SEPTIEME COLLOQUE SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 28 MAI au 2 JUIN 1979

DECOMPOSITIONS DOUBLEMENT ORTHOGONALES POUR DES FONCTIONS ALEATOIRES DE SECOND ORDRE NON STATIONNAIRES POSSEDANT UNE PUISSANCE MOYENNE POSITIVE

A. BLANC-LAPIERRE

Professeur à l'Université Paris-Sud
Laboratoire des Signaux et Systèmes (C.N.R.S.-E.S.E.)
Plateau du Moulon 91190 GIF SUR YVETTE

RESUME

On étend le théorème de Karhunen-Loève à des fonctions aléatoires de second ordre non stationnaires de puissance moyenne positive donc telles que :

$$P\{x(t,\omega)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E\{|x(t,\omega)|^2\}dt > 0$$

où E{ } désigne l'espérance mathématique.

On suppose essentiellement que $x(t,\omega)$ possède des caractères suffisants de permanence pour assurer l'existence des moyennes temporelles introduites. On montre que, pour des ensembles assez grands de fonctions aléatoires, il est alors possible d'associer à $x(t,\omega)$ un développement doublement orthogonal :

$$x(t,\omega) = \int \psi(t,\mu)d\xi(\mu,\omega)$$

où les fonctions certaines $\psi(t,\mu)$ (dépendant du paramètre μ) sont orthogonales dans un sens qui est précisé, relativement à la puissance moyenne, les $d\xi(\mu,\omega)$ l'étant au sens de l'espérance mathématique.

SUMMARY

This paper deals with an extension of Karhunen-Loève's theorem to the case of non stationary random functions $x(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ with positive mean power P i.e. with positive time average for the mathematical expectation $E\{|x(t)|^2\}$:

$$P\{x(t,\omega)\} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} E\{|x(t,\omega)|^2\}dt > 0$$

We do not assume the stationarity of $x(t,\omega)$ but we essentially assume a sufficient stability of $x(t,\omega)$ to insure the existence of the mean power $P\{x(t)\}$.

For sets of random functions large enough, we demonstrate the possibility of a doubly-orthogonal expansion :

$$x(t,\omega) = \int \psi(t,\mu)d\xi(\mu,\omega)$$

where the time functions $\psi(t,\mu)$ (depending on the parameter μ) are orthogonal in a sense which is precised, relatively to the mean power, and where the random increments $d\xi(\mu,\omega)$ are orthogonal too, but in the sense of the mathematical expectation.

L'auteur tient à remercier le Professeur A. TORTRAT (Université Paris VI) pour toutes les discussions fructueuses qu'il a eues avec lui sur le sujet traité dans cet article.

DECOMPOSITIONS DOUBLEMENT ORTHOGONALES POUR DES FONCTIONS ALEATOIRES DE SECOND ORDRE NON STATIONNAIRES POSSEDANT UNE PUISSANCE MOYENNE POSITIVE

1 - INTRODUCTION

1-1. Décomposition doublement orthogonale pour les fonctions aléatoires stationnaires de second ordre. Il est bien connu que toute fonction aléatoire $x(t,\omega)$, stationnaire de second ordre (fonction de corrélation $C(\tau) \rightleftarrows$ fonction spectrale $F(\nu)$), continue en moyenne quadratique, admet une représentation harmonique[(+)]

$$x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\nu t} d\hat{X}(\nu,\omega) \qquad (1\text{-}1)$$

qui est dite doublement orthogonale en ce sens :
- que, d'une part, les exponentielles mises en jeu sont orthogonales dans le temps conformément aux relations suivantes :

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} e^{2\pi i(\nu-\nu')t} dt = \delta_{\nu\nu'} = \begin{cases} 1 \text{ pour } \nu = \nu' \\ 0 \text{ pour } \nu \neq \nu' \end{cases} \qquad (1\text{-}2)$$

$$\lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} e^{2\pi i(\nu-\nu')t} dt = \delta(\nu-\nu') \quad (\delta : \text{distribution de Dirac}) \qquad (1\text{-}3)$$

- et que, d'autre part, les accroissements $d\hat{X}(\nu,\omega)$ sont orthogonaux au sens de l'espérance mathématique, c'est-à-dire satisfont à :

$$E\{d\hat{X}(\nu)d\hat{X}^*(\nu')\} = dF(\nu)\delta(\nu-\nu')d\nu' \qquad (1\text{-}4)$$

1-2. Intérêt des décompositions doublement orthogonales pour des fonctions aléatoires non stationnaires. D'assez nombreux problèmes de physique, d'automatique et de traitement du signal font intervenir des fonctions aléatoires qui ne sont pas stationnaires et il est intéressant de rechercher encore pour elles un développement doublement orthogonal.

