configuration zone de convergence et on compare ces résultats avec les prédictions d'un modèle basé sur la théorie classique des rayons : le NISSM II. On montre également quelques caractéristiques du champ obtenu au voisinage d'une caustique, dans un chenal sonore profond.

## SUMMARY

Classical ray theory gives wrong propagation losses in the vicinity of turning points and caustics, particularly at low frequencies. Generalized ray theory which solves this problem is discussed in this paper. The Green function associated with a given ray is computed and then numerically integrated instead of using the integration method of stationary phase as in classical theory.

Results obtained in a convergence zone are presented and compared with the predictions of a model based on classical ray theory : the NISSM II. Some features of the field in the vicinity of a caustic in a deep sound channel are also shown.

\* Etude financée par la DRET, Paris (France)

\* Work sponsored by DRET, Paris (France)



APPLICATION DE LA THEORIE DES RAYONS GENERALISES A LA PROPAGATION DES  
BASSES FREQUENCES DANS LES CHENAUx SONORES ET LES ZONES DE CONVERGENCE  
APPLICATION OF GENERALIZED RAY THEORY TO ACOUSTIC LOW FREQUENCY PROPAGA-  
TION IN SOUND CHANNELS AND CONVERGENCE ZONES.

1. - INTRODUCTION.

La théorie classique des rayons [1] correspond à une approximation des solutions des équations de propagation valable seulement aux hautes fréquences. Elle néglige les phénomènes de diffraction importants aux basses fréquences. La théorie des rayons présente de nombreux avantages : représentation imagée du champ acoustique, possibilité d'obtenir des indications immédiates au moins qualitatives sur des quantités utiles pour les problèmes sonars tels que le type de réverbération rencontrée, la directivité utile des antennes ; possibilité d'accès à la structure fine du signal reçu grâce à la connaissance des temps de retard des différents trajets. C'est pour conserver ces avantages qu'on a essayé d'apporter des perfectionnements à cette théorie. Dans une série d'articles [3] à [7] MURPHY et DAVIS présentent la théorie des rayons modifiés. Dans cette théorie, "l'équation séparée en  $z$ " est résolue par la méthode WKB généralisée et les solutions sont valables même au voisinage des points de retournement, contrairement aux solutions classiques. La fonction de Green obtenue est ensuite intégrée par la méthode de la phase stationnaire qui est équivalente au calcul par divergence géométrique dans un tube de rayons. Cette théorie des rayons modifiés doit son nom au fait que dans le cas d'un retournement ou d'une réflexion du rayon au voisinage ou sur une interface surface ou fond, si la fréquence est basse et l'angle de rasance faible, on observe un déplacement du rayon par rapport au rayon classique. Ce phénomène de déplacement du rayon avait d'ailleurs déjà été observé par BREKHOVSKIKH [2]. Une autre conséquence de la théorie des rayons modifiés est l'apparition de rayons transmis non prévus par la théorie classique, quand il y a un retournement sur un maximum de célérité ; ce phénomène expliquant par exemple les fuites d'énergie observées dans un chenal de surface à basse fréquence.

La théorie des rayons modifiés a été mise en application par JOSEPH et un programme de calcul mis au point [8] à [10]. Toutefois, la méthode d'intégration dite de la phase stationnaire est en défaut près des caustiques et des points de retournement. En 1975 WEINBERG [11] introduit la théorie des rayons généralisés qui consiste à trouver la fonction de Green par la théorie WKB généralisée comme pour les rayons modifiés mais de procéder ensuite à une intégration numérique, dans les zones où l'intégration par la méthode de la phase stationnaire ne peut s'appliquer. Le but de cet exposé est, après avoir rapidement présenté l'essentiel de la théorie des rayons généralisés, de montrer

comment elle a été mise en application et comment les résultats obtenus se comparent avec les prévisions d'autres modèles.

2. - THEORIE DES RAYONS GENERALISES.

2.1. Solutions WKB généralisées de l'équation séparée en  $z$ .

On se place dans le cas d'un milieu stratifié horizontalement, c'est-à-dire que la surface et le fond sont plans et parallèles, et la célérité ne dépend que de la profondeur  $z$ .

Dans ce cas, le champ à la distance  $r$  et à l'immersion récepteur  $z$ , dû à une source ponctuelle à l'immersion  $z_0$ , peut s'écrire, à un facteur de proportionnalité près, sous la forme :

$$\Psi(r, z) = \int_0^\infty G(z, \xi) J_0(k_0 \xi r) \cdot \xi \cdot d\xi \quad (1)$$

avec  $k_0 = \frac{\omega}{c(z)}$  •  $G(z, \xi)$  est la fonction de Green et  $\xi$  une variable d'intégration qui, en théorie classique, représente le cosinus de l'angle de départ du rayon.

