

COLLOQUE NATIONAL SUR LE TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

NICE du 16 au 21 JUIN 75



ANALYSEUR SPECTRAL STOCHASTIQUE

F. CASTANIE, J.C. HOFFMANN

G.A.P.S.E., Institut National Polytechnique, 2, rue Ch. Camichel, 31071 TOULOUSE-CEDEX

RESUME

L'Analyse Spectrale classique fait appel à un ordinateur spécialisé : le Transformateur de FOURIER.

On propose un principe de calcul qui permet d'obtenir la transformée de FOURIER d'un signal à partir d'une quantification, aussi grossière qu'on le désire, de celui-ci. Ce principe repose sur l'emploi de sources auxiliaires.

Il fournit une mesure sans biais mais avec variance. Un algorithme permet de réduire cette dispersion et fait apparaître un compromis : précision - temps de calcul.

On présente deux domaines d'intérêts :

- Calcul à 1 bit, qui conduit à une structure particulièrement adaptée à l'exploitation des résultats d'un corrélateur à références stochastiques. Cet estimateur de fonction de corrélation ayant les meilleures performances en largeur de bande, on obtient ainsi un analyseur spectral à très large bande, de structure particulièrement simple.
- Calcul multibit, où l'on montre qu'à précision donnée, le principe de sources auxiliaires autorise la diminution importante du nombre de bits d'un transformateur en temps réel.

SUMMARY

Conventional Spectral Analysis involves a specified computer : the FOURIER Transformer.

A computing principle is put forward ; it allows the FOURIER Transform of a signal to be obtained from as rough a signal quantization as desired. This principle relies upon the use of auxiliary sources.

It provides an unbiased measure although impaired by a variance. An algorithm allows this random scattering to be reduced and leads to a compromise between precision and computing time.

Only two fields of interest are presented here :

- One bit computing leading to an architecture specially fitted to the processing of results from a Random References Correlator. As this correlation function estimation yields the best bandwidth performances, a very wide band spectral analyser with particularly simple architecture is obtained.
- Multibit computing ; In term of comparable accuracy, the auxiliary sources principle enables a significant diminution of the number of bits in a real time transformer to be obtained.



I - GENERALITES

En traitement du signal, on caractérise les processus stochastiques par certains de leurs moments. Comme l'évolution des technologies amène à choisir le plus souvent une représentation numérique de l'information, cela a suscité de nombreuses études concernant l'effet de la numérisation des processus sur l'estimation de leurs moments. En particulier, en 1961 VELTMANN et KWAKERNAAK [1] ont introduit le concept d'estimateur à source auxiliaire, généralisé en 1970 par KE YEN CHANG et MOORE [2], dont nous allons brièvement rappeler le principe.

I-1- Principe

Soient n variables aléatoires (v.a.) $\{X_1, \dots, X_n\}$. Considérons la structure de la figure 1 où $\{A_1, \dots, A_n\}$ est un ensemble de n v.a. "auxiliaires", et $\{Q_1, \dots, Q_n\}$ n opérateurs de quantification de pas $\{\Delta q_1, \dots, \Delta q_n\}$. On démontre [2] que si certaines conditions suffisantes sont remplies pour le n -uplet $\{A_1, \dots, A_n\}$, on obtient :

$$E [X_{1Q} \cdot X_{2Q} \dots X_{nQ}] = E [X_1 \cdot X_2 \dots X_n]$$

c'est-à-dire que l'addition de sources auxiliaires $\{A_1, \dots, A_n\}$ aux v.a. $\{X_1, \dots, X_n\}$ permet à tout estimateur sans biais de $E [X_{1Q} \cdot X_{2Q} \dots X_{nQ}]$ de l'être également pour $E [X_1 \cdot X_2 \dots X_n]$.

Cette propriété étant indépendante des $\{\Delta q_1, \dots, \Delta q_n\}$, on pourra estimer $E [X_1 \cdot X_2 \dots X_n]$, sans biais, à partir d'une version même très grossièrement quantifiée des variables aléatoires, ce qui est d'une importance pratique primordiale.

Mais cette annulation du biais dû à la quantification, s'accompagne d'une variance d'estimation, qui sera d'autant plus grande que la quantification est grossière.