1-3. Le théorème de Karhunen-Loève[(++)] pour les fonctions aléatoires d'énergie totale finie. Ce théorème résoud le problème posé au § 1-2 ci-dessus pour des fonctions aléatoires $x(t,\omega)$ ($t \in T$) d'énergie totale finie (cf. § 1-4 ci-dessous), c'est-à-dire telles que l'on ait :

$$\int_T E\{|x(t)|^2\}dt < C < +\infty \qquad (1\text{-}5)$$

la condition (1-5) étant remplie soit parce que T est fini, soit parce que, si $T = (-\infty,+\infty)$, l'intégrale contenue dans (1-5) est convergente, donc bornée. Nous reviendrons sur cet important résultat au § 3. Auparavant, précisons la signification que nous attacherons aux mots d'énergie et de puissance.

1-4. Energie et puissance. Soit, d'abord, une fonction certaine $H(t)$. Si nous la considérons comme représentant l'intensité d'un courant électrique traversant une résistance unité, l'énergie dissipée par effet Joule, pendant un petit intervalle dt, sera égale à $|H(t)|^2dt$. $|H(t)|^2$ s'interprète alors comme une puissance instantanée. Partant de là, et étendant nos définitions au cas où $H(t)$ est à valeurs complexes, il sera naturel d'introduire :

i) l'énergie $e_{t_1t_2}\{H\} = \int_{t_1}^{t_2} |H(t)|^2dt$ relative à l'intervalle de temps (t_1,t_2) $(t_1 < t_2)$,

ii) l'énergie totale, si elle existe, soit $e\{H\}$ correspondant à $e_{t_1t_2}\{H\}$ pour $t_1 = -\infty$ et $t_2 = +\infty$,

iii) la puissance moyenne sur (t_1t_2), soit $P_{t_1t_2}\{H\} = \{e_{t_1t_2}\{H\} / (t_2-t_1)\}$,

iiii) la puissance moyenne $P\{H\}$ définie, si elle existe, comme limite de $P_{t_1t_2}\{H\}$ pour $t_1 \to -\infty$ et $t_2 \to +\infty$.

Il sera commode d'utiliser la notation matricielle courante en mécanique quantique et souvent introduite dans le cas des fonctions aléatoires (4), selon laquelle une fonction $H(t)$ ($t \in \underline{T}$ avec, dans beaucoup de cas, $\underline{T} = (-\infty,+\infty)$) est considérée comme un vecteur colonne $|H\rangle$ pour lequel $H(t)$ est l'élément d'indice t variant continument sur $\underline{T}$. Au vecteur colonne $|H\rangle$, correspond le vecteur ligne, hermitique conjugué, $\langle H|$. Si, au lieu d'une fonction certaine $H(t)$, on considère une fonction aléatoire $x(t,\omega)$, à laquelle nous associerons le vecteur colonne aléatoire $|x(\omega)\rangle$ et le vecteur ligne aléatoire $\langle x(\omega)|$, hermitique conjugué, les définitions précédentes peuvent, sous réserve de l'existence des grandeurs introduites, s'appliquer soit sur chaque épreuve élémentaire ω, soit, comme nous le ferons par la suite, sur l'ensemble des épreuves, en faisant intervenir les espérances mathématiques. Finalement, on trouve, rassemblées dans le tableau 1 ci-dessous et adaptées au cas où $T = (-\infty,+\infty)$, l'ensemble des notations et relations de définition que nous venons d'introduire.

(+) Cf. (1) p. 477 et suivantes et (2) p. 456 et suivantes.

(++) Cf. (1) p. 477 et suivantes et (3) p. 81 et suivantes.

DECOMPOSITIONS DOUBLEMENT ORTHOGONALES POUR DES FONCTIONS ALEATOIRES DE SECOND ORDRE NON STATIONNAIRES POSSEDANT UNE PUISSANCE MOYENNE POSITIVE

Tableau 1

<u>Energie totale</u> $e\{H\} = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(t)|^2 dt = \langle H|H\rangle$ (1-6)

Si $e\{H\}$ est finie, on dira que H appartient à l'espace L_2. Pour x aléatoire :

$$e\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty} E\{|x(t,\omega)|^2\}dt \;:\!\cdot\!:\; E\{\langle x(\omega)|x(\omega)\rangle\} \quad (1\text{-}6\text{bis})$$

<u>Puissance moyenne</u>

$$\begin{aligned} P\{H\} = \overline{|H(t)|^2} &= \lim_{T\to\infty} \overline{|H(t)|^2}^{-T,+T} \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} |H(t)|^2 dt \\ &= \langle H\overline{|}H\rangle \end{aligned} \quad (1\text{-}7).$$

