SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

MODELISATION DU BRUIT ARTIFICIEL

J. DE REFFYE

CNET 38-40 rue du Général Leclerc 92131 ISSY LES MOULINEAUX

RESUME

La différence la plus importante entre un bruit artificiel simple et un environnement bruité général, est la décomposition de celui-ci en bruits élémentaires, qui apparaissent et disparaissent à des instants aléatoires. Ainsi, il est possible de considérer deux manières d'aborder la modélisation du bruit industriel.

a) Il est possible de considérer le processus physique comme un système de files d'attente $(G/G/\infty)$, où le nombre de serveurs est infini, et la comparaison entre le modèle réel et la théorie des files d'attente est la suivante :

1) Les brouilleurs représentent les clients

2) Le temps de service est la durée des brouillages

3) L'état de la file d'attente est défini par le nombre de brouilleurs qui sont présents simultanément.

b) Le processus physique est considéré comme un processus de naissance-mort, dans lequel les nombres λ_j et μ_j représentent respectivement les probabilités de transition infinitésimales que le j ième bruit apparaisse et disparaisse.

Nous supposons qu'on ne peut pas séparer les brouilleurs, et, par hypothèse, nous poserons :

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_j = \lambda \\ \mu_j = j\cdot\mu\end{array}\right. \quad \text{(processus d'immigration-mort)}$$

Quand on cherche à résoudre le problème dans le cas stationnaire, les deux modèles ci-dessus aboutissent alors au même résultat. Soit $\xi(t)$ le processus représentant le nombre de parasites simultanés dans l'étude de la file d'attente et $\zeta(t)$ le nombre de parasites simultanés dans l'étude du processus de

SUMMARY

The more important difference between a single interference and a general electromagnetic man-made noise, is the decomposition of the general model in elementary noises, that appear and disappear at random moments. So, it is possible to consider two ways for modeling man-made noise :

a) The physical process is modelized by a queuing system, where the servers number is infinite $(G/G/\infty)$, and the relationship between the real model and the queuing theory is that :

1) Interferences represent customers

2) The service time is the duration of interferences

3) The state of the queue is defined by the number of interferences that are simultaneous.

b) The physical process is considered as a birth-death process, in which the λ_j and μ_j numbers represent respectively infinitesimal transition probabilities that the j th noise occurs and vanishes.

We suppose that we cannot distinguish the interferences, and, by hypothesis, one puts :

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_j = \lambda \\ \mu_j = j\cdot\mu\end{array}\right. \quad \text{(Immigration-death process)}$$

In the stationary case, the two models, described above, supply the same result. Let $\xi(t)$ be the number of simultaneous interferences in the queuing theory, and $\zeta(t)$ be the number of interferences that are simultaneously present in the birth-death process theory, and we have :

$$\forall n \geq 0 : \lim_{t\to\infty} P[\xi(t)=n] = \lim_{t\to\infty} P[\zeta(t)=n] = \lim_{t\to\infty} P_n(t) = P_n$$

SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

MODELISATION DU BRUIT ARTIFICIEL

J. DE REFFYE

CNET 38-40 rue du Général Leclerc 92131 ISSY LES MOULINEAUX

RESUME

de naissance-mort. On a :

$$\forall n \geq 0 : \lim_{t \to \infty} P[\xi(t)=n] = \lim_{t \to \infty} P[\xi(t)=n]$$
$$= \lim_{t \to \infty} P_n(t) = P_n$$

et la variable aléatoire N telle que :

$$P_n = P\ (N = n)$$

suit une loi de Poisson.

La loi de probabilité du bruit industriel est alors la loi de N variables aléatoires, où chaque v. a. représente un brouillage indépendant et équidistribué d'après l'hypothèse de l'indiscernabilité des brouilleurs.

SUMMARY

The random variable N defined by :

$$P_n = P\ (N = n)$$

follows a Poisson law.

At last, the probability distribution function of the man-made noise is the law of N random independant and equidistributed variables, where each variable corresponds to an interference.

MODELISATION DU BRUIT ARTIFICIEL

I - INTRODUCTION

Si l'on observe un environnement général perturbateur (exemple : ville, usine, autoroute,...), on pourra remarquer, tout d'abord, que le bruit est généré par une multitude de causes élémentaires. La deuxième constatation est que chaque perturbation élémentaire est engendrée, souvent, d'une façon temporaire.

Cette décomposition possible d'un bruit industriel en un très grand nombre de causes de durée limitée définit ce que nous appellerons son caractère impulsif.