Un ensemble de conditions suffisantes pour que les sources auxiliaires conduisent à la propriété ci-dessus est :

- Les v.a. $\{A_1, \dots, A_n\}$ sont indépendantes entre elles et avec les $\{X_1, \dots, X_n\}$
- $E [A_i] = 0, \forall i \in [0, n-1]$
- $\Phi_i (k \frac{2\pi}{\Delta q_i}) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}^*$

avec $\Phi_i(u)$, fonction caractéristique de A_i .

On connaît des classes de variables aléatoires munies de cette propriété : nous avons montré que la v.a., appartenant à l'une de ces classes, et dont la densité de probabilité est à support minimum, est équirépartie sur $\pm \Delta q_i/2$.

Cette source est alors optimale au sens de la minimisation de la variance normée de l'estimateur. Cela implique, dans le cas particulier de la quantification à 2 niveaux (calcul 1 bit), que la source équirépartie et le signal doivent avoir même support.

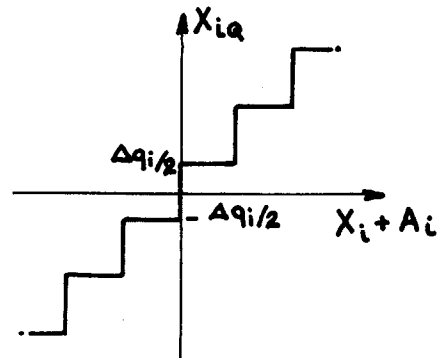
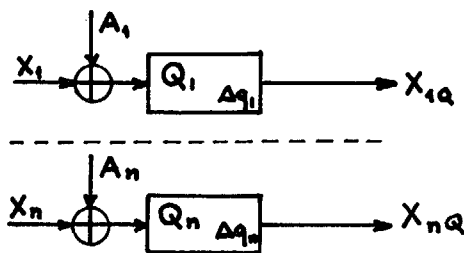


Figure 1.



Le calcul stochastique, l'analyse corrélatrice à référence stochastique [3] sont deux des applications les plus intéressantes de ce qui précède.

I-2- Calcul stochastique

Par calcul stochastique, on entend généralement le cas particulier où les variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ sont dégénérées, c'est-à-dire des quantités certaines $\{x_1, \dots, x_n\}$ et où la quantification, à 2 niveaux seulement, est réalisée par un opérateur signe (calcul à 1 bit).

Nous nous proposons, dans ce qui suit, de généraliser cette notion au calcul multibit.

Soient les variables $\{x_1, \dots, x_n\}$ certaines et un estimateur sans biais

$$\hat{x} [X_{1Q} \cdot X_{2Q} \dots X_{nQ}] \text{ de } E [X_{1Q} \cdot X_{2Q} \dots X_{nQ}]$$

d'après ce qui précède :

$$E [\hat{x} [X_{1Q} \cdot X_{2Q} \dots X_{nQ}]] = E [X_{1Q} \cdot X_{2Q} \dots X_{nQ}] = E [x_1 \cdot x_2 \dots x_n] = x_1 \cdot x_2 \dots x_n$$

Tout estimateur sans biais de la moyenne de $\prod_i X_{iQ}$ est donc estimateur sans biais du produit $\prod_i x_i$.

Le point capital de cette étude est donc de connaître la précision de l'estimation, que l'on définit comme une fonction simple de la variance de l'estimateur (écart-type, intervalle de confiance...).

En résumé, le calcul numérique habituel ($A_1 = A_2 \dots = A_n = 0$) produit un résultat certain (variance nulle) mais biaisé d'une valeur liée aux Δq_i , alors que dans le calcul stochastique multibit, le biais est nul, mais les résultats présentent de la dispersion.

I-3- Variance d'un calcul stochastique

Nous allons analyser la variance pour certains types de calcul que nous aurons à utiliser plus loin.

a)- Variance d'un produit

On désire calculer le produit $\Pi = x_1 \cdot x_2$

Pour cela, on utilise l'estimateur

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X_{1Q}(nT) X_{2Q}(nT)$$

$E[\hat{\Pi}] = x_1 \cdot x_2$, si les v.a. A_1 et A_2 sont munies des propriétés définies précédemment.