Si $P\{H\}$ est finie, on dira que H appartient à l'espace M_2. Pour x aléatoire :

$$P\{x\} = E\{\overline{|x(t)|^2}\} = \lim_{T\to\infty} E\{\overline{|x(t)|^2}^{-T,+T}\} \;:\!\cdot\!:\; E\{\langle x(\omega)\overline{|}x(\omega)\rangle\} \quad (1\text{-}8).$$

La notation $\langle H\overline{|}H\rangle$, qui, sous réserve d'existence, peut s'étendre à deux fonctions $\langle H_1\overline{|}H_2\rangle$, est définie sans ambiguité par la relation (1-7). Les signes $:\!\cdot\!:$, à la place desquels on attendrait, dans (1-6bis) et (1-8), des signes =, attirent l'attention sur le fait que, pour ces deux équations, le passage du membre de gauche au membre de droite par rapport à $:\!\cdot\!:$ sous-entend une permutation entre opération dans le temps et espérance mathématique, permutation qui doit être justifiée par des hypothèses appropriées, et qui, en tout cas, l'est si l'intégrale en t ou la moyenne temporelle sont définies en moyenne quadratique.

1-5. <u>Introduction de l'ensemble des fonctions aléatoires objet de la présente étude</u>. Les fonctions aléatoires considérées au § 1-1 possèdent une puissance moyenne positive, soit $P\{x\} = E\{\overline{|x(t)|^2}\}$, mais nous avons noté que l'hypothèse de stationnarité constitue une contrainte beaucoup trop forte pour de nombreuses applications. Les fonctions aléatoires du § 1-3 sont, par essence, non stationnaires, mais la puissance moyenne correspondante est nulle. En particulier, les fonctions aléatoires stationnaires n'ont pas de place parmi elles. <u>Nous souhaitons travailler dans un cadre correspondant à des fonctions aléatoires non stationnaires, tout en ayant des caractères de permanence suffisants pour permettre l'existence d'une puissance moyenne positive</u>. Dans cette perspective, nous faisons l'hypothèse suivante :

<u>Hypothèse H_1</u> : <u>la covariance des fonctions aléatoires $x(t,\omega)$ considérées est de la forme</u> :

$$\gamma(t,t') = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\mu,t)d^2\tilde{\Gamma}(\mu,\mu')\phi^*(\mu',t') \quad (1\text{-}9)$$

En termes équivalents, <u>la matrice variance de $|x(\omega)\rangle$</u>, soit γ , s'écrit :

$$\gamma = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(\mu)\rangle\, d^2\tilde{\Gamma}(\mu,\mu')\, \langle\phi(\mu')| \quad (1\text{-}10)$$

où :

a) la matrice $\{d^2\tilde{\Gamma}(\mu,\mu')\}$ est une matrice variance, "non redondante", telle que $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} |d^2\tilde{\Gamma}(\mu,\mu')| < C < +\infty$.

b) <u>les $\phi(\mu,t)$, uniformément bornés en module, sont, $\forall\ \mu$, continues en t et doivent assurer un sens aux intégrales (1-9) et (1-10)</u> $\{\forall$ t, $\phi(\mu,t)$ ne présente pas de discontinuités pour les valeurs de μ correspondant aux masses isolées de la mesure $d^2\tilde{\Gamma}(\mu,\mu)\}$. Les fonctions de t, $\phi(\mu,t)$ sont supposées linéairement indépendantes.

<u>Opérations liées à des matrices γ</u>. Nous aurons, dans la suite, à considérer les opérations suivantes, définies ici de façon purement formelle, sans préjuger de leur existence. Selon les propriétés de γ, certaines de ces opérations peuvent ne pas exister :

- $\gamma\overline{|}H\rangle \rightleftarrows \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} \gamma(t,t')H(t')dt'$ (1-11)
- $\gamma|H\rangle \rightleftarrows \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{+T} \gamma(t,t')H(t')dt'$ (1-12)
- $\langle H\overline{|}\gamma\overline{|}\gamma\overline{|}H\rangle$, $\langle H\overline{|}\gamma\overline{|}H\rangle$ (1-13)
- $\langle H|\gamma\overline{|}H\rangle = \langle H\overline{|}\gamma|H\rangle$ (1-14).

