SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

POSITIVITE DES REPRESENTATIONS CONJOINTES EN TEMPS ET FREQUENCE DES SIGNAUX D'ENERGIE FINIE ; REPRESENTATION HILBERTIENNE ET CONDITIONS D'OBSERVATION DES SIGNAUX

B. ESCUDIE[(1)] P. FLANDRIN[(1)] J. GRÉA[(2)]

(1) Laboratoire Traitement du Signal
I.C.P.I. LYON

2) Service Physique Théorique - Institut de Physique Nucléaire
Université Claude Bernard VILLEURBANNE

RESUME

Une étude récente a fourni la condition nécessaire et suffisante de positivité de la Représentation conjointe en temps et fréquence $\rho(t,\nu)$ des signaux d'énergie finie $Z \in L^2_{\mathbb{C}}$. La fonction de pondération f est alors une fonction d'Ambiguïté χ. Ceci suggère la recherche de la "règle de correspondance" fournissant les opérateurs linéaires utilisés dans la représentation hilbertienne des Signaux. On étudie particulièrement les opérateurs associés aux grandeurs , $\langle t^p \nu^k \rangle_Z$, d'interprétation physique immédiate par la fonction d'Ambiguïté. La règle de correspondance se simplifie si $P(t) \in L^2_{\mathbb{C}}$ tel que $f = \chi_P^*$ obéit à un ensemble de relations généralisant celle de LEVINE :

$$\lambda_L \pm \langle \omega \rangle_P \langle t \rangle_P = 0$$

Ceci définit aussi une classe de signaux permettant l'estimation optimale décorrélée de paramètres dépendants.

Vu ces résultats on généralise un théorème démontré par M.H.ACKROYD sur le caractère positif de la convolution bidimensionnelle de deux Représentations conjointes. On obtient une Représentation conjointe positive à partir de Représentations du type défini par J. VILLE ou d'autres auteurs.

Dans cette perspective la mesure d'un paramètre du Signal, tel que la fréquence instantanée ν_i, est physiquement possible. Ceci impose que f dépende du signal analytique Z associé au signal $S \in L^2_{\mathbb{R}}$ étudié. Ces procédés sont commodes pour des signaux à produit durée bande BT grand.

SUMMARY

A previous work has pointed out the necessary and sufficient condition of positiveness for time and frequency joint representations of finite energy signal $Z \in L^2_{\mathbb{C}}$. The weighting function f is then an Ambiguity one. This suggests to explicit the "correspondence rule" giving the linear operators used in the hilbertian representation of signals. We particularly study the operators related to the quantities $\langle t^p \nu^k \rangle_Z$, whose physical interpretation is immediate, according to the Ambiguity function. We ensure a great simplification for the correspondence rule if $P(t) \in L^2_{\mathbb{C}}$, such as $f = \chi_P^*$, obeys a set of conditions, generalizing those of B. LEVINE :

$$\lambda_L \pm \langle \omega \rangle_P \langle t \rangle_P = 0$$

This result is closely related to a set of signals leading to the optimum uncorrelated estimation of dependant parameters.

According to these results, we generalize M. H. ACKROYD's theorem on the positiveness of the bidimensional convolution of two joint representations. We get a positive representation with those defined by J. VILLE or other authors.

In such a way, the measure of signal parameters, as instantaneous frequency $\nu_i(t)$ is physically possible. This implies for f to be functionnally dependent on the analytic signal Z associated to the real signal $S \in L^2_{\mathbb{R}}$. These processes are convenient for signals with a large bandwidth-duration BT product.

POSITIVITE DES REPRESENTATIONS CONJOINTES EN TEMPS ET FREQUENCE DES SIGNAUX D'ENERGIE FINIE ; REPRESENTATION HILBERTIENNE ET CONDITION D'OBSERVATION DES SIGNAUX.

INTRODUCTION

La Représentation énergétique conjointe en temps et fréquence des signaux d'énergie finie est un moyen d'analyse des signaux relativement puissant. Elle est liée à la fonction d'Ambiguïté du Signal et permet , à l'aide des moments relatifs aux quantités $t^p\nu^k$, d'en décrire le comportement au voisinage de l'origine. Ceux-ci conditionnent l'écriture des opérateurs associés dans la Représentation hilbertienne. C'est dans cette perspective que l'on analyse les signaux à l'aide des Représentations conjointes douées de positivité.

1) RAPPEL DE LA CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE DE POSITIVITE

Il existe une formulation générale de la représentation conjointe énergétique : [1] [2]

$$\rho_f(t,\nu) = \int_{R^3} f(\eta,\tau)\, e^{2i\pi\eta(u-t)}\, Z\!\left(u+\tfrac{\tau}{2}\right) Z^*\!\left(u-\tfrac{\tau}{2}\right) e^{-2i\pi\nu\tau}\, d\eta\, du\, d\tau \quad (1a)$$

$$\rho_f(t,\nu) \underset{\nu\ \theta}{\overset{t\ \phi}{\rightleftharpoons}} f(\theta,\phi)\,\chi_Z^*(\theta,\phi),\ Z\in L^2_{\mathbb{C}},\ \|Z\|^2=1 \quad (1b)$$

Z(t) est le signal analytique associé au signal $S\in L^2_{\mathbb{R}}$; f, fonction de pondération est telle que :

$$f(\eta,\tau)\in\{\mathcal{P}\} \rightarrow \begin{cases}\rho\in\mathbb{R}\\ \int_{R^2}\rho\, dt\, d\nu=\|Z\|^2\end{cases} \quad (2)$$