Pour calculer le champ on procède en deux étapes : calcul de la fonction de Green et ensuite intégration suivant (1). On montre que  $G(z, \xi)$  s'exprime en fonction des solutions  $Z^+$  et  $Z^-$  de l'équation séparée en  $z$  sans second membre :

$$\frac{d^2 Z(z, \xi)}{dz^2} + k_0^2 p^2(z, \xi) Z(z, \xi) = 0 \quad (2)$$

$$\text{où : } p^2(z, \xi) = c^2(z) - \xi^2$$

La méthode WKB généralisée utilisée pour résoudre l'équation (2), pour une fonction  $p(z, \xi)$  quelconque est une méthode de perturbation s'appuyant sur des solutions connues de l'Eq. (2) pour des fonctions particulières  $p(z, \xi)$ . En effet, on connaît des solutions analytiques de (2) pour  $p^2(z, \xi)$  constante, linéaire en  $z$  et quadratique en  $z$ . Pour  $p^2(z, \xi)$  linéaire en  $z$ , les solutions sont les fonctions d'Airy  $A_1$  et  $B_1$ . Dans les zones où  $p^2(z, \xi)$  ressemble à une fonction linéaire en  $z$ , c'est-à-dire dans les zones où le gradient de célérité reste de même signe, on peut calculer des solutions approchées de (2) sous forme de perturbations des fonctions d'Airy. Dans chacune de ces zones, il ne peut y avoir qu'un zéro de  $p^2(z, \xi)$ , et donc qu'un point de retournement.

Pour le détail des calculs on peut se reporter de [5] à [10] ; on trouve deux solutions indépendantes  $Z^+$  et  $Z^-$  qui s'écrivent :

APPLICATION DE LA THEORIE DES RAYONS GENERALISES A LA PROPAGATION DES BASSES FREQUENCES DANS LES CHENAUx SONORES ET LES ZONES DE CONVERGENCE  
APPLICATION OF GENERALIZED RAY THEORY TO ACOUSTIC LOW FREQUENCY PROPAGATION IN SOUND CHANNELS AND CONVERGENCE ZONES

Zone à gradient de célérité positif :

$$Z^\pm(z, \xi) = [\bar{k}_0 |p(z, \xi)|]^{-\frac{1}{2}} |S(z, \xi)|^{1/4} [\bar{B}_1(S(z, \xi)) \mp iA_1(S(z, \xi))] e^{\pm i\pi/4} \quad (3)$$

Zone à gradient de célérité négatif :

$$Z^\pm(z, \xi) = [\bar{k}_0 |p(z, \xi)|]^{-\frac{1}{2}} |S(z, \xi)|^{1/4} [\bar{B}_1(-S(z, \xi)) \pm iA_1(-S(z, \xi))] e^{\mp i\pi/4} \quad (4)$$

S(z, \xi) est donné par :

$$S(z, \xi) = \int_{z_t}^z k_0 |p(z, \xi)| dz \quad \text{pour } z > z_t \quad (5)$$

$$= - \int_z^{z_t} k_0 |p(z, \xi)| dz \quad \text{pour } z < z_t$$

z<sub>t</sub> est la profondeur du point de retournement dans la zone considérée et tel que p<sup>2</sup>(z<sub>t</sub>, \xi) = 0.

On obtient ainsi des solutions valables dans toute la zone à gradient uniforme considérée, alors que les solutions classiques, qui sont des exponentielles complexes ne sont pas valables au voisinage des points de retournement.

2.2. Fonction de Green représentant un rayon.

Le profil de célérité c(z) n'étant pas uniforme dans un cas général, on est amené à découper le milieu en plusieurs zones horizontales dans lesquelles le gradient de célérité garde le même signe. Dans chacune de ces zones, on connaît les solutions de l'équation séparée en z, voir Eqs (3) et (4). On peut montrer [9] que la fonction de Green calculée à partir des fonctions Z<sup>+</sup> et Z<sup>-</sup>, des conditions aux limites sur la surface et le fond et des conditions de continuité aux interfaces entre deux zones à gradients de célérité opposés, peut se décomposer en une série de termes dont chacun représente la contribution d'un type de rayon déterminé par le nombre de réflexions sur les interfaces et le nombre de transmissions entre zones qu'il subit.