2 - LE THEOREME DE DECOMPOSITION SPECTRALE POUR LES FONCTIONS ALEATOIRES VERIFIANT L'HYPOTHESE H_1

2-1. <u>Le théorème de décomposition spectrale (Karhunen, Loève)</u>[(+)]. <u>A la décomposition (1-9) de $\gamma(t,t')$ correspond une décomposition de $x(t,\omega)$ soit</u> :

$$x(t,\omega) \underset{\text{m.q.}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\mu,t)d\tilde{X}(\mu,\omega) \quad (2\text{-}1)$$

<u>avec</u> $E\{d\tilde{X}(\mu,\omega)d\tilde{X}^*(\mu',\omega)\} = d^2\tilde{\Gamma}(\mu,\mu')$ (2-2).

(+) Cf. (1) p. 477 et suivantes.

2-2. Conséquences du théorème de décomposition spectrale. En supposant que, pour les $\phi(\mu,t)$ figurant dans (1-9), existent la norme $\|\Phi(\mu)\|$ définie par $\|\phi(\mu)\|^2 = \langle\phi(\mu)\top\phi(\mu)\rangle = |\phi(\mu,t)|^2$ et le produit scalaire $\langle\phi(\mu_2)\top\phi(\mu_1)\rangle = \overline{\phi(\mu_1,t)\phi^*(\mu_2,t)}$ qui en découle, nous associerons à $x(t,\omega)$ la puissance moyenne suivante :

$$P\{x\} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\phi(\mu,t)\phi^*(\mu',t)}d^2\tilde{\Gamma}(\mu,\mu') \qquad (2\text{-}3).$$

On pourra parler de spectre de la puissance moyenne si cette intégrale double devient simple c'est-à-dire si l'une ou l'autre des conditions suivantes est réalisée :

1° les $\phi(\mu,t)$ sont orthogonaux au sens du produit scalaire $\langle\top\rangle$. C'est ce qui a lieu dans le cas de la représentation harmonique où on a :

$$\phi(\mu,t) = \exp\{2\pi i\mu t\} \qquad (2\text{-}4)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{avec} & \langle\phi(\mu)\overline{|}\phi(\mu')\rangle = \delta_{\mu\mu'} \\ \text{et} & \langle\phi(\mu)|\phi(\mu')\rangle = \delta(\mu-\mu') \end{array}\right\} \qquad (2\text{-}5).$$

2° La matrice $\{d^2\tilde{\Gamma}(\mu,\mu')\}$ est diagonale.

Dans les deux cas, la fonction de répartition spectrale pour la puissance moyenne est définie par :

$$dF_p(\mu) = d^2\tilde{\Gamma}(\mu,\mu) \qquad (2\text{-}6).$$

Si les deux conditions 1° et 2° données ci-dessus pour assurer l'existence du spectre de puissance moyenne sont simultanément remplies, alors le développement (2-1) est doublement orthogonal : au sens de (2-5), pour les ϕ, et de l'espérance mathématique pour les $d\tilde{X}(\mu)$. Réciproquement, cette double orthogonalité signifie que ces deux conditions sont bien remplies l'une et l'autre. Naturellement, ceci ne peut être obtenu que pour un choix particulier des fonctions ϕ et la recherche d'un développement doublement orthogonal n'est autre que celle du "bon" système de fonctions ϕ. Le théorème de Karhunen-Loève résoud cette question pour les fonctions aléatoires d'énergie totale finie donc ayant une puissance moyenne nulle. Avant d'entreprendre l'étude de la recherche des "bons" ϕ pour les fonctions aléatoires de puissance > 0, nous rappelons les résultats donnés par le théorème de Karhunen-Loève pour celles dont l'énergie totale est finie.

3 - LE THEOREME DE KARHUNEN-LOEVE POUR LES FONCTIONS ALEATOIRES D'ENERGIE TOTALE FINIE

Nous supposons donc $x(t,\omega)$ telle que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t,t)dt = e\{x\} < +\infty \qquad (3\text{-}1)$$

On travaillera donc dans L_2. Selon le théorème de Karhunen-Loève, on obtiendra, pour (2-1), un développement doublement orthogonal (dans L_2 pour les ϕ et au sens de l'espérance mathématique pour les $d\tilde{X}(\mu)$) en prenant pour ϕ les fonctions propres $|\eta_i\rangle$ de γ au sens suivant :

$$\gamma|\eta_i\rangle = \lambda_i|\eta_i\rangle \quad (\alpha) \qquad |\eta_i\rangle \in L_2 \quad (\beta) \qquad (\lambda_i \neq 0) \quad (\gamma) (3\text{-}2).$$

Sous la condition (3-1), le spectre de γ, défini par (3-2), est discret et le caractère hermitique de γ impose aux λ d'être réels et positifs.