Un travail récent a montré que : [3]

$$f\in\{\chi\}\subset\{\mathcal{P}\} \longleftrightarrow \rho_f=|\ell(t,\nu)|^2\geq 0 \quad (3a)$$

où $\{\chi\}$ est la classe des fonctions d'Ambiguïté . Ceci conduit à :

$$\left.\begin{aligned} f(\eta,\tau) &= \chi_P^*(\tau,\eta)=\int_R P\!\left(u+\tfrac{\tau}{2}\right)P^*\!\left(u-\tfrac{\tau}{2}\right)e^{2i\pi\eta u}\,du\\ \rho_f(t,\nu) &= \left|\int_R Z(\theta)\,P^*(t-\theta)\,e^{2i\pi\nu(t-\theta)}\,d\theta\right|^2\\ P^{\#}(t) &= P^*(-t)\end{aligned}\right\} \quad (3b)$$

Dans ce cas, $\rho_f(t,\nu)\geq 0$ possède le caractère de densité, qui rend son interprétation physique très commode [4] .Il s'ensuit que :

$$\rho_f(t,\nu)=|\ell(t,\nu)|^2 \underset{\nu\quad\tau}{\rightleftharpoons} R_f(t,\tau)=\Gamma_L(t,\tau) \quad (4)$$

$R_f(t,\tau)$, représentation bitemporelle, est alors une fonction d'autocorrélation $\Gamma_L(t,\tau)$ associée à la représentation conjointe d'amplitude ℓ :

$$L(t,\theta) \underset{\theta\quad\nu}{\rightleftharpoons} \ell(t,\nu) \quad (5)$$

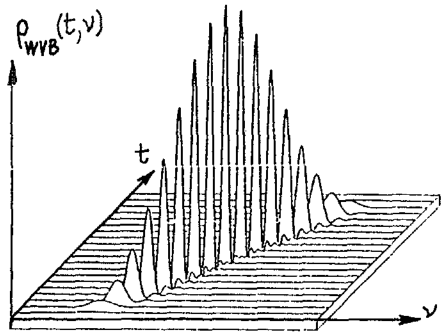

Fig. 0 a : BT = 30

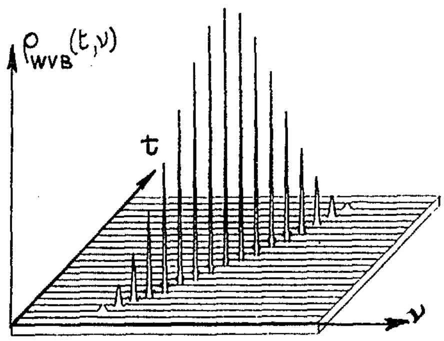

Fig. 0 b : BT = 120

Fig. 0 : Représentation en temps et fréquence du type WIGNER-VILLE-BONNET pour un signal modulé linéairement en fréquence.

$$Z(t)=A(t)\,e^{i2\pi\left(\nu_0 t+\frac{1}{2}\frac{B}{T}t^2\right)}$$

$$A(t)=\Pi_T(t)\cos\pi\frac{t}{T}$$

Cette représentation conjointe d'amplitude rejoint toutes celles déjà définies par divers auteurs [5][6][7] . L'expression donnée en (3) est une forme générale qui contient la représentation dite de FLANAGAN-PIMONOV et celle dite "représentation sonographique" [8][9]. Une telle expression, notée $\rho_{FPK}(t,\nu)$, fut aussi proposée à l'aide d'arguments différents par V.V. KURYSHKIN et M.D.SRINIVAS et E.WOLF dans le cadre de la Mécanique Quantique [10][11]. On peut définir $\rho(t,\nu)$ par une autre voie que celle qu'exprime la relation (1) ; celle-ci généralise les définitions déjà proposées.

Partant de la remarque de SRINIVAS et WOLF que : [11]

$$\mathcal{O}_f\left\{e^{2i\pi(nt+\tau\nu)}\right\} = f(n,\tau)\, e^{2i\pi(n\hat{t}+\tau\hat{\nu})}$$

et que, dans le cas particulier f = 1 : [1] [10] :

$$\left\langle e^{2i\pi(n\hat{t}+\tau\hat{\nu})}\right\rangle_Z = \chi^*_Z(\tau,n)$$

on a : $\langle \mathcal{O}_f(g)\rangle = \langle \hat{G}\rangle_Z = \int_{R^2} g(t,\nu)\rho(t,\nu)\,dt\,d\nu$

Le fait que : [4] $\rho\in\mathbb{R},\ \rho<K<\infty \rightarrow f\in\{\mathcal{F}\}$

entraîne, pour $g(t,\nu) = e^{2i\pi(nt+\tau\nu)}$:

$$\rho(t,\nu) = \int_{R^2} f(n,\tau)\, \chi^*_Z(\tau,n)\, e^{-2i\pi(nt+\tau\nu)}\,dn\,d\tau$$

d'où :

$$\rho_f(t,\nu) = \int_{R^3} f(n,\tau)\, e^{2i\pi n(u-t)}\, z\left(u+\frac{\tau}{2}\right) z^*\left(u-\frac{\tau}{2}\right) e^{-2i\pi\nu\tau}\,dn\,du\,d\tau$$

2) REGLES DE CORRESPONDANCE ; ECRITURE HILBERTIENNE DANS LE CAS POSITIF :

A partir d'une grandeur physique $g(t,\nu)$, on définit la "valeur moyenne" ou moment : [2]

$$\left.\begin{aligned} &\langle g\rangle_\rho = \int_{R^2}\rho(t,\nu)\, g(t,\nu)\,dt\,d\nu \\ &g(t,\nu) \underset{\nu\ \theta}{\overset{t\ \ \phi}{\rightleftharpoons}} \gamma(n,\theta)\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