La fonction de Green représentant un rayon donné prend la forme :

$$G(z, \xi) = i\pi \cdot Z_{i_0}^\pm(z_0, \xi) Z_{i_r}^\pm(z, \xi) \prod_{i=0}^N \gamma_{i, i+1}^{R_i} \cdot \gamma_{i, i+1}^{T_{i+1}} \quad (6)$$

où les \gamma\_{i, i+1}^R(\xi) et \gamma\_{i, i+1}^T(\xi) représentent des coefficients de réflexion et de transmission entre les zones i et i+1. On a d'ailleurs \gamma\_{i, i+1}^R = \gamma\_{i+1, i}^R

$$\gamma_{i, i+1}^T = \gamma_{i+1, i}^T$$

.N représente le nombre de zones à gradient de célérité uniforme (i = 1 pour la première zone)

.m<sub>i</sub> est le nombre total de réflexions ou retournements sur l'interface entre les zones i et i+1 (dans les deux sens)

.n<sub>i</sub> représente le nombre total de transmissions de l'interface i, i+1 (dans les 2 sens)

. convention : \gamma\_{0,1}^{R\_{0,1}} = \gamma\_{sur} représente le coefficient de réflexion sur la surface

\gamma\_{N, N+1}^{R\_{N, N+1}} = \gamma\_{fond} représente le coefficient de réflexion sur le fond.

. Si le rayon issu de la source part vers le haut, on doit prendre Z\_{i\_0}^+ ; tandis que s'il part vers le bas on prendra Z\_{i\_0}^-

. Si le rayon arrive au récepteur par le haut, on doit prendre Z\_{i\_r}^+ ; tandis que s'il arrive par le bas on prendra : Z\_{i\_r}^-

L'expression (6) permet de calculer la fonction de Green représentant un rayon donné si on connaît sa trajectoire et si on sait calculer les divers \gamma R et \gamma T. Pour les détails de ce calcul, on pourra se reporter à [9]. Les expressions des \gamma R et \gamma T sont longues et complexes ; elles sont données dans [9].

Corrections de la fonction de Green :

Quand le récepteur se trouve au-delà d'un point de retournement, en zone d'ombre pour le rayon considéré, les arguments des fonctions d'Airy qui interviennent dans Z\_{i\_r}^\pm sont positifs et peuvent devenir grands. Comme B<sub>1</sub> tend exponentiellement vers l'infini, pour de tels arguments, on atteint vite la capacité limite des calculateurs.

On remarque que dans un tel cas, on n'est plus sur la trajectoire du rayon et la décomposition de la fonction de Green perd sa signification. Il faut remplacer alors Z\_{i\_r}^\pm dans (6) par :

$$\left. \begin{array}{l} \text{avant retournement} : Z_{i_r}^\pm \\ \text{après retournement} : \gamma_{i,j}^{R_{i,j}} Z_{i_r}^\pm \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1}{2} (Z_{i_r}^\pm + \gamma_{i,j}^{R_{i,j}} Z_{i_r}^\pm)$$

sur l'interzone i, j

La croissance exponentielle dans Z\_{i\_r}^\pm est alors compensée par celle de \gamma\_{i,j}^{R\_{i,j}} Z\_{i\_r}^\pm de signe opposé.

Le même problème se produit au niveau du calcul de Z\_{i\_0}^\pm pour les angles de départ imaginaires, c'est-à-dire pour les valeurs de \xi supérieures à 1.



APPLICATION DE LA THEORIE DES RAYONS GENERALISES A LA PROPAGATION DES  
BASSES FREQUENCES DANS LES CHENAUx SONORES ET LES ZONES DE CONVERGENCE  
APPLICATION OF GENERALIZED RAY THEORY TO ACOUSTIC LOW FREQUENCY PROPAGA-  
TION IN SOUND CHANNELS AND CONVERGENCE ZONES

Dans ce cas, on corrigera  $Z_{i_0}^{\pm}$  de la façon suivante :

- Zone source à gradient de célérité négatif :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rayon partant vers le bas : } Z_{i_0}^- \\ \text{Rayon partant vers le haut : } \gamma_{R_{i,i-1}} Z_{i_0}^+ \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} [Z_{i_0}^- + \gamma_{R_{i,i-1}} Z_{i_0}^+]$$

- Zone source à gradient de célérité positif :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Rayon partant vers le haut : } Z_{i_0}^+ \\ \text{Rayon partant vers le bas : } \gamma_{R_{i,i+1}} Z_{i_0}^- \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} [Z_{i_0}^+ + \gamma_{R_{i,i+1}} Z_{i_0}^-]$$

Pour assurer la continuité de la fonction de Green, on effectuera cette correction quand l'argument des fonctions d'Airy atteint la valeur -1,17371 qui correspond au dernier zéro de  $B_i [1]$ .

