



TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1^{er} au 5 juin 1971

TRANSFORMATIONS RAPIDES

par A. MARGUINAUD

Ingénieur à la Société d'Etudes et Conseils AERO

RESUME Cet article présente une théorie unifiée des transformations rapides qui généralisent la classe des transformées de FOURIER tout en conservant les propriétés : rapidité des calculs, inverse ayant la même structure. On montre que la rapidité des calculs résulte de l'existence de relations linéaires entre les coefficients de la matrice. On décrit et justifie les algorithmes rapides partiels correspondants. Les "matrices rapides" apparaissent sous leur forme la plus générale comme un produit ordinaire de matrices, elles-mêmes sommes directes de matrices.

On suggère des applications au traitement et à l'aiguillage des signaux dans les domaines du radar, du sonar, de la reconnaissance des formes et des télécommunications.

SUMMARY This paper presents an unified theory of Fast Transforms which generalise the Discrete FOURIER Transforms. The fundamental properties, namely fastness of calculation and inverse with the same structure are preserved. It is shown that this fastness is a consequence of linear relationships between the entries of the matrix. A procedure has been found to construct restricted fast algorithms. "Fast-matrices" i.e fast transform matrices appear as ordinary products of direct sum matrices.

FAST TRANSFORMS should prove usefull in the domains of signal analysis and switching and in the fields of radar, sonar, pattern recognition and telecommunication.



1. INTRODUCTION

L'invention de la Transformée de FOURIER Rapide par COOLEY et TUCHEY permet maintenant d'utiliser en temps réel des traitements d'information qu'on n'aurait pas pu envisager auparavant. On reconnaît ainsi l'importance du choix des algorithmes, qu'il est désirable de guider par des considérations théoriques du genre de celles utilisées pour les dimensionnements énergétiques des sonars par exemple. Cela supposerait une approche de type "thermodynamique" de la théorie des algorithmes qui n'existe pratiquement pas. C'est dans cet esprit que nous nous sommes efforcés d'expliquer dans quelle mesure les algorithmes du genre TFR constituent une exception ou au contraire une famille nettement plus vaste. Les résultats décrits dans la suite démontrent que c'est la seconde hypothèse qui doit être retenue. En effet, il apparaît qu'il existe une classe assez vaste de transformations linéaires rapides qui dépend assez peu du fait que les éléments de la matrice soient des racines de l'unité. On démontre même que les transformées de FOURIER dont l'indice de la racine de l'unité est premier ne peuvent être accélérées par un seul algorithme du type TFR.

La généralité de ces transformations rapides étant démontrée, on peut se demander si on ne pourrait pas dans de nombreux problèmes de traitement du signal se limiter à ce type de transformations. Outre l'avantage de rapidité, ces transformations présentent l'intérêt d'être définies par un nombre de paramètres faible par rapport à celui de la "transformation linéaire générale" de même taille. Cette caractéristique devrait permettre de réduire et souvent de rendre possible les mesures nécessaires aux estimations de ces paramètres (reconnaissance des formes, signatures, etc.).

Les résultats obtenus concernant ces transformations, dites rapides, s'expriment difficilement à l'aide des notations mathématiques habituelles. Nous en avons donc créé de nouvelles, en s'inspirant toutefois de notations déjà utilisées (informatique).



2. NOTATIONS

1.- REPRESENTATION DES ENTIERS PAR DES RADICAUX MULTIPLES

La considération de systèmes de représentation des entiers par des radicaux multiples remonte à CANTOR selon KNUTH [1].

Etant donné un entier k on désigne par \bar{k} le cardinal de son domaine de définition. On convient de prendre $\bar{k} = 1$ lorsque cet ensemble est vide, pour des questions d'homogénéité de formule.

On fait correspondre à tout ensemble ordonné de chiffres un entier représenté par un seul symbole dont la valeur est déterminée par une formule de calcul (formule (4) par exemple).

$$(1) \quad \begin{cases} 0 \leq k_i < \bar{k}_i & 0 \leq i \leq \delta \\ k = k_\delta \parallel k_{\delta-1} \parallel \dots \parallel k_0 \end{cases}$$

On utilise le signe de concaténation \parallel pour séparer les chiffres d'un même entier.

Etant donné un entier k représenté dans un système de $\delta+1$ radicaux, et deux amplitudes de masque i et j telles que $i+j \leq \delta+1$, $i \geq 0$, $j \geq 0$ on constitue un nouvel entier à $\delta+1-i-j$ chiffres noté ${}^i k^j$.

$$(2) \quad \begin{cases} {}^i k^j = k_{\delta-i} \parallel k_{\delta-i-1} \parallel \dots \parallel k_j \\ {}^i k^0 = {}^i k \\ {}^0 k^j = k^j \\ {}^0 k^0 = k \end{cases}$$

On a en raison des définitions adoptées ci-dessus :

$$(3) \quad \begin{cases} i+j < \delta+1 \implies \overline{{}^i k^j} = \overline{k_{\delta-i}} \times \overline{k_{\delta-i-1}} \times \dots \times \overline{k_j} \\ i+j = \delta+1 \implies \overline{{}^i k^j} = 1 \end{cases}$$



La valeur numérique attribuée à t est fournie par

$$(4) \quad \begin{cases} \overline{t^i} = t_{s-i} \times \overline{t^{i+1}} + t_{s-i-1} \times \overline{t^{i+2}} + \dots + t_j \times \overline{t^{s+1-j}} \\ t = t_s \times \overline{t} + t_{s-1} \times \overline{t^2} + \dots + t_0 \times \overline{t^{s+1}} \end{cases}$$

on rappelle que selon nos conventions $\overline{t^{s+1-j}} = \overline{t^{s+1}} = 1$

Tous les entiers $0 \leq t \leq \overline{t}$ sont représentés d'une façon unique dans ce système de représentation.