L'opérateur hermitique associé $\hat{G}$ tel que [2] : $\langle \hat{G}\rangle_Z = \langle Z|\hat{G}|Z\rangle = \langle g\rangle_\rho$

s'écrit : [1]

$$\hat{G} = \int_{R^2}\gamma(n,\tau)\, e^{i\pi n\tau} f(n,\tau)\, e^{2i\pi(n\hat{t}+\tau\hat{\nu})}\,dn\,d\tau \quad (7)$$

avec $\hat{t}$ et $\hat{\nu}$ opérateurs hermitiques tels que [10] :

$$[\hat{t},\hat{\nu}] = \frac{i}{2\pi}\mathbb{1}$$

Dans le cas où $\rho(t,\nu) = |\ell(t,\nu)|^2$, la relation (7) définit $\hat{G}$ par le seul choix de $f = \chi^*_P \in\{\chi\}\subset\{\mathcal{F}\}$. Cette expression coïncide avec la "règle de correspondance" définie à priori et de manière arbitraire par V.V.KURYSHKIN [10]:

$$\hat{G}|Z\rangle = \int_R Z(t_1)\int_R g_1(u+t,\,t-t_1)\,P(u)\,P^{\#}(t_1-t-u)\,du\,dt_1 \quad (8)$$

où $g_1(t,\theta) \underset{\theta\ \nu}{\rightleftharpoons} g(t,\nu)$

Nous utilisons la relation (3a) et en déduisons une règle de correspondance cohérente avec la définition donnée en (7) . Elle doit fournir l'expression des moments :

$$\left.\begin{aligned} &\langle t^p\nu^k\rangle_{\rho_f} = \int_{R^2} t^p\nu^k \rho_f(t,\nu)\,dt\,d\nu \\ &\rho(t,\nu)\geqslant 0\end{aligned}\right\} \quad (9a)$$

C'est la démarche que nous utilisâmes auparavant [2]. Cherchons l'opérateur associé à $t^p\nu^k$ tel que :

$$\langle \hat{G}(t^p\nu^k)\rangle_Z = \langle t^p\nu^k\rangle_{\rho_f} \quad (9b)$$

Compte tenu de la relation (1b) , il vient :

$$\boxed{\langle t^p\nu^k\rangle_{\rho_f} = \frac{1}{(2i\pi)^{p+k}}\left(\frac{\partial^{p+k}}{\partial n^p\partial\tau^k}\left[f(n,\tau)\chi^*_Z(\tau,n)\right]\right)_{0,0}} \quad (10)$$

avec $\rho = |\ell(t,\nu)|^2$, $f(n,\tau) = \chi^*_P(\tau,n)$.

Cette relation importante lie le moment $\langle t^p\nu^k\rangle$, au terme f près, aux dérivées à l'origine de χ^*_Z. Ces dérivées interviennent de manière fondamentale dans la théorie de l'estimation optimale [11] . L'application de (10) au cas positif nous conduit à définir , [4], à l'aide de (7) et de (9b) les opérateurs suivants notés $\mathcal{O}_{FPK}$:

$$\underbrace{\begin{aligned}
\mathcal{O}_{FPK}(t\nu) &= \frac{1}{2}(\hat{t}_P\hat{\nu}_P+\hat{\nu}_P\hat{t}_P) - \frac{1}{2\pi}\left(\lambda^L_P + 2\pi\langle\hat{t}\rangle_P\langle\hat{\nu}\rangle_P\right) \\
\mathcal{O}_{FPK}(t^2\nu) &= \hat{t}_P\hat{\nu}_P\hat{t}_P - \frac{1}{2\pi}\left(\xi_P + 2\pi\langle\hat{t}\rangle_P\langle\hat{\nu}\rangle_P\right)\mathbb{1} - \frac{\hat{t}}{\pi}\left(\lambda^L_P + 2\pi\langle\hat{t}\rangle\langle\hat{\nu}\rangle\right) \\
&\quad + \Delta t^2_P\cdot\hat{\nu} \\
\mathcal{O}_{FPK}(t\nu^2) &= \hat{\nu}_P\hat{t}_P\hat{\nu}_P + \frac{1}{2\pi}\left(\zeta_P - 2\pi\langle\hat{t}\rangle_P\langle\hat{\nu}\rangle^2_P\right)\mathbb{1} - \frac{\hat{\nu}}{\pi}\left(\lambda^L_P + 2\pi\langle\hat{t}\rangle_P\langle\hat{\nu}\rangle_P\right) \\
&\quad + \Delta\nu^2_P\cdot\hat{t} \\
\mathcal{O}_{FPK}(t^2\nu^2) &= \hat{t}_P\hat{\nu}^2_P\hat{t}_P + \frac{1}{4\pi^2}\left[\left(\alpha^{(4)}_P - \frac{1}{2}\right) - 4\pi^2\langle\hat{t}\rangle^2_P\langle\nu\rangle^2_P\right]\mathbb{1} + \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\left[(\zeta_P - 2\pi\langle\hat{t}_P\rangle\langle\hat{\nu}\rangle_P)\hat{t} - (\xi_P + 2\pi\langle\hat{t}\rangle^2_P\langle\hat{\nu}\rangle^2_P)\hat{\nu}\right] \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\left(\lambda^{L*}_P + 2\pi\langle\hat{t}\rangle_P\langle\hat{\nu}\rangle_P\langle\hat{t}\hat{\nu}+\hat{\nu}\hat{t}\right) + \Delta t^2_P\hat{\nu}^2 + \Delta\nu^2_P\hat{t}^2 - \frac{\mathbb{1}}{8\pi^2}
\end{aligned}}_{(11)}$$