$$\text{Var}[\hat{\Pi}] = \frac{1}{N^2} \sum_n \sum_k \mu_{nk} - (x_1 x_2)^2 \text{ avec}$$

$$\mu_{nk} = E [X_{1Q}(n) X_{1Q}(k) X_{2Q}(n) X_{2Q}(k)]$$

L'étude de la variance nécessite la connaissance d'un moment d'ordre 4 des variables $\{A_1(nT), A_1(kT), A_2(nT), A_2(kT)\}$

L'indépendance de $A_1(t)$ et $A_2(t)$ et le caractère certain des x_i entraîne :

$$\mu_{nk} = E [X_{1Q}(n) X_{1Q}(k)] \cdot E [X_{2Q}(n) X_{2Q}(k)]$$

On voit donc que la structure temporelle des sources auxiliaires joue un rôle primordial sur la précision de l'estimation. On pourrait penser que la variance est d'autant plus faible que les variables $A_i(nT)$ et $A_i(kT)$ sont moins liées. En réalité, des résultats récents obtenus au GAPSE [4] ont montré qu'en toute rigueur l'indépendance ne conduit pas toujours à la variance minimale; mais à part quelques cas singuliers, l'expérience montre qu'une forte liaison des échantillons conduit à un accroissement de variance d'estimation.

Nous nous sommes donc attachés à utiliser des sources auxiliaires à échantillons indépendants.

Sous cette hypothèse, le théorème des moments permet d'écrire :

$$E [X_{iQ}(n) \cdot X_{iQ}(k)] = \begin{cases} x_i^2 & , n \neq k \\ E [X_{iQ}^2] & , n = k \end{cases}$$

d'où :

$$\text{Var}[\hat{\Pi}] = \frac{E [X_{1Q}^2] \cdot E [X_{2Q}^2]}{N} - \frac{\pi^2}{N}$$

Posons :

$$\Delta q_1 = \Delta q_2 = \Delta q$$



Dans le cas très important d'une quantification à 2 niveaux (1 bit), il vient :

$$E [X_{iQ}^2] = \frac{\Delta q^2}{4} \quad (\text{car } X_{iQ} \text{ est une v.a.}$$

binaire : $\pm \frac{\Delta q}{2}$), alors :

$$\text{Var} [\hat{\pi}] = \frac{1}{N} \left[\frac{\Delta q^4}{16} - \pi^2 \right] \quad (1)$$

Dans le cas d'une quantification à plusieurs niveaux, on peut montrer [5] que :

$$E [X_{iQ}^2] = x_i^2 - \frac{\Delta q^2}{6} - \frac{\Delta q^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos 2\pi k \left(\frac{x_i}{\Delta q} \right) \quad (2)$$

d'où l'on tire l'expression de la variance de $\hat{\pi}$.

b)- Variance d'une somme de produits

Soit à effectuer

$$S = \sum_{i=0}^{K-1} X_1^{(i)} X_2^{(i)} = \sum_i \pi_i$$

Avec les hypothèses d'indépendance entre échantillons des sources, on voit aisément que :

$$E [\hat{S}] = \sum_i E [\hat{\pi}_i] = K\pi, \text{ si } E [\hat{\pi}_i] = \pi, \forall i$$

$$\text{Var} [\hat{S}] = \sum_i \text{Var} [\hat{\pi}_i] = K \text{var} [\hat{\pi}]$$

On constate que l'écart-type croît comme \sqrt{K} , alors que $E [\hat{S}]$ croît comme K . Le calcul stochastique est donc d'autant plus intéressant que le nombre de sommations est élevé.

II - APPLICATIONS AU TRANSFORMATEUR DE FOURIER

II-1- Principe du Transformateur Stochastique de FOURIER (T.S.F.)

La transformée discrète d'une suite certaine $\{x_n\}$ peut s'écrire :

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_{n,\omega}$$

$y_{n,\omega}$ est le noyau de la transformation, qui dans le cas de la transformée de FOURIER s'écrit :

$$y_{n,\omega} = e^{-in\omega T} \quad (T \text{ période d'échantillonnage}).$$

Nous nous proposons d'estimer cette transformée à l'aide du principe de calcul précédent, par l'estimateur :

$$\hat{F}(\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} X_{nQ} Y_{n,\omega Q}$$

Nous savons que cet estimateur est sans biais :

$$E [\hat{F}(\omega)] = F(\omega)$$

Quant à sa variance, on peut la calculer numériquement sans difficultés si l'on remarque que la série présente dans (2) est une série de FOURIER convergeant vers une fonction périodique formée d'arcs de paraboles [5]. Dans le cas du calcul à 1 bit, nous appliquons la relation (1) qui permet d'obtenir analytiquement les résultats.