### 2.3. Intégration de la fonction de Green.

Si on s'intéresse au champ à grande distance de la source, on peut prendre l'expression asymptotique de  $J_0$  dans (1) et si on ne retient que l'onde qui s'éloigne de la source, on obtient :

$$\Psi(r,z) = (2\pi k_0 r)^{-1/2} \int_0^{\infty} G(z,\xi) e^{ik_0 \xi r} \cdot \sqrt{\xi} \cdot d\xi \quad (7)$$

La Fig. 3 montre l'allure de la fonction à intégrer dans un cas où la méthode de la phase stationnaire s'applique. La Fig. 4 montre l'allure des fonctions à intégrer obtenues pour un rayon dans une zone de convergence semblable à une caustique. On voit qu'on ne retrouve pas l'allure typique obtenue Fig. 3 et que par conséquent on doit recourir à l'intégration numérique. Deux méthodes ont été essayées pour l'intégration numérique :

- La méthode de Gauss qui consiste à décomposer la fonction à intégrer sur une base de polynômes orthogonaux de Legendre. On est ainsi amené à calculer la fonction pour un nombre  $2n$  de points,  $n$  étant l'ordre de la décomposition [12]. Cette méthode n'a finalement pas été retenue car elle est mal adaptée au cas où la fonction à intégrer oscille beaucoup et il est difficile, sans faire de nombreux tests, de connaître à l'avance les caractéristiques de cette fonction.

- La méthode de Newton ou des trapèzes, qui consiste à faire l'accumulation des demi-sommes successives des divers échantillons. C'est cette méthode qui a

été choisie en procédant de la façon suivante :

- On détermine le pas d'échantillonnage  $\Delta\xi_{\text{éch}}$  par des tests sur la fréquence locale de la fonction tous les degrés à partir du point stationnaire  $\xi_0 = \cos \theta_0$ .
- On intègre du point stationnaire jusqu'au premier zéro de la fonction.
- On calcule les contributions des périodes successives jusqu'à ce qu'une période représente moins de 10 % de l'intégrale partielle de  $\xi_0$  au début de la période considérée.
- On exécute ce calcul de part et d'autre du point stationnaire sur les parties réelles et imaginaires de la fonction à intégrer.

### 3. - APPLICATIONS.

#### 3.1. Zone de convergence.

Les Fig. 1 et 2 montrent un tracé de rayons modifiés à 2500 Hz et 10 Hz pour la même bathy Atlantique, dans une configuration zone de convergence. On remarque, à 10 Hz, le déplacement des rayons vers les grandes distances au retournement sur le fond, qui est une des conséquences de la théorie des rayons modifiés. Sur la Fig. 4 on voit les fonctions à intégrer obtenues pour un rayon issu de la source à 5 m et arrivant au récepteur à 10 m après un retournement fond, à différentes fréquences.

Une comparaison a été tentée entre les résultats fournis par le modèle "RAYGENE" mettant en application la théorie des rayons généralisés et un programme classique connu : le NISSM II. "RAYGENE" ne possédant pas le calcul automatique des rayons propres, c'est-à-dire des rayons de types différents joignant source et récepteur, cette opération a été effectuée à la main. Elle était nécessaire car le NISSM II fournit les pertes globales en fonction de la distance et non pas les pertes rayon par rayon. Les Fig. 5 et 6 montrent les résultats obtenus à 2500 et 100 Hz.

A 2500 Hz, les prédictions sont comparables, à par un léger déplacement de la zone de convergence dû au fait que le NISSM II opère un lissage sur le profil de célérité et donc ne travaille pas exactement avec la même bathy que le RAYGENE. Par contre, à 100 Hz, on observe un affaiblissement d'environ 10 dB et un étalement de la zone de convergence par rapport aux prédictions du NISSM II.



APPLICATION DE LA THEORIE DES RAYONS GENERALISES A LA PROPAGATION DES  
 BASSES FREQUENCES DANS LES CHENAUX SONORES ET LES ZONES DE CONVERGENCE  
 APPLICATION OF GENERALIZED RAY THEORY TO ACOUSTIC LOW FREQUENCY PROPAGATION  
 IN SOUND CHANNELS AND CONVERGENCE ZONES

3.2. Champ près d'une caustique dans le chenal sonore profond.

La Fig. 7 montre le tracé de rayons modifiés obtenu pour une source dans le chenal sonore profond à 1800 m, pour la même bathy que celle exploitée en zone de convergence. On voit l'existence d'une caustique qui coupe l'immersion récepteur de 2100 m à environ 58 km. La Fig. 8 présente le champ obtenu à trois fréquences (les pertes de propagation) par la contribution des rayons formant la caustique, en faisant varier la distance  $r$  dans l'expression (7) de la fonction à intégrer.