avec

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{t}_P = \hat{t} + \langle\hat{t}\rangle_P\mathbb{1},\ \hat{\nu}_P = \hat{\nu} + \langle\hat{\nu}\rangle_P\mathbb{1},\ [\hat{t}_P,\hat{\nu}_P] = \frac{i\mathbb{1}}{2\pi} \\
&\lambda^L_P = \int_R t\,\mathrm{Im}(P\dot{P}^*)\,dt,\ \xi_P = \int_R t^2\,\mathrm{Im}(P\dot{P}^*)\,dt \\
&\zeta_P = \int_R \nu^2\,\mathrm{Im}(p(\nu)\dot{p}^*(\nu))\,d\nu,\ \alpha^{(4)}_P = \int_R t^2|\dot{P}(t)|^2\,dt \\
&\Delta t^2_P = \langle\hat{t}^2\rangle_P - \langle\hat{t}\rangle^2_P,\ \Delta\nu^2_P = \langle\hat{\nu}^2\rangle_P - \langle\hat{\nu}\rangle^2_P
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

...

Les termes $\lambda_P^L, \alpha_P^{(1)}, \xi_P, \mathcal{Z}_P, \Delta t_P^2, \Delta\nu_P^2$ interviennent directement dans la théorie de l'estimation optimale [11] [12]. Ces relations peu maniables traduisent le caractère positif de la représentation dans la règle de correspondance. Elles peuvent cependant se simplifier de manière remarquable . En effet $\rho_f(t,\nu) \geqslant 0$ entraîne $f \in \{\chi\}$; supposons que les quantités suivantes Φ_{pk} sont nulles :

$$\Phi_{pK} = \left(\frac{\partial^{p+k}}{\partial n^p \partial \tau^K}\chi_P^* - \left(\frac{\partial}{\partial n}\chi_P^*\right)^p \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\chi_P^*\right)^K\right)_{0,0} \equiv 0 \qquad (13)$$

$\Phi_{0,0}, \Phi_{11}=0$ sont toujours vérifiées pour $P \in L^2_{\mathbb{C}}$.

Soit :

$$\Phi_{pk} = 0 \quad , p+k \leq 4$$

Notons que les relations :

$$\Phi_{11} = 2\pi\left(\lambda_P^L + 2\pi \langle\hat{\mathbf{t}}\rangle_P \langle\hat{\mathbf{v}}\rangle_P\right) = 0$$

$$\Phi_{22} = 4\pi^2\left[\alpha_P^{(1)} - \frac{1}{2} - 4\pi^2 \langle\hat{\mathbf{t}}\rangle_P^2 \langle\hat{\mathbf{v}}\rangle_P^2\right] = 0$$

généralisent celles de B. LEVINE [12]

$$\lambda_P^L \pm 2\pi \langle\hat{\mathbf{t}}\rangle_P \langle\hat{\mathbf{v}}\rangle_P = 0$$

permettant le découplage entre estimations de paramètres dépendants au sens du maximum de vraisemblance [12] . La condition (13) entraîne pour les relations (11) : p + k $\leq$ 4

$$\Theta_{FPK}(t\nu) = \frac{1}{2}\left(\hat{\mathbf{t}}_P\hat{\mathbf{v}}_P + \hat{\mathbf{v}}_P\hat{\mathbf{t}}_P\right), \Theta_{FPK}(t\nu^2) = \hat{\mathbf{v}}_P\hat{\mathbf{t}}_P\hat{\mathbf{v}}_P + \Delta\nu_P^2\hat{\mathbf{t}}$$

$$\Theta_{FPK}(t^2\nu) = \hat{\mathbf{t}}_P\hat{\mathbf{v}}_P\hat{\mathbf{t}}_P + \Delta t_P^2\hat{\mathbf{v}}, \Theta_{FPK}(t^2\nu^2) = \hat{\mathbf{t}}_P\hat{\mathbf{v}}_P^2\hat{\mathbf{t}}_P + \Delta t_P^2\hat{\mathbf{v}}^2 + \Delta\nu_P^2\hat{\mathbf{t}}^2 - \frac{\mathbf{I}}{8\pi^2} \qquad (14)$$

L'expression simplifiée (14) est valable si $\chi_P^*(\tau,n) = f(n,\tau)$ vérifie (13) . $P(t)$ étant réelle et paire, il en est ainsi ; en particulier la représentation de GLAUBER associe aux grandeurs g l'opérateur $\Theta_G(g)$: [13] [14]

$$\Theta_G\{e^{i2\pi(nt+\tau\nu)}\} = e^{\lambda\hat{\mathbf{b}}} \cdot e^{\lambda^*\hat{\mathbf{b}}^+} \qquad \left\{\begin{array}{l}\hat{\mathbf{b}} = \sqrt{\pi}(\hat{\mathbf{t}} + i\hat{\mathbf{v}}) \\ \lambda = \sqrt{\pi}(\tau + in)\end{array}\right. \qquad (15)$$

$$\left.\begin{array}{l}\rho_G(t,\nu) = \left|\int_{\mathbb{R}} Z(u) e^{-\pi(u-t)^2} e^{2i\pi\nu u} du\right|^2 \\ \text{soit } f(n,\tau) = e^{-\frac{\pi}{2}(n^2+\tau^2)} \; ; P(t) = e^{-\pi t^2} \in L^2_{\mathbb{C}}\end{array}\right\} \qquad (16)$$

$$\text{d'où} \quad \langle t\nu\rangle_{\rho_G} = \frac{1}{2\pi}\lambda_Z^L$$

Remarquons que si l'on impose la condition $\Theta_f(t^p) = (\Theta_f(t))^p$, condition simple très souhaitable, alors : [15]

$$\Theta_f(t^p) = (\Theta_f(t))^p \longleftrightarrow f(n,0) = e^{2i\pi\beta n}, \beta \in \mathbb{R} \qquad (17)$$