La plupart des résultats exposés dans la suite utilisent seulement le fait que la correspondance entre les chiffres t_i et l'entier t est biunivoque. Dans [1] on propose d'autres systèmes de la représentation des entiers qui peuvent être utiles (représentations modulaires par exemple [2]).

2.- ELEMENTS DE MATRICES

Les transformations examinées dans la suite sont du type :

$$(5) \quad x(f) = \sum_t a_{ft} \cdot x(t)$$

Pour ne pas multiplier les étages d'indice nous représenterons les éléments a_{ft} par des crochets à 3 arguments : $[a; f, t]$

On représente l'élément de la matrice produit direct des $(s+1)$ matrices :

$$[a_s; f_s, t_s], [a_{s-1}; f_{s-1}, t_{s-1}], \dots, [a_0; f_0, t_0] \text{ par :}$$

$$(6) \quad \begin{cases} [a; f, t] = [a_s; f_s, t_s] \times [a_{s-1}; f_{s-1}, t_{s-1}] \times \dots \times [a_0; f_0, t_0] \\ f = f_s \parallel f_{s-1} \parallel \dots \parallel f_0 \\ t = t_s \parallel t_{s-1} \parallel \dots \parallel t_0 \end{cases}$$

3.- VALEUR ARITHMETIQUE D'EXPRESSIONS LOGIQUES

Toute expression logique entre parenthèses a la valeur 1 si elle est vraie et la valeur 0 si elle est fausse.



Par exemple on peut exprimer que les matrices $[j; u, f]$ et $[i; f, t]$ sont inverses l'une de l'autre par :

$$(7) \quad \sum_{f=0}^{f-1} [j; u, f] \times [i; f, t] = (\delta_{u=t})$$

4.- OPERATIONS ARITHMETIQUES ENTRE LES ENTIERS

Les opérations entre les entiers sont notées de façon habituelle. Toutefois, on a besoin de représenter des opérations agissant séparément sur les chiffres de même rang des deux entiers, on surmonte alors le signe habituel par le nombre de chiffres considéré.

Par exemple $t \overset{n}{\mp} p$ est un entier τ à n chiffres. Chaque chiffre de τ est obtenu suivant la procédure qui suit :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} t = t_n \parallel t_{n-1} \parallel \dots \parallel t_1 \\ p = p_n \parallel p_{n-1} \parallel \dots \parallel p_1 \\ \overline{t_i} = \overline{p_i} \\ t \overset{n}{\mp} p = \tau_n \parallel \tau_{n-1} \parallel \dots \parallel \tau_1 \end{array} \right. \quad 1 \leq i \leq n$$

τ_i est le plus petit entier positif ou nul tel que :

$$(9) \quad \tau_i = t_i + p_i \text{ mod } \overline{t_i}$$

Avec ces conventions on note le produit de convolution cyclique $c(\tau)$ à n dimensions entre les séquences $x(t)$ et $y(t)$.

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} c(\tau) = \sum x(t) \times y(p) \\ \text{avec } t \overset{n}{\mp} p = \tau \\ \overline{c_i} = \overline{t_i} = \overline{p_i} \end{array} \right.$$

On définit la soustraction $t \overset{n}{\mp} p$ à n dimensions de façon similaire. Lorsque le premier argument t est 0 on peut l'omettre :

$$(11) \quad 0 \overset{n}{\mp} p = \overset{n}{\mp} p$$



On définit maintenant l'opérateur signe \mathcal{G} agissant sur la séquence $x(k)$ par :

$$(12) \quad (\mathcal{G}x)(k) = x(-k)$$

Lorsque $x(k)$ est une suite à une seule dimension (c'est-à-dire que k est représenté par un seul chiffre) on écrit indifféremment $x(-k)$ ou $x(1k)$.

En désignant par \mathcal{J} l'opérateur identité on a évidemment :

$$(13) \quad \mathcal{G}^2 = \mathcal{J}$$

5.- RACINE N^{ième} DE L'UNITE

Par commodité on remplace $\exp 2\pi j \frac{\gamma}{N}$ par $\left[\frac{\gamma}{N} \right]$, où γ est un entier positif ou nul.

La propriété souvent utilisée est :

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\gamma}{N} + k \right] = \left[\frac{\gamma}{N} \right] \\ \text{avec } k \text{ entier} \end{array} \right.$$

Il est donc possible d'appliquer certains résultats de cette étude à la théorie des codes polynomiaux.

L'astérisque * désigne l'opérateur de conjugaison complexe, et on vérifie que l'on a bien :

$$(15) \quad \left[-\frac{\gamma}{N} \right]^* = \left[\frac{\gamma}{N} \right] \quad \left[\frac{\gamma}{N} \right]^* = \left[-\frac{\gamma}{N} \right]$$

On définit l'opérateur de conjugaison complexe \mathcal{E} par :

$$(16) \quad (\mathcal{E}x)(k) = x^*(k)$$

qui vérifie :

$$(17) \quad \mathcal{E}^2 = \mathcal{J}$$

6.- TRANSFORMÉE DE FOURIER A n DIMENSIONS

La Transformée Discrète de FOURIER à n dimensions de la séquence $x(k)$ est définie par :



$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(\underline{f}) = (\mathcal{F}x)(\underline{t}) \\ x(\underline{f}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\underline{t}} \left[\frac{f_n \times t_n}{N_n} \right] \times \left[\frac{f_{n-1} \times t_{n-1}}{N_{n-1}} \right] \times \dots \times \left[\frac{f_1 \times t_1}{N_1} \right] \\ \underline{f} = f_n \parallel f_{n-1} \parallel \dots \parallel f_1 \quad \bar{f}_i = t_i = N_i \\ \underline{t} = t_n \parallel t_{n-1} \parallel \dots \parallel t_1 \quad N = \prod_{i=1}^n N_i \quad 1 \leq i \leq n \end{array} \right.$$

\mathcal{F} est donc un produit direct de n matrices.