On peut choisir les $|\eta_i\rangle$ orthonormés dans L_2 et nous supposerons qu'il en est ainsi. Le développement doublement orthogonal de $|x(\omega)\rangle$ s'écrit alors :

$$|x(\omega)\rangle = \sum_i |\eta_i\rangle\,\theta_i(\omega) \qquad (3\text{-}3)$$

avec les relations d'orthogonalité :

$$\langle\eta_i|\eta_j\rangle = \delta_{ij} \quad (\alpha) \text{ et } E\{\theta_i(\omega)\theta_j^*(\omega)\} = \delta_{ij}\lambda_i \quad (\beta) \quad (3\text{-}4).$$

La matrice variance γ_x de $|x(\omega)\rangle$ se met alors sous la forme :

$$\gamma_x = \sum_i |\eta_i\rangle\lambda_i\langle\eta_i| \quad (\alpha) \text{ et on a } \langle\eta_i|\gamma_x|\eta_j\rangle = \lambda_i\delta_{ij} \quad (\beta) \qquad (3\text{-}5).$$

Dans la décomposition (3-3) de $|x(\omega)\rangle$, le spectre d'énergie moyenne totale est défini par les masses isolées λ_i qui correspondent aux contributions respectives des diverses composantes $|\eta_i\rangle$.

Remarque. Pour les f.a. d'énergie moyenne totale finie, il n'y a pas de représentation harmonique doublement orthogonale. Prenons, par exemple :

$$\left.\begin{array}{ll} x(t,\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\nu t}d\tilde{X}(\nu,\omega) & (\alpha) \\ \text{avec} \quad E\{d\tilde{X}(\nu)d\tilde{X}^*(\nu')\} = \sigma(\nu,\nu')d\nu d\nu' & (\beta) \end{array}\right\} \quad (3\text{-}6).$$

DECOMPOSITIONS DOUBLEMENT ORTHOGONALES
POUR DES FONCTIONS ALEATOIRES DE SECOND ORDRE NON STATIONNAIRES
POSSEDANT UNE PUISSANCE MOYENNE POSITIVE

Les fonctions $\exp\{2\pi i\nu t\}$ n'appartiennent pas à L_2. Elles sont orthogonales dans M_2 conformément à (2-5). Au développement (3-6 α), correspond bien un spectre de l'énergie totale qui, compte tenu de l'hypothèse (3-6 β), possèdera une densité égale à $\sigma(\nu,\nu)$ mais les $d\tilde{X}(\nu,\omega)$ ne sont pas orthogonaux au sens des espérances mathématiques.

4 - DEVELOPPEMENTS DOUBLEMENT ORTHOGONAUX POUR LES FONCTIONS ALEATOIRES DE PUISSANCE MOYENNE POSITIVE

4-1. Introduction. Nous nous proposons, ici, d'étendre les résultats du § 3 à des fonctions aléatoires possédant une puissance moyenne positive. De façon précise, nous supposons que leur variance est de la forme (1-10) avec les hypothèses correspondantes faites sur les $|\phi(\mu)\rangle$ et sur $\tilde{\Gamma}(\mu,\mu')$ au § 1-5. Nous supposerons même qu'on a pu orthogonaliser les $|\phi(\mu)\rangle$ de façon à les rendre conformes aux relations (2-5), ce qui ne paraît pas restreindre la généralité de façon trop importante. Naturellement, les $d^2\tilde{\Gamma}(\mu,\mu')$ auront été modifiés en conséquence.

L'ensemble de fonctions aléatoires défini par nos hypothèses englobe celui des fonctions aléatoires de covariance harmonisable, c'est-à-dire de covariance conforme à la relation (1-9), avec, pour fonctions $\phi(\mu, t)$, les exponentielles complexes $\exp\{2\pi i\nu t\}$. Il contient le cas des fonctions aléatoires stationnaires du second ordre mais ne postule pas nécessairement la stationnarité. Le cadre que nous fixons par ces hypothèses impose, cependant, aux fonctions aléatoires considérées certains caractères de permanence ou de stabilité qui se traduisent, en particulier, par le fait que $|\gamma(t,t')|$ est uniformément borné. D'ailleurs, un minimum de stabilité doit nécessairement résulter du fait que nous voulons que la puissance moyenne soit définie.