Le cas $\beta = 0 \rightarrow f = 1$ fournit la condition suffisante $f(n,0) = 1$, [2] . Cette condition n'est pas vérifiée dans le cas positif, à la différence des représentations du type VILLE ou RIHACZEK [2] . En effet, pour que (17) soit vérifiée dans le cas $\rho \geqslant 0$, il faudrait $P(t) = \delta(t-\beta)$, ce qui n'est pas possible puisque $P \in L^2_{\mathbb{C}}$. Ce fait est évident pour $\rho_{FPK}(t,\nu)$ puisque, dès p + k = 1 :

$$\Theta_{FPK}(t) = \hat{\mathbf{t}}_P \neq \hat{\mathbf{t}}$$

3) REPRESENTATIONS CONJOINTES CONDUISANT A UNE REPRESENTATION POSITIVE

Il existe un théorème dû à M. H. ACKROYD sur la convolution en t et ν de deux représentations conjointes [16] . Un tel théorème peut être généralisé. En effet, on a d'après (1b) :

$$\left.\begin{array}{l}\left(\rho_Z^{f_1} \underset{t',\nu'}{*} \rho_H^{f_2}(kt',\nu j)\right) \underset{(\tau,\nu)\;\theta}{\overset{t\;\;\;\phi}{\rightleftharpoons}} \frac{1}{|jk|} f_1(\theta,\phi) f_2\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right) \chi_Z^*(\theta,\phi)\chi_H^*\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right) \\ f_1, f_2 \in \{\mathcal{P}\}\end{array}\right\} \qquad (18)$$

Ce que l'on écrit :

$$\rho'(t,\nu) \underset{\nu\;\theta}{\overset{t\;\phi}{\rightleftharpoons}} f'(\theta,\phi)\chi_Z^*\chi_H^*\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right), \quad f' = f_1 f_2\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right)$$

Cherchons à quelle condition $\rho'(t,\nu) \geqslant 0$:

$$f'\chi_H\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right) \in \{\chi\} \longrightarrow f'\chi_H^*\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right) = \chi_P^*(\theta,\phi) \qquad (19a)$$

dont une solution particulière est :

$$f'(\theta,\phi) = f_1(\theta,\phi) f_2\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right) = 1 \qquad (19b)$$

car $\chi_H^*\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right) \in \{\chi\}$. Discutons de deux possibilités :

a) $f_1(\theta,\phi) = f_2(\theta,\phi) = 1$: ce sont des Représentations du type VILLE (WVB).

Il vient alors :

$$\chi_H^*\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right) \cdot \chi_Z^*(\theta,\phi) \underset{\theta\;\;\nu}{\overset{\phi\;\;t}{\rightleftharpoons}} \rho(t,\nu) \geqslant 0, \; \chi_H^*\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right) \in \{\chi\}$$

Le cas particulier intéressant : j = k = 1.

$$\chi_H^*(\theta,\phi)\chi_Z^*(\theta,\phi) \rightleftharpoons \left|\int_{\mathbb{R}} H(t-u) Z(u) e^{2i\pi\nu(t-u)} du\right|^2$$

indique que la convolution bidimensionnelle de deux Représentations WVB est définie positive :

$$\chi^*_H(\theta,\phi)\,\chi^*_Z(\theta,\phi) \rightleftharpoons |\chi_{Z^* H^\#}(t,\nu)|^2$$

où $\chi^*_{XY}(\theta,\phi)$ est la fonction d'interambiguïté de X et Y au sens de SUSSMAN.

$$\chi_H(\theta,\phi)\,\chi^*_Z(\theta,\phi) \rightleftharpoons |\chi_{Z^* H^*}(t,\nu)|^2$$

car $H(-u) = \underline{H}(u) = (H^\#(u))^*$, et en posant

$H(u) = Z(u) \in L^2_{\mathbb{C}}$, on a :

$$|\chi_Z(\theta,\phi)|^2 \underset{\phi\ \ t}{\overset{\theta\ \ \nu}{\rightleftharpoons}} |\chi_{Z^*}(t,\nu)|^2$$

ce qui retrouve un résultat dû à A.W. RIHACZEK [16].

b) $f_k(n,\tau) = e^{id(n\tau)}$, k' = 1,2.

Nous considérons ici le seul cas où

$d(\theta\phi) = \pm\theta\phi, \pm|\theta|\phi, \pm\theta|\phi|$

d'où :

$$e^{\pm i\pi\theta\phi}\, e^{\mp i\pi\frac{\theta\phi}{jk}}\, \chi_H\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right)\chi^*_Z(\theta,\phi) = \chi^*_P\, \chi^*_Z$$

La condition $f_1(\theta,\phi)\, f_2\left(\frac{\theta}{j},\frac{\phi}{k}\right) = 1$ entraîne :

$$\left.\begin{array}{l}\pi\left(1 \pm \frac{1}{jk}\right) = \ell' 2\pi, \quad \ell' = 0,1,2,\ldots \\ \text{soit} \quad \frac{1}{jk} = \pm 1 \to \ell' = 0\end{array}\right\} (20)$$

Une solution possible pour (20) est :

$j = k = \pm 1$; $j = \pm \frac{1}{k}$ (21)

Pour $j = \frac{1}{k}$:

$$e^{i\pi\phi\theta}\, e^{-i\pi\phi\theta}\, \chi^*_H\left(\frac{\theta}{j},\phi j\right)\chi^*_Z(\theta,\phi) \underset{\phi\ \ t}{\overset{\theta\ \ \nu}{\rightleftharpoons}} \left|\int_R Z(u)P(t-u)e^{-2i\pi\nu u}du\right|^2$$

car $j\chi^*_H\left(\frac{\theta}{j},\phi j\right) = \chi_{H_j}(\theta,\phi)$ avec $H_j(u) = H(ju)$.