On observe que le minimum de pertes se déplace vers les grandes distances quand la fréquence baisse, que pour les "hautes" fréquences 500 et 5000 Hz, l'intensité fluctue beaucoup au voisinage de la caustique, phénomène dû probablement à l'interférence entre rayons voisins.

On remarque aussi que la perte minimum observée croît quand la fréquence diminue et que, en basse fréquence, on retrouve de l'énergie dans la zone d'ombre de la théorie classique (distances inférieures à 58 km).

4. - CONCLUSIONS.

La théorie des rayons généralisés a pu être mise en application dans un modèle qui calcule la perte de propagation sur chaque rayon à son passage à l'immersion récepteur un profil de célérité quelconque : les résultats fournis par ce modèle sont théoriquement valables même au voisinage et sur les caustiques ainsi qu'au voisinage des points de retournement ; ils demanderaient à être validés par confrontation avec des résultats expérimentaux aux basses fréquences. On a vu que la méthode des rayons généralisés est un outil de choix pour l'étude du champ près des caustiques et dans les zones d'ombre de la théorie classique.

BIBLIOGRAPHIE.

- [1] C.B. Officer "Introduction to the theory of sound transmission" Mc Graw Hill (1958)
- [2] L.M. Brëkhovskikh "Waves in layered media" Academic Press, N.Y. (1960)
- [3] E.L. Murphy "Ray representation of diffraction effects in the split-beam sound field" JASA vol 43 3, p. 610-618 (1968)
- [4] E.L. Murphy "Modified ray theory for the two turning point problem" JASA vol 47-3, p. 899-908 (1970)
- [5] E.L. Murphy and J.A. Davis "Modified ray theory for bounded media" JASA vol 56-6, p. 1747-1760 (Dec 1974)
- [6] J.A. Davis "Modified ray theory for discontinuous media" Woods Hole Oceanographic Institution Tech Rep. n° 74-31 (June 1974)
- [7] J.A. Davis "Extended modified ray theory field in bounded and unbounded inhomogeneous media" JASA vol 57-2, p. 276-286 (1975)
- [8] J. Joseph, Marché DRME n° 76/082, 1er rapport d'étude
- [9] J. Joseph, Marché DRME n° 76/021, deuxième rapport d'étude
- [10] J. Joseph, Marché DRME n° 76/082, Rapport de synthèse finale
- [11] H. Weinberg "Application of ray theory to acoustic propagation in horizontally stratified oceans" JASA vol 58-1, p. 97-109 (July 1975)
- [12] M. Abramovitz and I.A. Stegun "Handbook of mathematical functions" Dover Publications, N.Y. (1965)



APPLICATION DE LA THEORIE DES RAYONS GENERALISES A LA PROPAGATION DES  
BASSES FREQUENCES DANS LES CHENAUx SONORES ET LES ZONES DE CONVERGENCE