Ces hypothèses étant précisées, nous allons montrer comment, à partir de la connaissance de la matrice γ, on peut écrire $|x(\omega)\rangle$ sous la forme d'un développement :

$$|x(\omega)\rangle = \int |\psi(\mu)\rangle \, d\xi(\mu,\omega) \qquad (4\text{-}1)$$

doublement orthogonal, les $|\psi\rangle$ l'étant au sens de la puissance moyenne, c'est-à-dire au sens des relations (2-5), et les $d\xi(\mu,t)$ l'étant au sens des espérances mathématiques. Nous allons voir que, contrairement au cas des fonctions aléatoires d'énergie totale finie envisagé au § 3, dans lequel le développement (3-3) se réduisait à une somme discrète, nous avons ici la possibilité d'un spectre de raies et d'un spectre continu :

$$|x\rangle = \sum_j |\psi_j\rangle \, \xi_j(\omega) + \int |\psi(\mu)\rangle \, d\xi(\mu,\omega) \qquad (4\text{-}2).$$

Ici aussi, nous montrerons que les $|\psi\rangle$ sont, en un sens que nous allons préciser et qui sera différent de celui introduit au § 3 (cf. équations (3-2)), fonctions propres de γ. A l'inverse du § 3, où ces fonctions propres devaient être recherchées dans L_2, elles doivent, ici, l'être dans M_2 ; mais, ceci demande quelques précautions : M_2 est un espace trop grand. L'existence de $\langle f \rceil f\rangle = |f(t)|^2$ et de $\langle g \rceil g\rangle = |g(t)|^2$ n'implique pas celle de $\langle f \rceil g\rangle$. Cette difficulté disparait si, dans la définition de $\langle f \rceil f\rangle$ et de $\langle f \rceil g\rangle$ on remplace lim par $\overline{\lim}$; mais, alors, $\langle f \rceil g\rangle$ n'est plus une forme bilinéaire.

Finalement, nous travaillerons dans un sous-espace $M_2^* \subset M_2$ défini, en gros, comme contenant les $|\phi(\mu)\rangle$ et leurs combinaisons linéaires : finies ou dénombrables, de la forme $\sum_j |\phi(\mu_j)\rangle \, dh(\mu_j)$, ou infinies, du type $\int |\phi(\mu)\rangle \, dh(\mu)$.

On peut alors établir les résultats suivants que nous nous bornons, ici, à énoncer.

4-2. Construction du spectre de raies. Ce spectre n'existe que si le

$$\text{maximum de } \langle H \rceil \gamma \rceil H\rangle \qquad (4\text{-}3)$$

est strictement positif lorsque $|H\rangle$ décrit le sous-ensemble des fonctions de M_2^* telles que $\langle H \rceil H\rangle = 1$.

On établit que les fonctions $|\psi_j\rangle$ intervenant dans (4-2) sont les fonctions propres de l'opérateur $\gamma\rceil\rangle$ définies comme suit :

$$\gamma \rceil \psi_j\rangle = \lambda_j |\psi_j\rangle \; ; \; |\psi_j\rangle \in M_2^* \; ; \; \langle \psi_j \rceil \psi_j\rangle = 1 \; ; \; \lambda_j \neq 0 \qquad (4\text{-}4).$$

Ce spectre est discret et les $|\psi_j\rangle$ peuvent être rendus orthonormés au sens de $\langle \rceil \rangle$. Les λ_j sont > 0.

Les coefficients aléatoires $\xi_j(\omega)$ sont donnés par :

$$\xi_j(\omega) = \langle \psi_j \rceil x(\omega)\rangle \qquad (4\text{-}5)$$

et on a :

$$E\{\xi_j(\omega)\xi_{j'}^*(\omega)\} = \lambda_j \delta_{jj'} \qquad (4\text{-}6).$$

Le développement relatif aux raies soit :

$$|x_r\rangle = \sum_j |\psi_j\rangle \, \xi_j(\omega) \qquad (4\text{-}7)$$

DECOMPOSITIONS DOUBLEMENT ORTHOGONALES
POUR DES FONCTIONS ALEATOIRES DE SECOND ORDRE NON STATIONNAIRE
POSSEDANT UNE PUISSANCE MOYENNE POSITIVE

correspond à une puissance moyenne :

$$P\{|x_r>\} = \sum_j \lambda_j \leqq P(x) \qquad (4\text{-}8)$$

et à une matrice variance :

$$\gamma_r = \sum_j |\psi_j> \lambda_j <\psi_j| \qquad (4\text{-}9).$$

Si $\sum_j \lambda_j = P(x)$, les raies supportent, à elles-seules, toute la puissance moyenne P(x) et il n'y a pas de spectre continu pour cette puissance moyenne.

Si, le maximum (4-3) étant positif, on a $\sum_j \lambda_j < P(x)$ ou si ce maximum est nul, il faut faire intervenir, pour P(x), un spectre continu, qui, dans le premier cas, rend compte de la puissance qui reste lorsqu'on a enlevé les raies, soit $P(x) - \sum_j \lambda_j$, et, dans le second cas, rend compte de toute la puissance.