3. INTRODUCTION HEURISTIQUE DES TRANSFORMATIONS RAPIDES

Dans cette section, on introduit graduellement les notations que l'on vient de définir de façon à faciliter la compréhension des idées principales. On décrit deux approches distinctes qui conduisent à la même classe de transformées linéaires rapides.

1.- UTILISATION DE LA DEPENDANCE LINEAIRE

1.1

Le calcul d'une transformée du type (5) demande au plus $\bar{f} \times \bar{t}$ produits et $\bar{f} \times (\bar{t}-1)$ sommes (ou différences).

On obtient un gain de calculs lorsque l'on se trouve dans l'une des trois situations : des éléments de la matrice sont nuls, égaux à 1 ou linéairement dépendants.

Considérons une matrice dont une de ses sous-matrices d'ordre 2 a un rang inférieur à 2, c'est-à-dire vérifie :

$$(19) \quad \begin{array}{l} a_{ft} \times a_{kl} = a_{fl} \times a_{kt} \\ (a) = \begin{pmatrix} - a_{ft} & - a_{fl} \\ - a_{kt} & - a_{kl} \\ \bullet & | \end{pmatrix} \end{array}$$

Une telle relation permet d'économiser une addition et une multiplication puisque :

$$(20) \quad \begin{cases} x_0 = a_{00} x_0 + a_{01} x_1 \\ x_1 = a_{10} x_0 + a_{11} x_1 = \frac{a_{10}}{a_{00}} x_0 \end{cases}$$



Les "matrices rapides" définies à la section 4 possèdent (cf. théorème 1 de la section 4) plusieurs sous-matrices d'ordre 2 dont le rang est inférieur à 2. On dispose ainsi d'un critère que l'on peut utiliser pour prouver qu'une matrice n'est pas une matrice rapide.

1.2

Par exemple on démontre qu'une transformée de FOURIER à une dimension dont l'ordre N est premier, n'est pas une "matrice rapide":

$$(21) \quad X\left(\frac{f}{N}\right) = \sum_{t=0}^{N-1} x(t) \times \exp 2\pi j \left(\frac{f \times t}{N} \right)$$

En effet, si dans (21) $\exp 2\pi j \left(\frac{f \times t}{N} \right)$ était élément d'une matrice rapide, il devrait exister au moins un couple (t_1, f_1) et (t_2, f_2) tel que :

$$\exp 2\pi j \left(\frac{f_1 \times t_1 + f_2 \times t_2}{N} \right) = \exp 2\pi j \left(\frac{f_1 \times t_2 + f_2 \times t_1}{N} \right)$$

Cela entraînerait que $(\frac{f_1}{N} - \frac{f_2}{N}) \times (t_1 - t_2)$ serait un multiple de N , ce qui est impossible puisque $|\frac{f_1}{N} - \frac{f_2}{N}|$ et $|t_1 - t_2|$ sont des entiers positifs moindre que N .

Remarque

BLUESTEIN [3] a montré que l'on pouvait toutefois ramener cette transformée à un produit de convolution que l'on peut calculer rapidement à l'aide de deux transformées partielles rapides (cf. sections 5 et 6). En effet, on a bien l'identité suivante :

$$(22) \quad X\left(\frac{f}{N}\right) = \sum_t a^{2\frac{f}{N} \times t} \times x(t) = a^{(\frac{f}{N})^2} \times \sum_t a^{-(\frac{f}{N} \times t)^2} \times (a^{t^2}) \times x(t)$$

$X\left(\frac{f}{N}\right)$ peut aussi être interprété comme la valeur d'un polynôme dont les coefficients sont $x(t)$. Les algorithmes rapides permettent de calculer les valeurs de ce polynôme pour des valeurs qui s'expriment sous forme de puissance entière d'un même élément. En outre, le produit de deux polynômes peut s'interpréter comme un produit de convolution.

Lorsque l'on sait inverser "rapidement" la relation (22), c'est-à-dire calculer les valeurs de $x(t)$ à partir de celles de $X\left(\frac{f}{N}\right)$ on peut calculer un produit de convolution dans des conditions de rapidité comparables. La Transformée de FOURIER Discrète est un exemple bien connu qui utilise les racines de l'unité comme valeurs de la variable.



1.3

En dépit des relations existant entre les transformées de FOURIER et les produits de convolution, un produit de convolution par un signal patron ne peut être, en général représenté par une matrice rapide. En effet, de la relation (10) on tire que les éléments de la matrice correspondante sont de la forme :

$$(23) \quad [b; f, t] = b_{f \ m \ t}$$

Cette expression est incompatible avec une structure de "matrice rapide" à moins que les "éléments du patron" ne vérifient la relation* (d'après (19)).

$$\underline{b_{f \ m \ t}} \times \underline{b_{f \ m \ t}} = \underline{b_{f \ m \ t}} \times \underline{b_{f \ m \ t}}$$

1.4

La recherche systématique des structures susceptibles d'accélérer les calculs de transformées linéaires présente un intérêt certain pour l'étude du traitement automatique des signaux. Nous nous bornerons à rappeler que l'existence d'une sous-matrice de rang inférieur à son ordre permet d'économiser des multiplications et des additions, ce qui généralise les résultats que nous venons d'exposer.