Pour juger de la précision, nous devons définir une erreur relative. Il est très simple d'exprimer celle-ci comme l'écart-type normé à la valeur de la "pleine échelle". Mais il est plus habituel de normer l'écart-type à la valeur maximum du spectre obtenu :

$$\xi(\omega) = \frac{\sqrt{\text{Var} [\hat{F}(\omega)]}}{\text{Max} |F(\omega)|}$$

Cette définition conduit à une erreur relative plus grande que la précédente.

II-2- Transformateur 1 bit

Nous avons calculé l'erreur relative pour deux types de spectres :

a)- Spectre de raies

$$\text{Soit } x_n = \frac{\Delta q}{2} \cos \Omega nT$$

Il vient :

$$\text{Var} [\hat{F}(\omega)] = \frac{\Delta q^4}{16} \left[N - \sum_{n=0}^{N-1} \cos^2 \Omega nT \cos^2 \omega nT \right]$$



d'autre part :

$$\begin{aligned} \text{pour } \omega \neq \Omega, E [F(\hat{\omega})] &= 0 \\ \text{pour } \omega = \Omega, E [F(\hat{\Omega})] &= \frac{N}{2} \cdot \frac{\Delta q^2}{4} \end{aligned}$$

Pour ce point :

$$\text{Var} [F(\hat{\Omega})] = \frac{5}{128} N \cdot \Delta q^4$$

d'où :

$$\mathcal{E}(\Omega) = \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{1}{\sqrt{N}} \approx \frac{1,58}{\sqrt{N}}$$

Nous pouvons donc dire, pour $N = 1024$ par exemple, que l'erreur relative est de l'ordre de 5 %.

b) - Spectre continu

Choisissons :

$$x_n = \frac{\Delta q}{2} e^{-\beta n T}$$

Etudions par exemple la partie réelle de $F(\omega)$

$$E [R\{F(\omega)\}] = \frac{\Delta q^2}{4} (1 - e^{-\beta NT}) \frac{1 - \cos \omega T \cdot e^{-\beta T}}{1 - 2 \cos \omega T \cdot e^{-\beta T} + e^{-2\beta T}}$$

$$\begin{aligned} \text{Var} [R\{F(\omega)\}] &= \frac{\Delta q^4}{16} \left\{ N - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} (1 - e^{-2\beta NT}) \left(\frac{1}{1 - e^{-2\beta T}} + \frac{1 - \cos 2\omega T \cdot e^{-2\beta T}}{1 - 2 \cos 2\omega T \cdot e^{-2\beta T} + e^{-4\beta T}} \right) \right\} \end{aligned}$$

Nous pouvons fixer le produit βNT . En effet, les points pris sur l'exponentielle seront choisis pour que, d'une part, le pas T soit suffisamment petit pour que la T.F. discrète ne diffère pas sensiblement de la T.F. (pas de repliement) et d'autre part, qu'ils se trouvent sur la partie significative de cette fonction.

Avec les ordres de grandeur habituels de N , il vient :

$$\text{Var} [F(\hat{0})] \approx N \frac{\Delta q^4}{16}$$

Soit $L = \beta NT$ la longueur réduite d'exponentielle analysée.

$$E [F(\hat{0})] \approx \frac{\Delta q^2}{4} \frac{1}{1 - e^{-\beta T}}$$

$$\approx \frac{\Delta q^2}{4} \cdot \frac{N}{L}$$

D'où :

$$\mathcal{E}(0) \approx \frac{L}{\sqrt{N}}$$

par exemple pour $L = 4$, $N = 1024$,

$$\mathcal{E}(0) \approx 12,5 \%$$

On peut montrer que $\mathcal{E}(\omega) \approx \mathcal{E}(0)$,

Des deux cas précédent, il ressort que pour le calcul 1 bit, l'erreur est importante. La structure même du calculateur où les accumulations se font à 1 bit et se réduisent donc des comptages, nous suggère de réduire cette variance en effectuant une moyenne de transformées indépendantes. En effet, si nous effectuons M transformations $\{F_m(\omega)\}$ de la même série $\{x_n\}$, et définissons le nouvel estimateur :

$$F_M(\hat{\omega}) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F_m(\hat{\omega}), \text{ il vient :}$$

$$\text{Var} [F_M(\hat{\omega})] = \frac{1}{M} \text{Var} [F(\hat{\omega})]$$

Nous voyons donc apparaître un compromis : temps de calcul/précision ; le temps de calcul croissant comme MN et la précision s'améliorant comme : $\frac{1}{\sqrt{MN}}$