Dans tous les cas, on peut poser :

$$|x_c> = |x> - |x_r> \qquad (4\text{-}10)$$

$|x_r>$ étant éventuellement nul. Le fait que les raies aient été enlevées se traduit par :

$$\text{maximum de } <H|\gamma_c|H> = 0 \text{ pour } <H|H> = 1 \qquad (4\text{-}11)$$

γ_c étant la matrice variance de $|x_c>$ définie par :

$$\gamma_c = \gamma - \gamma_r = \gamma - \sum_j |\psi_j> \lambda_j <\psi_j| \qquad (4\text{-}12).$$

Non seulement le développement de $|x_r>$ donné en (4-7) est doublement orthogonal, mais chacun de ses termes et leur somme sont doublement orthogonaux à $|x_c>$.

4-3. Construction du spectre continu. Nous supposerons que ce dernier, s'il existe, présente une densité $f(\mu)$ et pas de composante singulière. γ_c satisfait à (4-11). De même que la présence de raies impliquait que le maximum de $<H|\gamma|H>$ soit positif pour $<H|H> = 1$, de même, il est possible d'établir que la présence d'un spectre continu implique que la forme quadratique

$$<H|\gamma_c|H> = <H|\gamma_c|H> \quad \text{soit} > 0 \qquad (4\text{-}13)$$

pour $<H|H> = 1$.

On peut montrer que les fonctions $|\psi(\mu)>$ intervenant dans l'intégrale contenue dans (4-2) sont les fonctions propres de l'opérateur $\gamma_c|>$, définies comme suit :

$$\gamma_c|\psi(\mu)> = f(\mu)|\psi(\mu)> \;;\; |\psi(\mu)> \in M_2^* \;;\; <\psi(\mu)|\psi(\mu)> = 1 \qquad (4\text{-}14).$$

(4-14) ressemble à la condition de définition des fonctions propres dans le cas où l'énergie totale est finie (cf. équation (3-2) du § 3). Il y a, cependant, une différence essentielle : ici, on recherche une fonction propre de norme > 0 dans M_2^*, c'est-à-dire au sens de $<|>$, tandis que, pour les fonctions aléatoires d'énergie totale finie, on recherchait les fonctions propres dans L_2, c'est-à-dire dans les fonctions de norme nulle au même sens. Les $|\psi(\mu)>$ peuvent être rendues orthonormées au sens de (2-5). Le développement doublement orthogonal de $|x_c>$ s'écrit :

$$|x_c> = \int |\psi(\mu)> d\xi(\mu,\omega) \qquad (4\text{-}15)$$

$$\text{avec } E\{d\xi(\mu,\omega)d\xi^*(\mu',\omega)\} = \delta(\mu - \mu')f(\mu)d\mu d\mu' \qquad (4\text{-}16)$$

la puissance moyenne et la matrice variance, correspondant à $|x_c>$, étant respectivement données par :

$$P\{|x_c>\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mu)d\mu \qquad (4\text{-}17)$$

$$\gamma_c = \int |\psi(\mu)> f(\mu)d\mu <\psi(\mu)| \qquad (4\text{-}18).$$

4-3. Conclusion. Au total, on peut bien, sous les hypothèses faites, mettre $|x(\omega)>$ sous la forme (4-2) qui constitue un développement doublement orthogonal, cette double orthogonalité existant :
- pour les raies dans le spectre discret,
- pour des bandes disjointes dans le spectre continu,
- entre un ensemble quelconque de raies et une bande quelconque du spectre continu.

On notera que, d'une part, la construction des $|\psi_j>$ par l'ensemble des équations (4-4) ne définit ces fonctions qu'à une fonction de puissance moyenne nulle près, et que, d'autre part, le mécanisme d'extraction des $|\psi_j> \xi_j$ et des $|\psi(\mu)> d\xi(\mu)$ s'arrête lorsque toute la puissance moyenne a été atteinte. L'équation (4-2) traduit donc une égalité dans M_2^*. Les deux membres peuvent différer par une fonction aléatoire de puissance moyenne nulle, ce qui ne lui interdit pas d'avoir une énergie moyenne totale infinie.

5 - EXEMPLE D'APPLICATION

On trouve, ci-dessous, un exemple très simple destiné à illustrer ce qui précède. Malgré sa simplicité, il peut présenter quelque intérêt dans certaines applications, en particulier faisant intervenir des transpositions (en fréquence) de bruits de fond.