D'autre part, nous nous placerons au niveau du récepteur de télécommunications, ce qui exclue toute étude spatiale du phénomène.

Chaque phénomène élémentaire aura, en général, un caractère aléatoire, du fait de son évolution propre et/ou de sa propagation.

Comme tous ces phénomènes brouilleurs seront indiscernables, en pratique, nous supposerons qu'ils sont indépendants et équidistribués.

Pour représenter mathématiquement le bruit industriel, nous pouvons utiliser deux grandes familles de modèles possibles :

1) Un bruit industriel peut être modélisé par :

a) Un processus aléatoire caractérisant le nombre de brouilleurs simultanément présents à l'instant t : N (t).

b) La fonction aléatoire d'un brouilleur type $Z(t)$.

N (t) caractérise la structure impulsive du bruit tandis que $Z(t)$ caractérise sa nature.

2) On peut aussi envisager un autre modèle général de la façon suivante :

a) Le processus N (t) est un processus de comptage des parasites durant l'intervalle de temps $[o, t]$.

b) La fonction aléatoire $Z(t)$ caractérise à la fois le caractère aléatoire du brouilleur et sa durée d'activité.

Dans les deux cas, le processus général $X(t)$ est déterminé par la somme de toutes les fonctions aléatoires $Z(t)$ par rapport au processus N (t), ce que nous écrivons :

$$X(t) = \sum_{i=o}^{N(t)} Z_i(t)$$

où $Z_i(t)$ est la f. a. du i^{eme} brouilleur élémentaire.

Nous allons nous limiter, dans cette étude, à la première famille de modèles. Le processus N (t) sera modélisé de deux façons :

1) Nous considérerons une file d'attente à nombre infini de serveurs, (type G/G/∞), et nous prendrons des temps inter-arrivés et des durées de service exponentiels (modèle M/M/∞).

2) Puis nous modéliserons N (t) par un processu de naissance-mort d'un type particulier : le processus d'immigration-mort.

En effet, dans le cas 1), les temps d'apparition des brouillages sont caractérisés par les temps inter-arrivées tandis que la durée des brouillages définit le temps de service d'un tel modèle.

Par contre, dans la deuxième modélisation, les brouilleurs étant supposés indépendant les uns des autres, il est naturel de poser :

$$\lambda_n = \lambda$$
$$\mu_n = n\mu$$

λ_n et μ_n étant les probabilités de transition infinitésimales que le $n^{ème}$ brouilleur apparaisse et disparaisse. En effet, on suppose que l'arrivée d'un brouilleur ne dépend pas du nombre de brouilleurs existants, mais que le départ d'un brouilleur est proportionnel au nombre de brouilleurs existants (brouilleurs indiscernables).

II - MODELISATION COMME UN SYSTEME A FILE D'ATTENTE

Supposons que $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ soient les instants d'arrivée des brouillages, tels que les temps inter-arrivées θ_n soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées :

$$P(\theta_n \leq x) = P(\tau_n - \tau_{n-1} \leq x) = F(x) \ ; (n = 1, 2, \ldots)$$

Notons χ_n, la durée du $n^{ième}$ brouillage, et supposons que $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n, \ldots$ soient des variables aléatoires identiquement distribuées, indépendantes :

$$P(\chi_n \leq x) = H(x) \ ; \ (n = 1, 2, \ldots)$$

et indépendantes de $\{\tau_n\}$.

Soit $\xi(t)$ le nombre de brouillages qui sont présent au temps t, $\xi(o)$ étant le nombre initial pour t = o.

Nous considérons, dans la suite, le cas où F (x) et H (x) sont exponentiellement distribuées avec la condition : $\xi(o) = o$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$$
$$H(x) = 1 - e^{-\mu x} \qquad x \geq 0$$

II - 1 - Théorème :

Si les temps inter-arrivés sont exponentiellement distribués, et si nous avons la condition initiale : $\xi(0) = 0$, la probabilité que k brouillages soient simultanément présents au temps t, $P_k(t)$, est donnée par :

$$P_k(t) = \frac{e^{-\lambda \int_0^t (1-H(x))\,dx} \left[\lambda \int_0^t (1-H(x))\,dx\right]^k}{k!}$$

II - 2 - Théorème :

Si, de plus, la durée des brouillages est exponentiellement distribuée, la probabilité $P_k(t)$ est donnée par :

$$P_k(t) = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})} \left(\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})\right)^k}{k!}$$