2.- GENERALISATIONS DU PRODUIT DIRECT DE MATRICES

2.1

La relation (24) définit les éléments de la matrice C produit direct des matrices B et A avec le signe de concaténation défini au § 1 de la section 2.

$$\begin{cases} C_{f \ t} = b_{f_1 \ t_1} \times a_{f_0 \ t_0} \\ f = f_1 \parallel f_0 \end{cases} \quad t = t_1 \parallel t_0$$

Le calcul de $x(f) = \sum_t C_{f \ t} \times x(t)$ s'effectue selon :

$$\begin{aligned} \gamma(f_0 \parallel f_1) &= \sum_{t_0} a_{f_0 \ t_0} \times x(t_1 \parallel t_0) \\ x(f) &= \sum_{t_1} b_{f_1 \ t_1} \times \gamma(f_0 \parallel t_1) \end{aligned}$$

Le nombre I_p de produits à effectuer a pour expression :

* On emploie les notations f, t pour désigner des valeurs particulières de f et t .



$$I_p = \bar{f}_0 \times \bar{t} + \bar{f} \times \bar{t}_1 = \bar{f} \times \bar{t} \left(\frac{1}{\bar{f}_1} + \frac{1}{\bar{t}_0} \right)$$

I_p est inférieur à $\bar{f} \times \bar{t}$ si, et seulement si, $\bar{f}_1 \geq 2$, $\bar{t}_0 \geq 2$ et $\bar{f}_1 \times \bar{t}_0 \geq 6$.

Le nombre J de paramètres qui définissent le produit direct est $\bar{f}_1 \times \bar{t}_1 + \bar{f}_0 \times \bar{t}_0$. J est moindre que $\bar{f} \times \bar{t}$ si et seulement si $\bar{f}_0 \times \bar{t}_0 \geq 2$, $\bar{f}_1 \times \bar{t}_1 \geq 2$ et $\bar{f} \times \bar{t} \geq 6$.

On peut représenter ce produit direct de matrices sous la forme :

$$(25) \quad (c_{\bar{f}\bar{t}}) = \begin{pmatrix} (b_{00}) \times A & (b_{01}) \times A \\ (b_{10}) \times A & (b_{11}) \times A \end{pmatrix}$$

Les matrices (b_{ij}) sont diagonales, en outre, les éléments diagonaux d'une même matrice sont égaux entre eux.

2.2

On peut augmenter le nombre J de paramètres définissant la transformée, sans augmenter le nombre I_p de produits à effectuer en utilisant deux matrices A_0 et A_1 au lieu de A et en prenant pour (b_{ij}) des matrices diagonales quelconques.

$$(26) \quad (c_{\bar{f}\bar{t}}) = \begin{pmatrix} (b_{00}) \times A_0 & (b_{01}) \times A_1 \\ (b_{10}) \times A_0 & (b_{11}) \times A_1 \end{pmatrix}$$

D'une façon générale l'élément général de la matrice c a pour expression maintenant :

$$(27) \quad c_{\bar{f}\bar{t}} = b_{\bar{f}\bar{t}_1} \times a_{\bar{f}_0\bar{t}}$$

On a alors $J = I_p$, c'est-à-dire que le nombre de paramètres de la transformation est égal au nombre de produits à effectuer.

2.3

Nous allons maintenant réduire J et I_p en les maintenant égaux, sans réduire la classe des transformations correspondantes à condition que les éléments diagonaux des matrices (b_{ij}) soient distincts de zéro.



Par des opérations convenables on peut mettre (26) sous la forme :

$$(28) \quad (C_{f,t}) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ (b_{10}) \times A_0 & (b_{11}) \times A_1 \end{pmatrix}$$

Ces opérations qui ne modifient pas la valeur de $C_{f,t}$ sont données par* :

$$(29) \quad \begin{cases} a_{f_0,t} \leftarrow b_{f_0,t_1} \times a_{f_0,t} \\ b_{f,t_1} \leftarrow b_{f,t_1} / b_{f_0,t_1} \quad \text{pour } f \neq f_0 \end{cases}$$

Avec les notations introduites au § 1 de la section 2, les éléments de C s'expriment par :

$$(30) \quad \begin{cases} [C; f_0, t] = [a; f_0, t] \\ [C; f, t] = [b; f, t_1] \times [a; f_0, t] \quad \text{pour } f \neq f_0 \end{cases}$$

On effectue les calculs selon :

$$(31) \quad \begin{cases} x(f_0 \parallel t_1) = \sum_{t_0} [a; f_0, t] \times x(t) \\ x(f_0) = \sum_{t_1} y(f_0 \parallel t_1) \\ x(f) = \sum_{t_1} [b; f, t_1] \times y(f_0 \parallel t_1) \end{cases}$$

Le nombre I_p de produits qui est égal au nombre de paramètres est alors :

$$(32) \quad I_p = J = \overline{f_0} \times \overline{t} + \overline{f} \times \overline{t_1} - \overline{f_0} \times \overline{t_1}$$

I_p est moindre que $\overline{f} \times \overline{t}$ si et seulement si $\overline{f_1} \geq 2$ et $\overline{t_0} \geq 2$, c'est-à-dire pratiquement dans toutes les cas utiles.