Nous partons d'une fonction aléatoire stationnaire $x(t,\omega)$ à spectre limité à la bande $(-\Omega,+\Omega)$ et à densité spectrale $f_x(\nu)$ constante et égale à f_o dans cette bande.

$$x(t,\omega) = \int_{-\Omega}^{+\Omega} e^{2\pi i\nu t} d\tilde{X}(\nu,\omega) \quad (5\text{-}1).$$

On s'intéresse à :

$$y(t,\omega) = x(t,\omega) \cos 2\pi\nu_o t \text{ avec } \nu_o > \Omega \quad (5\text{-}2).$$

La représentation harmonique de $y(t,\omega)$ s'écrit

$$y(t,\omega) = \int_{-\nu_o-\Omega}^{-\nu_o+\Omega} e^{2\pi i\nu t} d\tilde{Y}(\nu,\omega) + \int_{\nu_o-\Omega}^{\nu_o+\Omega} e^{2\pi i\nu t} d\tilde{Y}(\nu,\omega) \quad (5\text{-}3).$$

La représentation (5-1) de $x(t,\omega)$ est doublement orthogonale : orthogonalité des exponentielles et orthogonalité des $d\tilde{X}(\nu)$ au sens de l'espérance mathématique. Il n'en est pas de même du développement (5-3) de $y(t)$ qui n'est pas stationnaire et pour lequel les $d\tilde{Y}(\nu,\omega)$ ne sont pas orthogonaux ; en effet, les éléments $E\{d\tilde{Y}(\nu)d\tilde{Y}^*(\nu')\}$ sont, dans le plan $\nu \times \nu'$, différents de zéro sur les 4 segments de droites en traits appuyés mis en évidence sur la figure (5-1).

Par ailleurs, le spectre de la puissance moyenne de $y(t)$ correspondant au développement (5-3) est figuré en (5-2).

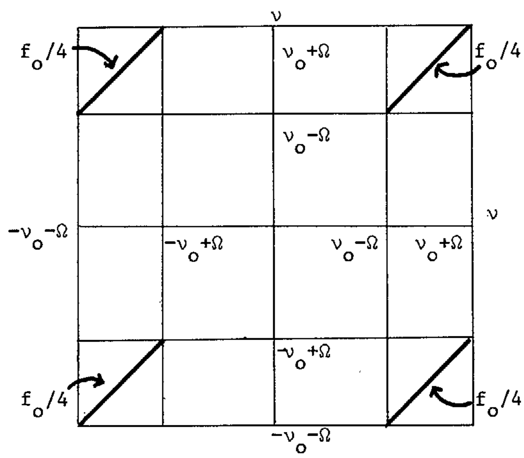

fig. 5-1

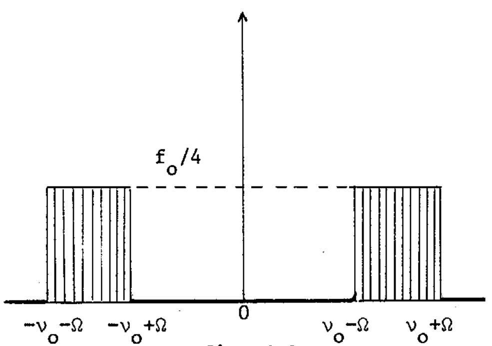

fig. 5-2

Par contre, on obtient évidemment, pour $y(t)$, le développement doublement orthogonal

$$y(t,\omega) = \int_{-\Omega}^{+\Omega} \phi(\nu,t) d\tilde{X}(\nu) \quad (5\text{-}4)$$

avec $\phi(\nu,t) = \cos 2\pi\nu_o t \cdot e^{2\pi i\nu t}$ (5-5)

Les $d\tilde{X}(\nu)$ sont toujours orthogonaux et, pour $\Omega < \nu_o$, il en est de même des $\phi(\nu,t)$ au sens de $<\top>$.

Le spectre de puissance moyenne de $y(t)$ est, pour le développement doublement orthogonal (5-4), celui qui est représenté sur la figure (5-3).

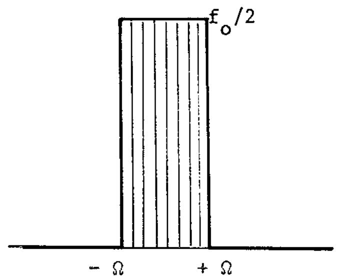

fig. 5-3

Dans les deux cas (représentation (5-3) ou (5-4)), on retrouve une puissance moyenne égale à $f_o\Omega$.

6 - BIBLIOGRAPHIE

(1) M. LOEVE - "Probability theory" - 3ème ed., D. van Nostrand Company , New York, 1962.

(2) A. BLANC-LAPIERRE et R. FORTET - "Théorie des fonctions aléatoires" - Masson et Cie ed., 1953.

(3) E. WONG - "Stochastic processes in Information and dynamical systems" - Mc Graw Hill book Company 1971.

(4) G. BONNET - "Considérations sur la représentation et l'analyse harmonique des signaux déterministes ou aléatoires" - Ann. des Télécommunications, tome 23, n° 3-4, mars-avril 1968, p. 62-86.