La fonction génératrice, $G(z, t)$, définie par :

$$G(z,t) = \sum_{k \geq 0} P_k(t)\, z^k$$

est alors donnée par :

$$G(z,t) = \exp\left(\frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})(z-1)\right)$$

II - 3 - Application au cas stationnaire :

La probabilité stationnaire, P_k, est définie par :

$$P_k = \lim_{t \to \infty} P_k(t) ,$$

et nous obtenons immédiatement :

$$P_k = \frac{e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!}$$

$$G(z) = \lim_{t \to \infty} G(z,t) = e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)}$$

(Fonction génératrice d'une loi de Poisson)

III - MODELISATION COMME UN PROCESSUS DE NAISSANCE-MORT

Le processus de naissance-mort est un processus de Markov, dont les seules transitions possibles sont :

$$n-1 \to n$$
$$n \to n$$
$$n+1 \to n,$$

auxquelles correspondent les probabilités de transition infinitésimales suivantes :

$$P_{n-1,n}(t, t+dt) = \lambda_n\, dt + o(dt)$$
$$P_{n,n-1}(t, t+dt) = \mu_n\, dt + o(dt)$$
$$P_{n,n}(t, t+dt) = 1 - (\lambda_n + \mu_n)\,dt + o(dt)$$

Si tous les brouilleurs sont indépendants et équidistribués, chaque brouilleur a comme probabilités infinitésimales d'apparition et de disparition, respectivement λdt et μdt. Si nous avons n brouilleurs simultanément en présence, comme on ne peut pas les discerner, la probabilité qu'un brouilleur disparaisse est alors égale à n.μdt, si bien qu'on est amené à poser :

$$\forall n \geq 1 : \quad \lambda_n = \lambda$$
$$\forall n \geq 1 : \quad \mu_n = n\mu$$

Nous obtenons un processus d'immigration-mort.

Soit $P_n(t)$ la probabilité que nous ayons n brouillages simultanés au temps t. Par application de la théorie des probabilités, nous obtenons le système d'équations différentielles suivant :

$$n \geq 1 : \quad \frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda + n\mu)\, P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu\, P_{n+1}(t)$$

$$n = 0 : \quad \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

III - 1 - Théorème :

La fonction génératrice, $G(z, t)$, est une solution de l'équation aux dérivés partielles suivantes :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\mu(z-1)\frac{\partial G}{\partial z} + \lambda(z-1)\, G(z,t)$$

III - 2 - Application au cas stationnaire :

Supposons l'existence de probabilités stationnaires P_n, définies par :

$$\forall n \geq 0 : \quad P_n = \lim_{t \to \infty} P_n(t)$$

$$\sum_{n \geq 0} P_n = 1$$

Alors la fonction génératrice G (z), définie par :

$$G(z) = \sum_{n \geq 0} P_n z^n$$

est égale à :

$$G(z) = e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)}$$

C'est la fonction génératrice du modèle de la file d'attente à nombre de serveurs infini.

En résumé, dans le cas stationnaire, les deux modélisations décrites ci-dessus donnent le même résultat, et le cas stationnaire est intéressant, car il est possible de l'obtenir expérimentalement par des mesures de longue durée.

D'autre part, ultérieurement, nous introduirons l'utilisation des notions spectrales.

Nous allons maintenant étudier le bruit industriel dans le cas stationnaire.

IV - REPRESENTATION DU BRUIT INDUSTRIEL STATIONNAIRE

Nous savons que le bruit impulsif est la somme de brouillages aléatoires, dont le nombre obéit à une loi de Poisson ;

Et d'après les hypothèses précédentes, le bruit industriel stationnaire, S_N, est défini par :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} X_n$$

où :

N suit une loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{\mu}$.

X_n est la v. a. du $n^{\text{ième}}$ brouilleur, tous les brouilleurs étant indépendants, équidistribués et indépendants de N.

La fonction caractéristique de S_N, $\varphi_{S_N}(u)$, est donnée par :

$$\varphi_{S_N}(u) = e^{\frac{\lambda}{\mu}(\varphi_X(u)-1)}$$

où $\varphi_X(u)$ est la fonction caractéristique de X.

V - APPLICATION AUX SIGNAUX GAUSSIENS

V - 1 - Signal purement impulsif :

Supposons que X soit une variable gaussienne centrée, de variance Σ^2.