4. MATRICES RAPIDES

1.- DEFINITION

Une matrice est dite rapide et la transformation correspondante est dite rapide également si ses éléments

* f_0 est le chiffre de droite dans $f = f_1 \parallel f_0$



peuvent se factoriser selon la formule (33). On appelle R degré de cette matrice le paramètre γ de la formule de définition*.

$$(33) \quad \begin{cases} [a; f, t] = [a_0; f, t] \times [a_1; f, t] \times \dots \times [a_\gamma; f, t] \\ t = t_\gamma \| t_{\gamma-1} \| \dots \| t_0 \quad 0 \leq t \leq \bar{t} \\ f = f_\gamma \| f_{\gamma-1} \| \dots \| f_0 \end{cases}$$

2.- THEOREME 1

Toute matrice rapide contient plusieurs sous-matrices d'ordre 2 dont le déterminant est nul.

Démonstration

Tout d'abord montrons que toute matrice rapide de R degré γ supérieur à 1 peut être transformée en une matrice de R degré 1.

Par exemple à partir des éléments de la formule (33) on détermine les éléments $[b; \cdot, \cdot]$.

$$(34) \quad \begin{cases} [b_0; f, t] = [a_0; f, t] \times \dots \times [a_k; f, t] \\ [b_1; f, t] = [a_{k+1}; f, t] \times \dots \times [a_\gamma; f, t] \\ [a; f, t] = [b_0; f, t] \times [b_1; f, t] \end{cases}$$

Il suffit donc de démontrer le théorème dans le cas $\gamma = 1$, pour lequel les éléments de la matrice sont de la forme :

$$[a; f, t] = [a_0; f_0, t_0] \times [a_1; f_1, t_1]$$

On désigne par f_1, f_0 (resp t_1, t_0) des valeurs distinctes du chiffre f (resp t). On vérifie par substitution l'identité :

$$[a; f_1 \| f_0, t_1 \| t_0] \times [a; f_1 \| f_0, t_1 \| t_0] = [a; f_1 \| f_0, t_1 \| t_0] \times [a; f_1 \| f_0, t_1 \| t_0]$$

Remarque

CQFD

La définition des matrices rapides est adaptée à la dérivation des algorithmes de la Transformée de FOURIER.

* Une matrice dont les éléments ne sont pas factorisés est de R degré 0.



Les deux propriétés caractéristiques (suffisantes pour la dérivation de la plupart des résultats) sont :

- . tout crochet contient au moins un chiffre de t contenu dans aucun crochet à sa gauche ;
- . tout crochet contient au moins un chiffre de f contenu dans aucun crochet à sa droite.

3.- THEOREME 2

Toute transformation rapide de R degré γ donnée par (33) peut être calculée avec un nombre de produits (et d'additions) I_p donné par (35) :

$$(35) \quad I_p = \sum_{k=0}^{\gamma} \overline{h_f} \times \overline{\gamma-k} t \leq \frac{\gamma+1}{2^{\gamma}} \times \overline{f} \times \overline{t}$$

Démonstration

La méthode de calcul qui sert de référence s'écrit :

$$(36) \left\{ \begin{array}{l} \gamma(\overline{\gamma+1} f, \overline{0} t) = x(t) \\ \gamma(\overline{f}_{\gamma-k} \parallel \overline{h+1} f, \overline{\gamma-k+1} t) = \sum_{k_h} [a_{k_h}] \overline{f}_{\gamma-k} \parallel \overline{h+1} f, \overline{t_{k_h}} \parallel \overline{\gamma-k+1} t \times \gamma(\overline{h+1} f, \overline{t_{k_h}} \parallel \overline{\gamma-k+1} t) \\ \text{pour } h = \gamma \quad k = 0 \\ \times(\overline{f}) = \gamma(\overline{0} f, \overline{\gamma+1} t) \end{array} \right.$$

Le nombre de calculs est maximal lorsque les sommes sont effectuées sur tout le domaine de définition des arguments. Dans ces conditions le nombre de produits est $\overline{\gamma-k} t \times \overline{h+1} f$ et le nombre d'additions est $(\overline{t_{k_h}} - 1) \times \overline{\gamma-k+1} t \times \overline{h+1} f$ pour le pas de calcul repéré par l'indice k .

En collectant les résultats on obtient l'égalité (35). L'inégalité résulte des relations :

$$\overline{f} = \overline{h} f \times \overline{f}^{\gamma-k+1} \quad \overline{t} = \overline{\gamma-k} t \times \overline{t}^{h+1}$$

$$\overline{f}^{\gamma+1-k} \geq 2^k \quad \overline{t}^{h+1} \geq 2^{\gamma-k}$$

4.- THEOREME 3

L'inverse d'une matrice rapide inversible est une matrice rapide de même structure.

Démonstration

Rappelons qu'une matrice "somme directe" est une matrice que l'on peut partitionner en sous-matrices, de telle sorte que les éléments non nuls situés sur une même ligne ou une même colonne appartiennent à une même sous-matrice de la partition considérée.

On constate sur (36) qu'une matrice rapide de \mathbb{R} degré \varkappa est le produit de $\varkappa+1$ matrices elles-mêmes "somme directe".

La matrice rapide est donc inversible si, et seulement si, chaque matrice facteur est elle-même inversible. Chaque matrice facteur qui est une matrice somme directe est elle-même inversible si, et seulement si, chaque matrice composante est elle-même inversible. Il en résulte que les éléments $[j; u, f]$ et $[i; f, t]$ des deux matrices inverses vérifient le système (37).

$$(37) \left\{ \begin{array}{l} \sum_f [j; u, f] \times [i; f, t] = (\mu = t) \\ ({}^{h+1} \mu = {}^{h+1} t) \times \sum_k [j_h; u, {}^{\varkappa-h} f] \times [i_{{}^{\varkappa-h} k}; {}^{\varkappa-h} f, t] = [{}^h \mu = {}^h t] \end{array} \right.$$

5. TRANSFORMÉE DISCRÈTE DE FOURIER

1.- THEOREME 1

Les opérateurs \mathcal{Q} et \mathcal{F} constituent un système de générateurs du groupe diédral d'ordre 8.