Ces M transformées seront estimées consécutivement pour garder à l'appareil sa simplicité. Cela conduit alors à une structure telle que celle de la figure 2 .

L'expression complète d'estimation d'un point étant :

$$F(\hat{\omega}) = \frac{1}{M} \sum_m \sum_n x_{n+mQ} Y_{n+m, \omega_Q}$$

et sachant que l'on calcule ceci pour un ensemble de points généralement de la forme :

$$\omega = k \frac{2\pi}{T}, \quad k \in [0, N-1],$$

On voit que l'on peut associer autant d'algorithmes de calcul qu'il y a de façons de permuter les signes de sommation et l'ordre de calcul des points.

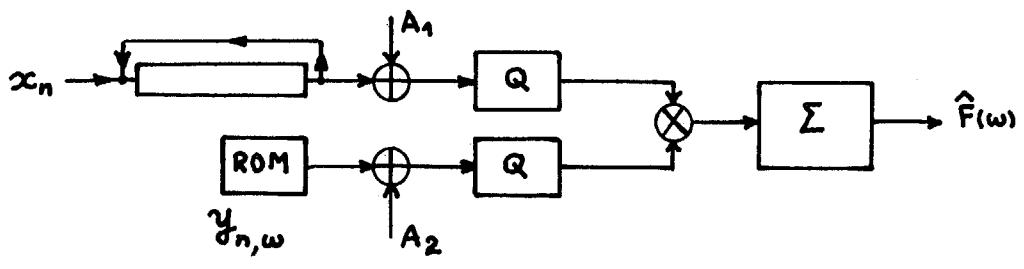


Figure 2.

Dans l'ensemble de la figure 2, on a choisi un calcul en temps différé où les $\{x_n\}$ sont dans une mémoire circulante, et où l'on accumule les estimations. On peut aussi concevoir un ensemble "temps réel" où l'on calcule à l'arrivée de chaque x_n toutes les estimées partielles pour chaque valeur de ω ; mais ceci ne concerne qu'une classe de signaux lents (occupation spectrale inférieure à 100 Hz en technologie actuelle).

II-3- Transformateur multibit

La variance étant faible, il devient inutile d'accumuler comme dans le cas précédent.

Il est intéressant de comparer d'une part, le biais d'un transformateur classique en fonction du nombre de bits de calcul et, d'autre part, l'intervalle de confiance à 90 % :

$\Delta_{90\%} = 1,6 \epsilon$ (on suppose que l'estimateur suit une loi normale).

Un calcul numérique [5] des expressions (1) pour un signal sinusoïdal donne des résultats reproduits sur la figure 3.

On constate que l'addition de sources auxiliaires permet de réaliser des transformateurs, de même classe de précision, calculant sur des mots 4 à 5 bits plus courts que ceux des transformateurs conventionnels.

III- CONCLUSION

Le principal intérêt du T.S.F. que nous venons de décrire réside dans une simplification de structure vis-à-vis du T.F. classique ce qui, indépendamment de considérations économiques, permet d'augmenter l'étendue spectrale de l'appareil.

Nous envisageons deux domaines d'intérêt :

- l'Analyse Spectrale : Le T.S.F. traite des fonctions de corrélation estimées par un corrélateur à références stochastiques. La structure de cet Analyseur Spectral Stochastique est particulièrement intéressante, car des éléments importants peuvent être rendus communs aux deux appareils (sources auxiliaires, mémoires,...). Le calcul se faisant à 1 bit, l'Analyseur Spectral Stochastique est capable de traiter des signaux à très large bande.

- le Transformateur direct : On traite directement les signaux par le T.S.F. A précision de calcul comparable, la réduction du nombre de bit vis-à-vis des T.F. classiques, permet d'élargir le domaine de fréquence où les signaux peuvent être traités en "temps réel", tout en réduisant substantiellement le coût de l'appareil.