La loi de la v. a. S_N, qui est une loi composée sur une loi de Poisson de moyenne $\frac{\lambda}{\mu}$, a ses deux premiers moment égaux à :

$$E(S_N) = \frac{\lambda}{\mu} E(X) = 0$$

$$\operatorname{var}(S_N) = E(S_N^2) = \frac{\lambda}{\mu} E(X^2) = \frac{\lambda}{\mu}\Sigma^2 = \sigma^2$$

σ est mesurable, et nous trouvons :

$$\Sigma^2 = \sigma^2 \cdot \frac{\mu}{\lambda}$$

Par conséquent, les f. c. de X et S_N sont égales respectivement à :

$$\varphi_X(u) = e^{-\sigma^2\frac{\mu}{\lambda}u^2}$$

$$\varphi_{S_N}(u) = \exp\left(\frac{\lambda}{\mu}\left(e^{-\sigma^2\frac{\mu}{\lambda}u^2} - 1\right)\right)$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \cdot \sum_{m \geq 0} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!} \cdot e^{-m\sigma^2\frac{\mu}{\lambda}u^2}$$

D'où nous déduisons la densité de probabilité du bruit industriel :

$$p(y) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{m \geq 0} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!} \frac{e^{-\frac{y^2}{2m\sigma^2\frac{\mu}{\lambda}}}}{\sqrt{2\pi m\sigma^2\frac{\mu}{\lambda}}}$$

V - 2 - Bruit pseudo-impulsif :

Supposons, maintenant, qu'un bruit gaussien et indépendant, centré et de variance σ_G^2 , s'ajoute au bruit précédent. La fonction caractéristique du bruit total est égale à :

$$\varphi_{S_N}(u) = e^{-\sigma_G^2 u^2} e^{\frac{\lambda}{\mu}\left\{\exp\left(-\sigma^2\frac{\mu}{\lambda}u^2\right) - 1\right\}}$$

$$= e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{m \geq 0} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!} \cdot e^{-\left(\sigma_G^2 + m\sigma^2\frac{\mu}{\lambda}\right)u^2}$$

Dès lors, on en déduit la d. d. p. de S_N :

$$p(y) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{m \geq 0} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!} \frac{e^{-\frac{y^2}{2\left(\sigma_G^2 + m\sigma^2\frac{\mu}{\lambda}\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(\sigma_G^2 + m\sigma^2\frac{\mu}{\lambda}\right)}}$$

La probabilité que le bruit industriel dépasse un niveau donné Y est donnée par :

$$P(y \geq Y) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{m \geq 0} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!} \operatorname{erfc}\left(\frac{Y}{\sqrt{\sigma_G^2 + m\sigma^2\frac{\mu}{\lambda}}}\right)$$

V - 3 - Brouilleurs gaussiens à bande étroite :

Par des considérations analogues, nous obtenons la probabilité cumulative que le module d'un bruit industriel formé de brouilleurs à bande étroite, dépasse un niveau donné :

$$P(\rho \geq R) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sum_{m \geq 0} \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m}{m!} e^{-\frac{R^2}{2\left(\sigma_G^2 + m\sigma^2 \frac{\mu}{\lambda}\right)}}$$

V - 4 - Remarque :

Si nous posons :

1) $\dfrac{\lambda}{\mu} = A$ (index d'impulsivité)

2) $z = \dfrac{X}{\sqrt{\sigma_G^2 + \sigma^2}}$ (variable normalisée)

$\varepsilon = \dfrac{\rho}{\sqrt{\sigma_G^2 + \sigma^2}}$ (variable normalisée)

4) $$\frac{\sigma^2 \frac{m}{A} + \sigma_G^2}{\sigma^2 + \sigma_G^2} = \frac{\frac{m}{A} + \Gamma'}{1 + \Gamma'} = \sigma_m^2$$

Nous retrouvons les formules du modèle "classe A" de D. MIDDLETON. Celui-ci avait pris un modèle général pour le bruit industriel dans la deuxième famille de processus définie dans l'introduction.

Les formules trouvées sont assez générales puisqu'elles sont une solution commune de 3 modèles mathématiques généraux pour représenter le bruit industriel.

BIBLIOGRAPHIE

1) J. DE REFFYE : Considérations théoriques sur les interférences électromagnétiques. (Note Technique : CNET TCR/APH).

2) D. MIDDLETON : Man-Made Noise in Urban Environments and Transportation Systems : Models and Measurements (IEEE Transaction on communications, Vol. COM 21, N° 11, Nov. 1973).

3) W. FELLER : An Introduction to Probability Theory and it's Applications (J. WILEY 1970).

4) L. TAKACS : An Introduction to the Theory of Queues (Cambridge).