Démonstration

De l'identité :

$$\left(1 - \left[\frac{t_i}{N_i} \right] \right) \times \left(\sum_{f_i=0}^{N_i-1} \left(\left[\frac{t_i}{N_i} \right] \right)^{f_i} \right) = 1 - \left[\frac{N_i \times t_i}{N_i} \right] = 0$$

on tire successivement les deux relations :

$$(38) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{f_i=0}^{N_i-1} \left[\frac{f_i \times t_i}{N_i} \right] = N_i \times \left(1 - \left[\frac{t_i}{N_i} \right] \right) \\ \sum_f \prod_{\lambda=1}^{\varkappa} \left[\frac{f_\lambda \times t_\lambda}{N_\lambda} \right] = \prod_{\lambda=1}^{\varkappa} N_\lambda \times \left(1 - \left[\frac{t_\lambda}{N_\lambda} \right] \right) \end{array} \right.$$

La sommation sur f est effectuée sur tout son domaine de définition.



La formule (18) de définition de l'opérateur \mathfrak{Z} combinée avec (38) donne :

$$(39) \quad \begin{cases} (\mathfrak{Z}^2 x)(\mu) = x(\mu) \\ \mathfrak{Z}^2 = \mathfrak{I} \end{cases}$$

En utilisant les propriétés des opérateurs $\mathfrak{C}, \mathfrak{S}, \mathfrak{Z}$ (cf. section 2, § 3, 4 et 5) on obtient les relations (39) caractéristiques du groupe diédral d'ordre 8 $\underline{[4]}$:

$$(40) \quad \begin{cases} \mathfrak{Z}^4 = \mathfrak{C}^2 = \mathfrak{I} \\ \mathfrak{C}\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}^3\mathfrak{C} \end{cases}$$

Les relations (39) et (40) fournissent une formule de calcul de l'inverse de \mathfrak{Z} :

$$(41) \quad \begin{cases} x(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\frac{f}{N}} \left(\prod_{i=1}^s \left[-\frac{t_i \times t_i}{N_i} \right] \right) x\left(\frac{f}{N}\right) \\ N = \prod_{i=1}^s N_i \end{cases}$$

Remarquons que \mathfrak{Z}^{-1} vérifie les mêmes relations que \mathfrak{Z}

2.- THEOREME 2

Le calcul d'une transformée de FOURIER à une seule dimension demande au plus $\frac{1}{2} N \times \log(N-1)$ produits complexes lorsque $N = 2^{s+1}$. Par complexe on entend que l'on ne tient pas compte dans cette évaluation du facteur réel $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Démonstration

On commence par évaluer le paramètre de complexité I_p dans le cas général et ensuite on applique le résultat obtenu au cas $N = 2^{s+1}$.

Les paramètres sont définis par le système (42) :

$$(42) \quad \begin{cases} x\left(\frac{f}{N}\right) = \sum_{\frac{t}{N}} \left[\frac{f \times t}{N} \right] x(t) \\ t = t_s \parallel t_{s-1} \parallel \dots \parallel t_0 & f = f_s \parallel f_{s-1} \parallel \dots \parallel f_0 \\ N = \prod_{h=0}^s \overline{t}_h = \prod_{h=0}^s \overline{f}_h & \text{pour } \begin{cases} 0 \leq i \leq s \\ 0 \leq i+j < s \end{cases} \\ \overline{t}_i = \overline{f}_{s-i} \implies \overline{t}_i = \overline{f}_i & \\ 0 \leq t_i < \overline{t}_i & 0 \leq f_i < \overline{f}_i \end{cases}$$



Avec les notations sur les nombres écrits en radicaux multiples on obtient les relations :

$$\begin{cases} \frac{i f_j}{\delta} = \frac{i f_{j+1}}{\delta} \times \frac{\overline{\delta}}{\delta} + \frac{f_j}{\delta} \times \frac{\overline{\delta}}{\delta} \\ \delta t^i = \delta^{j+1} t^i + t_{\delta-j} \times \frac{\overline{\delta}}{\delta^{j+1} t^i} \end{cases}$$

On en déduit la factorisation de SANDE :

$$(43) \quad \left[\frac{\frac{i f_j}{\delta} \times \delta t^i}{\delta t^i} \right] = \left[\frac{\frac{i f_{j+1}}{\delta} \times \delta^{j+1} t^i}{\delta^{j+1} t^i} \right] \times \left[\frac{\frac{f_j}{\delta} \times \delta t^i}{\delta t^i} \right]$$

En intervertissant i et j , f et t on obtient la factorisation de COOLEY TUCKEY :

$$(44) \quad \left[\frac{\frac{i f_j}{\delta} \times \delta t^i}{\delta t^i} \right] = \left[\frac{\frac{i+1 f_j}{\delta} \times \delta t^{i+1}}{\delta t^{i+1}} \right] \times \left[\frac{\frac{i f_j}{\delta} \times t_i}{\delta t^i} \right]$$

En partant de $i=j=0$ et en appliquant (43) ou (44) on augmente $i+j$ de 1 à chaque fois jusqu'à ce que $i+j = \nu$. On a ainsi démontré que lorsque $\nu \geq 1$ la Transformée de FOURIER Discrète est une Transformée Rapide.