APPLICATION OF GENERALIZED RAY THEORY TO ACOUSTIC LOW FREQUENCY PROPAGATION  
IN SOUND CHANNELS AND CONVERGENCE ZONES

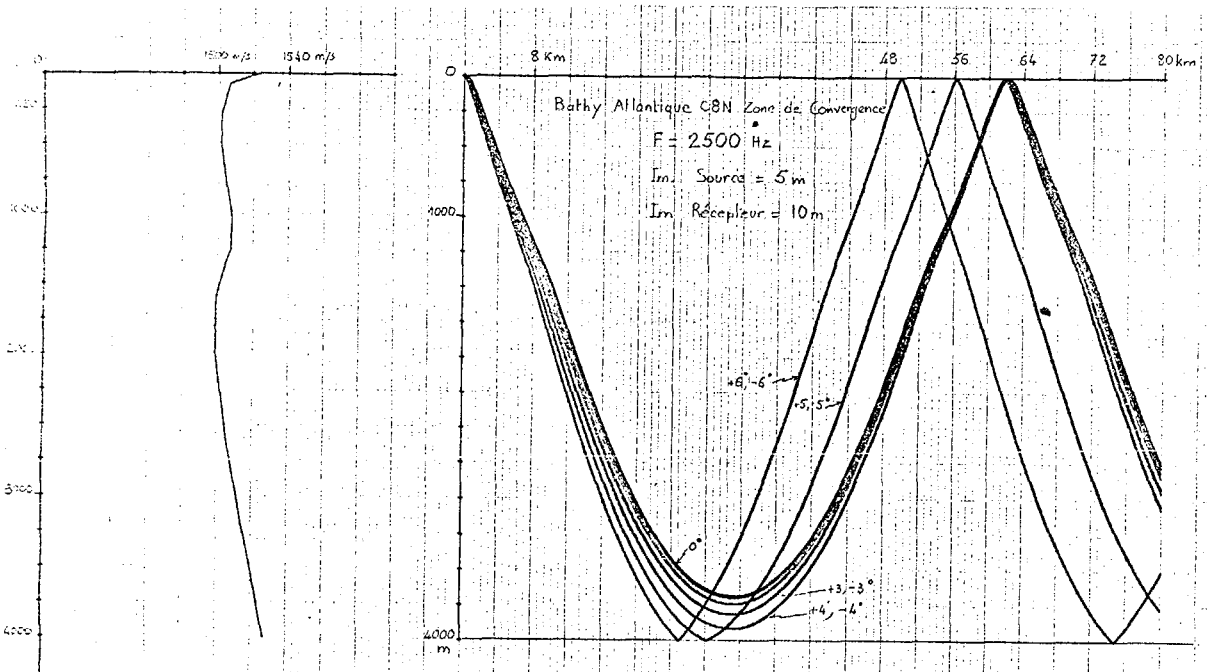


Fig. 1 - Tracé de rayons modifiés - Zone de convergence Atlantique - Fréquence 2500 Hz

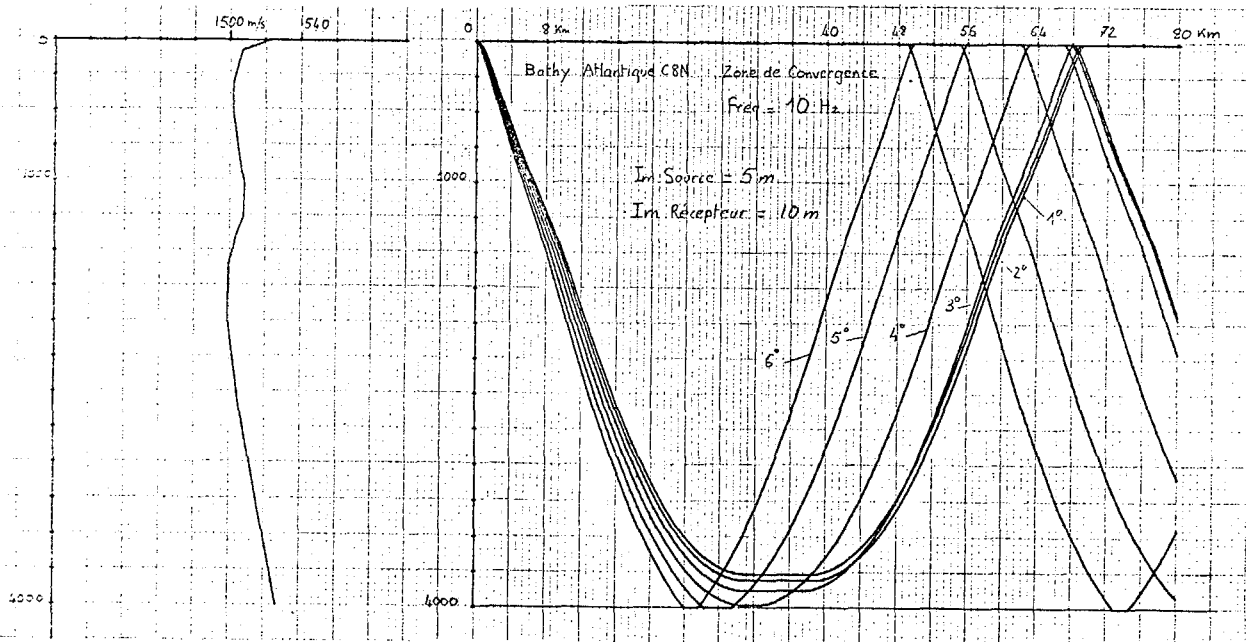


Fig. 2 - Tracé de rayons modifiés - Zone de convergence Atlantique - Fréquence 10 Hz

APPLICATION DE LA THEORIE DES RAYONS GENERALISES A LA PROPAGATION DES BASSES FREQUENCES DANS LES CHENAUX SONORES ET LES ZONES DE CONVERGENCE  
 APPLICATION OF GENERALIZED RAY THEORY TO ACOUSTIC LOW FREQUENCY PROPAGATION IN SOUND CHANNELS AND CONVERGENCE ZONE