Vu la définition de f, on a les relations suivantes :

$$f = e^{i\pi\theta\phi} \to \rho = \mathcal{E}^+_Z(t,\nu) = Z(t)\,\mathfrak{z}^*(\nu)\,e^{-2i\pi\nu t}$$

$$f = e^{-i\pi\theta\phi} \to \rho = \mathcal{E}^-_Z(t,\nu) = Z^*(t)\,\mathfrak{z}(\nu)\,e^{2i\pi\nu t}$$

appelées "formes $\mathcal{E}$ " ou Représentations d'ACKROYD telles que : $\mathcal{E}^+ + \mathcal{E}^- = 2\rho_{MHR}$

$$\rho_{MHR} = \mathrm{Re}\left\{Z(t)\,\mathfrak{z}^*(\nu)\,e^{-2i\pi\nu t}\right\}$$ [1][2][16]

. De même :

$$\begin{cases} f = e^{i\pi n|\tau|} \to \rho = \dfrac{\partial}{\partial t}\left|\displaystyle\int_{-\infty}^{t} Z(u)e^{-2i\pi\nu u}du\right|^2 \\ f = e^{-i\pi n|\tau|} \to \rho = \dfrac{\partial}{\partial t}\left|\displaystyle\int_{t}^{\infty} Z(u)e^{-2i\pi\nu u}du\right|^2 \end{cases}$$

ainsi que les formes correspondantes en fréquence dues aux pondérations $f = e^{\pm i\pi\tau|n|}$ d'après les définitions de C.H. PAGE [4]. Elles permettent toutes d'obtenir des représentations positives par convolution bidimensionnelle compte tenu de (18) et (19).

4) CONDITIONS D'OBSERVATION, REPRESENTATION CONJOINTE POSITIVE ET MESURES DE PARAMETRES DU SIGNAL.

$\rho_f(t,\nu)$ répartit l'énergie $E_Z = \|Z\|^2$ dans le plan (t,ν), t et $\nu \in \mathbb{R}$ [1][4]. ρ_f est, soit un débit énergétique dans le plan (t,ν) , soit une densité si $\rho_f \geq 0$.

D'après (1), on a [2]

$$\left.\begin{array}{l}\int_R \nu\rho_f(t,\nu)d\nu = \nu_i(t), \quad \int_R t\rho_f(t,\nu)dt = \tau_g(\nu) \\ Z(t) = A(t)e^{i\Phi(t)} \rightleftharpoons \mathfrak{z}(\nu) = |\mathfrak{z}(\nu)|e^{i\varphi(\nu)} \\ \nu_i(t) = \frac{1}{2\pi}\dot{\Phi}(t), \quad \tau_g(\nu) = -\frac{1}{2\pi}\dot{\varphi}(\nu)\end{array}\right\} (22a)$$

si $\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)_{0,0} = 0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\right)_{0,0} = 0$, $f(n,0) = 1$; $f(0,\tau) = 1$ (22b)

Le cas $\rho_f(t,\nu) \geq 0$ ne correspond pas à la propriété (21a) puisque $f = \chi^*_P(\tau,n)$ ne possède pas la propriété (22 b) [3]. Il est possible dans certains cas de calculer $\rho_f(t,\nu)$, f = 1 et d'en déduire $\nu_i(t)$ [17]. Dans les cas où on utilise une Représentation du type FPK et en particulier celle de L. PIMONOV : $\rho(t_0,\nu) = \left|\int_{t_0-\Delta/2}^{t_0+\Delta/2} Z(u)e^{-2i\pi\nu u}du\right|^2$, peut-on estimer $\nu_i(t)$?

Si on considère le cas d'un signal à grand produit BT du type :

$$S(t) = A(t)\cos\Phi(t), \quad Z(t) = A(t)e^{i\Phi(t)}$$

et un intervalle Δ tel que $\nu_i(t) \simeq \nu_c + \frac{t-t_0}{\Delta}\left(\frac{d\nu_i}{dt}\right)_{t_0}$ comme la figure 1 l'indique :

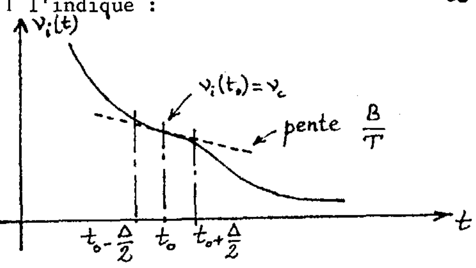

Figure 1

On a :

$$\left.\begin{array}{l} \rho_{FP}(t,\nu)=\frac{T}{2B}\left\{\left[C\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)-C\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^2+\left[S\left(a+\frac{\varepsilon}{2}\right)-S\left(a-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^2\right\} \\ \frac{\Delta}{2}-\frac{T}{2}\leqslant t\leqslant -\frac{\Delta}{2}+\frac{T}{2} \end{array}\right\} \quad (23)$$