On peut donc représenter les facteurs de SANDE par :

$$(45) \quad \left[\cdot ; \delta-j f, \delta t \right] = \left[\frac{\frac{f_j}{\delta} \times \delta t^i}{\delta t^i} \right]$$

et les facteurs de COOLEY TUCKEY par :

$$(46) \quad \left[\cdot ; i f, \delta-i t \right] = \left[\frac{\frac{i f_j}{\delta} \times t_i}{\delta t^i} \right]$$

Les facteurs de SANDE vérifient :

$$(47) \quad \sum_{t_{\delta-j}} \left[\cdot ; \delta-j f, \delta t \right] = 0 \quad \text{et} \quad \left[\cdot ; 0 \parallel \delta-j+1 f, \delta t \right] = 1$$

On peut donc effectuer le pas de calcul $\delta-j$ selon :

$$(48) \quad \gamma(\delta-j f, \delta t) = \sum_{t_{\delta-j} \neq 0} \left[\cdot ; \delta-j f, \delta t \right] \times \left(\gamma_{\delta-j+1}(\delta-j+1 f, \delta t) - \gamma_{\delta-j+1}(\delta-j+1 f, 0 \parallel \delta t) \right)$$

On en déduit le nombre de produits complexes à effectuer :

$$(49) \quad I_p = \overline{t} \times \sum_{k=0}^{\nu} \frac{(\overline{t_k} - 1)^2}{\overline{t_k}}$$



Par des arguments similaires on obtient les formules (50) et (51) qui montrent que l'expression de \mathcal{I}_p est indépendante de la suite des formules de factorisation utilisées.

$$(50) \quad \sum_{\substack{\delta, j \\ \delta \neq j}} [\cdot; \delta, j, \delta t] = 0 \quad \text{et} \quad [\cdot; \delta, j, 0 \parallel \delta^{+1} t] = 1$$

$$(51) \quad \gamma(0 \parallel \delta^{+1} f, \delta t) = - \sum_{\substack{\delta, j \\ \delta \neq j \neq 0}} \gamma(\delta, j, \delta t)$$

Le nombre de paramètres utilisés $\sum_{\delta=1}^{\infty} \overline{\delta t^2}$ peut toujours être rendu minimal quelle que soit la séquence des factorisations, à condition d'utiliser les radicaux dans un ordre convenable.

Pour une factorisation complète, la formule (49) utilisée avec $N = 2^{\delta+1}$ justifie le théorème énoncé.

3.- THEOREME 3

Le produit de convolution cyclique à n dimensions $C(\mu)$ de $\alpha(t)$ par $\gamma(p)$, où μ , t et p sont représentés dans le même système de radicaux, peut être calculé à l'aide de transformées rapides selon :

$$(52) \quad \begin{cases} C(\mu) = \sum_{\substack{t, p \\ t+p=\mu}} \alpha(t) \times \gamma(p) = \sqrt{N} \times \left(\mathcal{F}^{-1} \sum_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left((\mathcal{F}\alpha)(\frac{1}{2}) \times (\mathcal{F}\gamma)(\frac{1}{2}) \right) \right) (\mu) \\ N = \prod_{i=1}^n N_i \end{cases}$$

Démonstration

Il suffit d'appliquer les formules (18) et (38).

Remarque

Le produit de convolution ordinaire à n dimensions de deux séquences $\alpha(t)$ et $\gamma(t)$ s'écrit :

$$(53) \quad \bar{C}(\mu) = \sum_{t_1+p_1=\mu_1} \sum_{t_2+p_2=\mu_2} \dots \sum_{t_n+p_n=\mu_n} \alpha(t) \times \gamma(p)$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$ on a $0 \leq t_i < \bar{t}_i$ et $0 \leq p_i < \bar{p}_i$, il en résulte que chaque chiffre de μ doit avoir un domaine de définition tel que :

$$(54) \quad 0 \leq \mu_i < \bar{t}_i + \bar{p}_i - 1$$



Si l'on prend $\bar{u}_i \geq \bar{x}_i + \bar{p}_i - 1$ on démontre facilement que le calcul des éléments de $\bar{c}(u)$ se ramène à celui des éléments non nuls du produit correspondant de convolution cyclique.

6. ALGORITHMES PARTIELS

On désigne par $\{t\}$ l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $x(t)$ peut être différent de zéro, et par $\{f\}$ l'ensemble des valeurs de f pour lesquelles on désire calculer $x(f)$.

f et t sont représentés à l'aide d'un système de $s+1$ radicaux. Pour $0 \leq l \leq s+1$, ${}^l f$ (resp. ${}^l t$) représente un entier à $(s+1-l)$ chiffres obtenu par suppression de l chiffres à gauche d'un élément de $\{f\}$ (resp. de $\{t\}$). On désigne par ${}^l f$ (resp. ${}^l t$) le nombre d'éléments distincts ${}^l f$ (resp. ${}^l t$).

1.- THEOREME

Une transformation rapide partielle peut être calculée avec un nombre de produits donné par la formule (54)

$$(55) \quad I_p = \sum_{h=0}^s \overline{{}^h f} \times \overline{{}^{s-h} t} - \sum_{h=0}^{s-1} \overline{{}^{h+1} f} \times \overline{{}^{s-h} t} \leq \overline{f} \times \overline{t}$$

Lorsque $\bar{t} = \bar{t}$ et $\bar{f} = \bar{f}$ on a :

$$(56) \quad I_p \leq \frac{s+2}{2^{s+1}} \bar{f} \times \bar{t}$$

2.- DEMONSTRATION

2.1

On construit une partition de l'ensemble $\{f\}$ en au plus $s+1$ sous-ensembles dont les éléments sont désignés par $\overline{{}^s f}$, $\overline{{}^{s+1} f}$, ..., $\overline{{}^0 f}$.