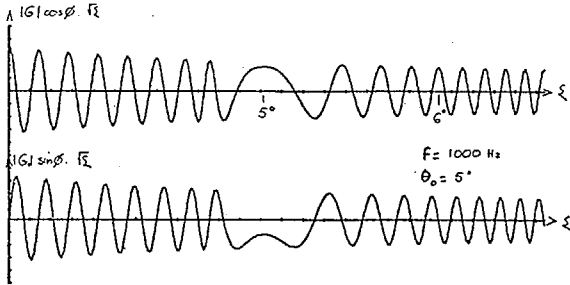


Fig. 3 - Zone de convergence Atlantique. Fonction à intégrer ; cas où la méthode de la phase stationnaire s'applique

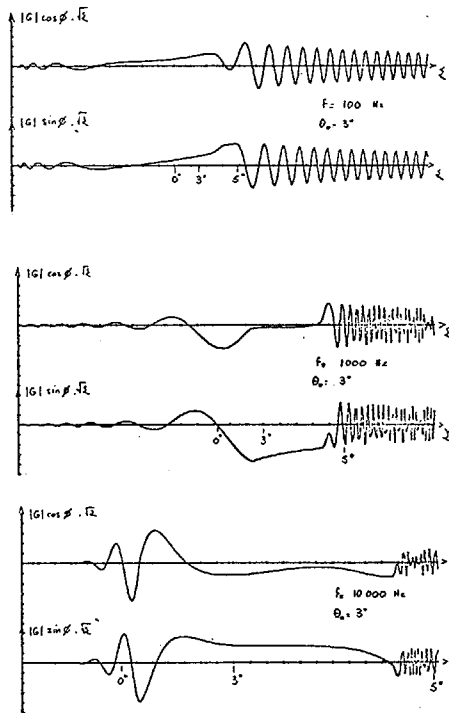


Fig. 4 - Zone de convergence Atlantique  
 Exemples de fonctions à intégrer

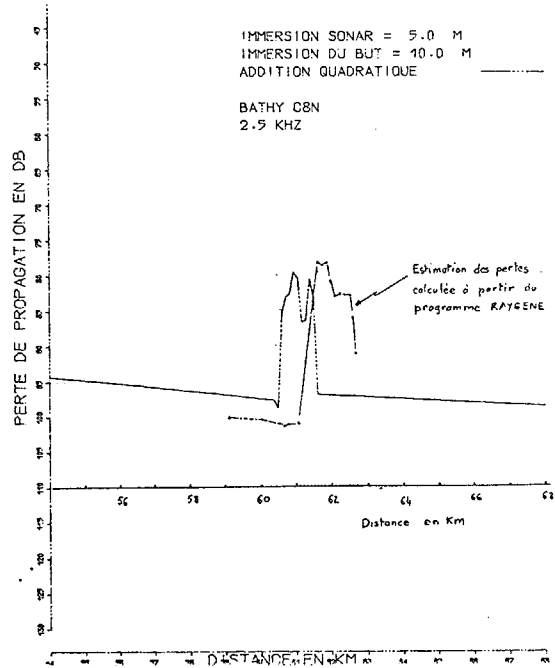


Fig. 5 - Zone de convergence Atlantique - Comparaison avec le NISSM II - Fréquence 2.5 kHz

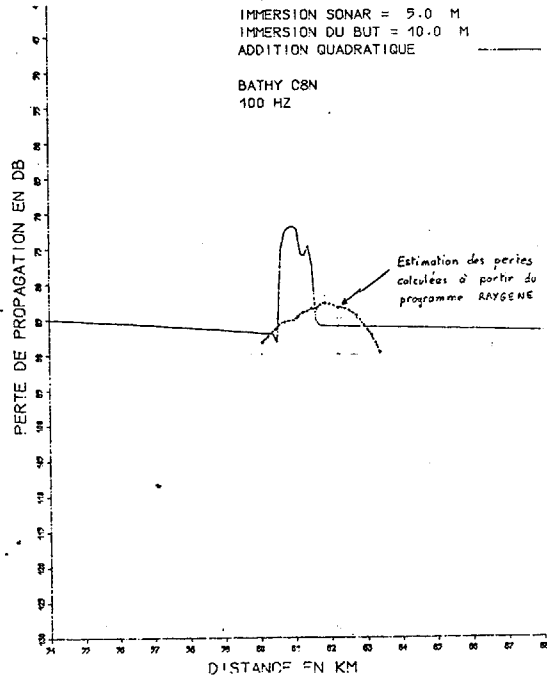


Fig. 6 - Zone de convergence Atlantique - Comparaison avec le NISSM II - Fréquence 100 Hz