ANALYSEUR SPECTRAL STOCHASTIQUE

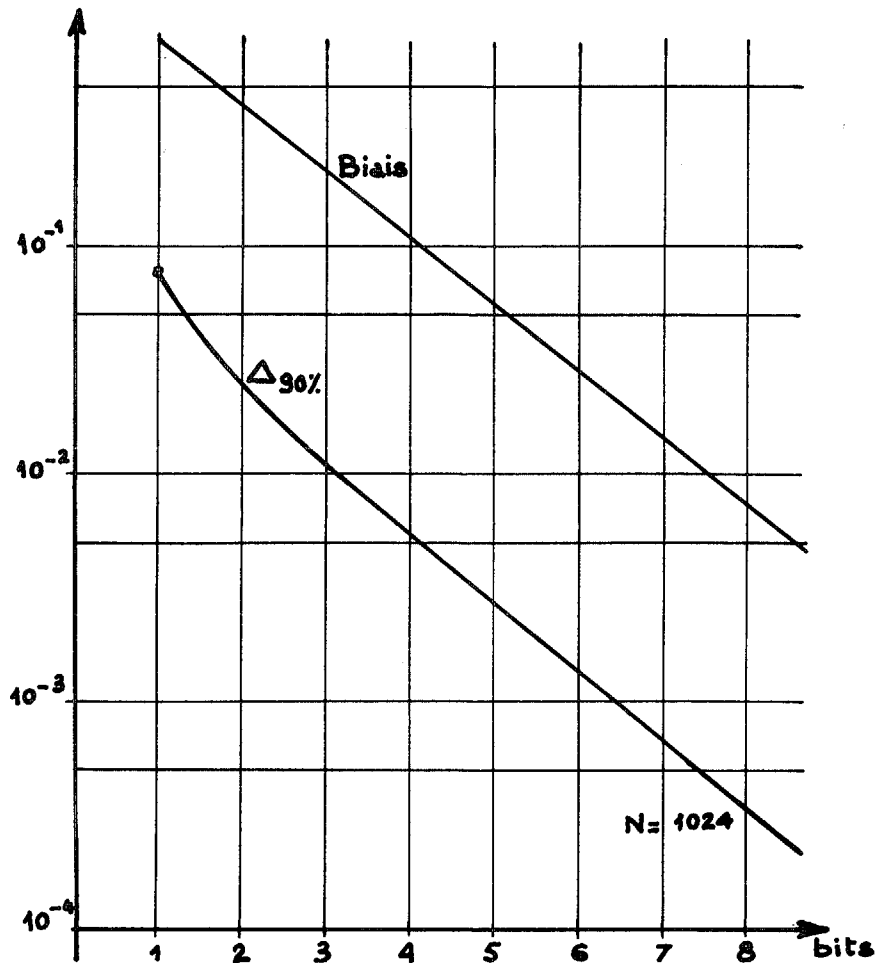


Figure 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] VELTMANN, KWAKERNAAK
"Theorie und Technik der Polaritätskorrelation für die dynamische Analyse niederfrequenter signale und Systeme".
Regelungs Technik, Vol.9, Sept. 1961.
- [2] KE-YEN-CHANG, MOORE
"Modified Digital Correlation and its estimation errors".
Trans. of the IEEE on I.T., Nov. 1970.
- [3] F. CASTANIE, J.C. HOFFMANN, B. LACAZE
"On the performance of a Random Reference Correlator".
Trans. of the IEEE on I.T., March 1974.
- [4] A. ALBAREDA
"Estimation par références stochastiques : Influence de la liaison statistique entre échantillons".
Thèse de Doctorat de Spécialité, Toulouse 28 Avril 1975.
- [5] C. DEMOLIS
"Le Transformateur Stochastique de FOURIER, études théorique et expérimentale".
Thèse de Doctorat de Spécialité, Toulouse 28 Février 1975.
- [6] F. CASTANIE, J.C. HOFFMANN, B. LACAZE
"Transformateur Stochastique de FOURIER et Analyseur Spectral réalisé à partir de celui-ci".
Brevet ANVAR, N° 74 23 395, 5 Juillet 1974.