$a=\sqrt{\frac{2T}{B}}\left[\nu_i(t)-\nu\right]$, $\varepsilon=\sqrt{\frac{2B}{T}}\Delta=\frac{1}{n}\sqrt{2BT}$, $T=n\Delta$, où C et S sont les fonctions intégrales dites de FRESNEL et en assimilant $\nu_i(t)$ à une droite. La fig. 2 représente la section de $\rho_{FP}(t,\nu)$ à l'aide de la fonction :

$$y=2\,\frac{B}{T}\,\rho_{FP}(x)$$

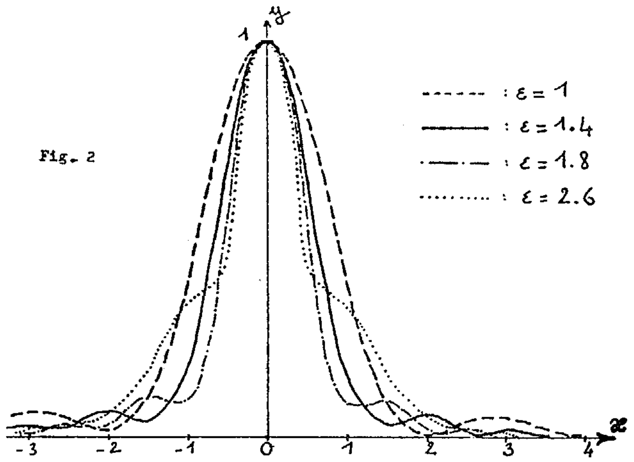

Fig. 2

$$y=\left[C\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-C\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^2+\left[S\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right)-S\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)\right]^2$$

La section de ρ_{FP} à une date t quelconque dépend directement du paramètre $\varepsilon=\sqrt{\frac{2B}{T}}\Delta$, $\varepsilon=\frac{1}{n}\sqrt{2BT}$ qui varie avec le nombre de tranches n de durée $\Delta=\frac{T}{n}$ contenues dans la durée T. La fig. 3 représente le résultat du calcul dans le cas d'un signal modulé hyperboliquement en fréquence de paramètres suivants : $T=3{,}2\,\mathrm{ms}$, $B=12\,\mathrm{kHz}$, $\Delta=0{,}35\,\mathrm{ms}$

$BT\simeq 36$

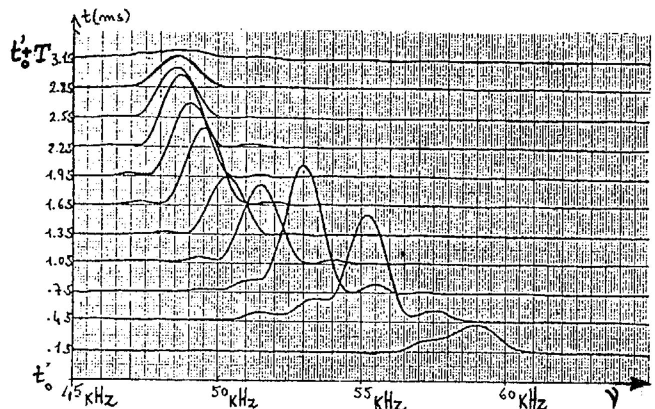

Fig. 3

La figure 3 montre que les sections de date proche de t'_0 correspondent à $\varepsilon\simeq 3$ et celles voisines de t'_0+T à $\varepsilon\simeq 1$. La valeur $\varepsilon=\sqrt{2}$ est telle que : $\sqrt{\frac{2B}{T}}\Delta=\sqrt{2}$ soit $\Delta=\sqrt{\frac{T}{B}}=T_r$, temps de relaxation défini par A.W. RIHACZEK [16] . Pour estimer au mieux $\nu_i(t)$, on choisit $\varepsilon=\sqrt{2}$:

$$\Delta=T_r=\frac{1}{\sqrt{\left|\frac{d\nu_i}{dt}\right|}}=\frac{1}{B_d} \qquad B_dT_r=1 \quad [16] \qquad (24)$$

La détermination de $\nu_i(t)$ se fait en calculant :

$$\mu^1_{\rho_{FP}}(t)=\frac{\int_R \nu\,\rho_{FP}(t,\nu)\,d\nu}{\int_R \rho_{FP}(t,\nu)\,d\nu}$$

avec $\Delta=T_r$. Dans le cas d'une modulation linéaire en fréquence, le choix de Δ dépend de la seule valeur $\frac{B}{T}$ ou pente de modulation.

Dans le cas général, il n'en est plus ainsi ; en particulier pour une modulation de fréquence hyperbolique, on a :

$$\Phi(t)=2\pi\frac{\nu_0}{a}\,\mathrm{Log}\,|1+at|\;,\quad \nu_i(t)=\frac{\nu_0}{1+at}$$

$$\frac{d\nu_i}{dt}=\frac{-\nu_0 a}{(1+at)^2}\;,\quad 0\leqslant t\leqslant T\;,\quad B=\nu_0\frac{aT}{1+aT}$$

et : $\mu^1_{\rho_{FP}}(t)\simeq \nu_i(t)\left[1+\frac{1}{12}\left(\frac{a\Delta}{1+at}\right)^2\right]$.