APPLICATION DE LA THEORIE DES RAYONS GENERALISES A LA PROPAGATION DES BASSES FREQUENCES DANS LES CHENAUx SONORES ET LES ZONES DE CONVERGENCE  
 APPLICATION OF GENERALIZED RAY THEORY TO ACOUSTIC LOW FREQUENCY PROPAGATION IN SOUND CHANNELS AND CONVERGENCE ZONE

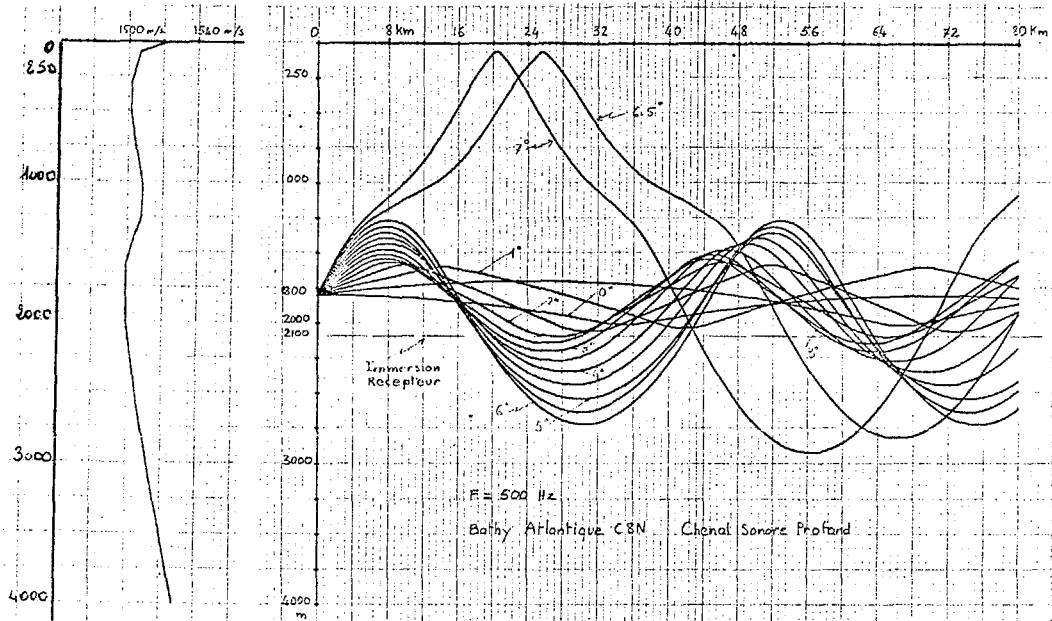


Fig. 7 - Tracé de rayons modifiés - Chenal sonore profond Atlantique

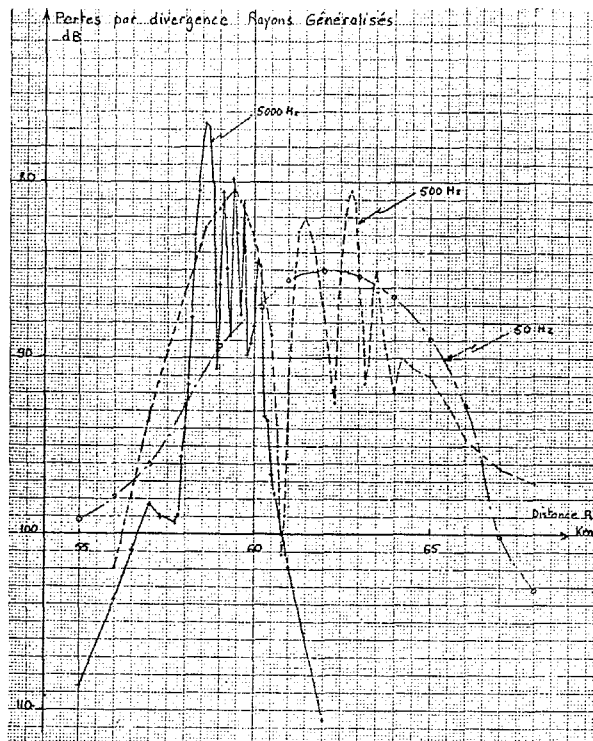


Fig. 8 - Chenal sonore profond Atlantique. Pertes au voisinage d'une caustique en fonction de la distance.