L'erreur relative maximale faite en assimilant μ^1_ρ à $\nu_i(t)$ est :

$$e_m=\frac{1}{3\left(1+\frac{2}{a\Delta}\right)^2}$$

à donné, il faut donc que : (25)

$$\frac{\Delta}{T}\leqslant\frac{2}{1/\sqrt{e_m}-1}\cdot\frac{\nu_0-B}{B}$$

Ceci montre que l'on devrait en fait utiliser une fenêtre Δ ADAPTEE à la pente $\left(\frac{d\nu_i}{dt}\right)$ en chaque date t. Dans le cas hyperbolique, on utilisera une représentation FPK de type fréquentiel dont la "largeur spectrale d'observation" serait égale à $B_d=T_r^{-1}$; cette largeur est directement proportionnelle à $\left(\left|\frac{d\nu_i}{dt}\right|\right)^{1/2}$; $\left(\frac{d\nu_i}{dt}\right)$ joue un rôle de "paramètre caché" dans l'observation. C'est le cas des représentations positives des types suivants proposés par F. BOPP [18] et YOUNGBERG et BOLL [19] :

$$\left.\begin{array}{l} \rho_B(t,\nu)=\frac{1}{\theta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left|\int_R Z(u)\,e^{-\left(\frac{t-u}{\theta}\right)^2}e^{-2i\pi\nu u}\,du\right|^2 \\ \rho_{YB}(t,\nu)=\left|\int_R Z(u)\,H\left(\frac{\nu}{q}(t-u)\right)e^{-2i\pi\nu u}\,du\right|^2 \end{array}\right\} \quad (26)$$

POSITIVITE DES REPRESENTATIONS CONJOINTES EN TEMPS ET FREQUENCE DES SIGNAUX D'ENERGIE FINIE ; REPRESENTATION HILBERTIENNE ET CONDITIONS D'OBSERVATION DES SIGNAUX.

Il apparaît donc qu'il est possible même dans le cas de Représentation conjointes positives d'obtenir une estimation correcte de $\nu_i(t)$ à l'aide d'un moyen d'observation $f(n,\tau)$ correctement choisi, compte tenu des valeurs possibles du paramètre $\left(\frac{d\nu_i}{dt}\right)$ inconnu.

CONCLUSION

Les représentations conjointes positives possèdent le caractère de densité énergétique. Elles impliquent une règle de correspondance relativement complexe pour les opérateurs hermitiques associés aux moments $\langle t^p \nu^k \rangle_z$; celle-ci peut se simplifier par un choix correct de $f(n,\tau) \in \{\chi\}$. Il est possible d'obtenir une représentation positive par convolution entre celles telles que $f(n,\tau) = e^{i d(n\tau)}$ et en particulier celle de VILLE. Enfin, le caractère positif entraîne pour la mesure de $\nu_i(t)$ une dépendance du moment du 1er ordre avec $\left(\frac{d\nu_i}{dt}\right)$. Cet effet traduit le taux de concentration de l'énergie dans des cellules du plan $[t,\nu]$. La mesure de $\nu_i(t)$ nécessite de prendre en compte le paramètre "variation de ν_i" dans la structure de l'analyseur en temps et fréquence.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier M. C. COHEN-TANNOUDJI, professeur au Collège de FRANCE, pour les informations précieuses qu'il leur a fournies et pour son aide obligeante lors de l'accès aux travaux antérieurs. Les auteurs ne sauraient oublier Yvon BIRAUD, de l'observatoire de MEUDON, pour l'aide amicale qu'il a apportée lors de la recherche de documentation , et pour ses suggestions.

BIBLIOGRAPHIE :

[1] B. ESCUDIE, J. GREA : Comptes Rendus Ac. Sc. PARIS, t. 283 , série A, p. 1049-1051 1976

[2] B. ESCUDIE , J. GREA : 6è Colloque National Traitement du Signal, p. 51 à 56 - Nice Avril 1977

[3] B. BOUACHACHE, B. ESCUDIE, P. FLANDRIN, J.GREA : Comptes Rendus Ac. Sc. Paris, t. 288, série A. p. 307-309 1979

[4] A. BLANC-LAPIERRE, B. PICINBONO : Public. Sc. Univ. Alger n° 1 série B p. 17-32 1955

[5] C. W. HELSTROM : I.E.E.E. Transf. Inform. Theory IT. 12 p. 81 1966

[6] L.K.MONTGOMERY : I.E.E.E. Transf. Inform. Theory IT. 17, p.344-345 1967

[7] J.L.LACOUME,W.KOFMAN : 5è Colloque National Traitement du Signal p. 95 - Nice 1975

[8] J.L FLANAGAN : "Speech Analysis , Synthesis, Perception" Springer Verlag 1965

[9] B. ESCUDIE : " Représentation (t,ν) des signaux" Rapport ICPI TS 7804, Colloque URSI Commission H. Propagation et analyse des ondes - Helsinki . Juil.août 1978

A paraître dans Ann. Télécom. 1979

[10] V.V. KURYSHKIN : Ann. Inst. H. POINCARE tome XVII, 81 1972

[11] M.D. SRINIVAS, E.WOLF : Phys. Rev. D(3) vol 11 p. 1289-1298 1975

[12 a] M. MAMODE : 7è Colloque National Traitement du Signal - Nice 1979

[12 b] B. LEVINE : "Fondements théoriques de la radio-technique statistique", t.II Editions Mir, Moscou 1973

[13] C. COHEN- TANNOUDJI : Cours Mécanique Quantique Collège de France -Années 1978-1979

[14] W. H. LOUISELL :"Quantum statistical properties of radiation" J.WILEY & Sons 1975

[15] P. FLANDKIN à paraître Signal Processing 1979

[16] A.W. RIHACZEK : I.E.E.E. Trans. Inform. Theory IT 14 n° 3 p.369 1968

[17] B.BOUACHACHE,J.M.KOMATITSCH : 7è Colloque Nat. Trait. du Signal- Nice 1979

[18] F.BOPP Ann I. H. P. Tome XV, 81 1956

[19] J.E.YOUNGBERG,S.F.BOLL : I.E.E.E. Inst. Conf. ASSP, p.375 Août 1978