On prend $\overline{{}^s f}$ éléments $\overline{{}^s f}$ de $\{f\}$ tels que : tous les ${}^s \overline{{}^s f} = \overline{{}^s f}$ soient distincts.

Parmi les éléments restant de $\{f\}$, on en prend $\overline{{}^{s-1} f} - \overline{{}^s f}$ notés $\overline{{}^{s-1} f}$ tels que : tous les ${}^{s-1} \overline{{}^{s-1} f} = \overline{{}^{s-1} f}$ soient distincts.



D'une façon générale jusqu'à $h = \nu$, au pas repéré par h , parmi les éléments restant de $\{f\}$, on en prend $\overset{\nu-h}{\nu-h} f - \overset{\nu-h+1}{\nu-h+1} f$ notés $\overset{\nu-1}{\nu-1} f$ tels que :

tous les $\overset{\nu-h}{\nu-h} f = \overset{\nu-h}{\nu-h} f$ soient distincts.

Cette partition sur $\{f\}$ induit une partition sur $\{h f\}$ telle que :

$$\{h f\} = \bigcup_{h \leq l \leq \nu} \{h l f\}$$

2.2

Les formules de calcul (57) sont obtenues par division des crochets $[a; \dots]$ de façon à obtenir les crochets $[b; \dots]$.

$$(57) \left\{ \begin{aligned} [a; \overset{\nu}{\nu} f, t] &= [b_\nu; \overset{\nu}{\nu} f, t] \\ [a; \overset{\nu-1}{\nu-1} f, t] &= [b_{\nu-1}; \overset{\nu-1}{\nu-1} f, t] \times [a; \overset{\nu}{\nu} g, t] \\ \overset{\nu}{\nu} g &\text{ est le seul élément de } \{f\} \text{ tel que } \overset{\nu}{\nu} f = \overset{\nu}{\nu} \overset{\nu-1}{\nu-1} f = \overset{\nu}{\nu} g = \overset{\nu}{\nu} g \\ [a; \overset{h}{h} f, t] &= [b_h; \overset{h}{h} f, \overset{\nu-h}{\nu-h} t] \times [a; \overset{h+l}{h+l} g, t] \\ \overset{h+l}{h+l} g &\text{ est le seul élément de } \{f\} \text{ tel que } \overset{h+l}{h+l} f = \overset{h+l}{h+l} \overset{h}{h} f = \overset{h+l}{h+l} \overset{h+l}{h+l} g \end{aligned} \right.$$

On vérifie que la dépendance en t de $[b_h; \dots]$ est bien $\overset{\nu-h}{\nu-h} t$ puisque :

$$\frac{[a; \overset{h}{h} f, t] [a_0; \overset{h}{h} f, \overset{\nu}{\nu} t] \times \dots \times [a_h; \overset{h}{h} f, \overset{\nu-h}{\nu-h} t] \times [a_{h+1}; \overset{h+l}{h+l} f, \overset{\nu-h-1}{\nu-h-1} t] \times \dots \times [a_\nu; \overset{\nu}{\nu} f, t]}{[a; \overset{h+l}{h+l} f, t] [a_0; \overset{h+l}{h+l} f, \overset{\nu}{\nu} t] \times \dots \times [a_h; \overset{h+l}{h+l} g, \overset{\nu-h}{\nu-h} t] \times [a_{h+1}; \overset{h+l}{h+l} f, \overset{\nu-h-1}{\nu-h-1} t] \times \dots \times [a_\nu; \overset{\nu}{\nu} f, t]}$$

La dernière étape du calcul est obtenue pour $h=0$. Seule l'évaluation des crochets $[b; \dots]$ demande que l'on calcule de nouveaux produits, ce qui entraîne la formule (55).

3.- REMARQUES

L'évaluation des crochets $[b; \dots]$ demande au plus le même nombre de produits que I_p de la formule (55). L'intérêt de la méthode proposée dépend donc beaucoup de l'organisation logique du programme, dans le cas de calculs non répétitifs.

Un calcul direct dans le cas des Transformées de FOURIER à une seule dimension montre que la dépendance en f du crochet $[b_h; \dots]$ n'est que $\overset{h}{h} \overset{\nu-h}{\nu-h} - \overset{h+l}{h+l} \overset{\nu-h}{\nu-h}$



L'évolution de I_p dans le cas où tous les radicaux sont égaux à b suggère une expression du type :

$$I_p \approx (b-1) \times (\bar{f} \times \log_b \bar{x} \times \bar{x} \times \log_b \bar{f})$$

7. APPLICATIONS

Les méthodes et concepts développés à propos des algorithmes rapides se rencontrent dans de nombreux domaines du traitement des signaux : antennes réseaux, en radar et sonar, codage correcteur d'erreurs, tri etc. Nous donnons ci-dessous trois exemples.

1.- COMMUTATION

Il s'agit de connecter M entrées à N sorties sans mélanger les sorties. Une façon onéreuse de réaliser ce système consiste à utiliser $M \times N$ contacteurs.

En termes de théorie des matrices ce problème revient à considérer que M signaux d'entrées subissent une transformation linéaire dont les éléments de la matrice correspondante valent 0 ou 1.

Si l'entrée t doit être connectée à la sortie f on a $[a; f, t] = 1$, sinon $[a; f, t] = 0$

La condition de non mélange s'écrit :

$$(58) \quad \sum_t [a; f, t] \leq 1$$

Si l'on prend pour $[a; f, t]$ une matrice (partielle) de \mathbb{R} degré γ , on vérifie à partir de (33), que (58) est vérifiée si (59) est vérifiée pour tous les k tels que $0 \leq k < \gamma$

$$(59) \quad \sum_{t_k} [a_k; f, {}^{x-k}t] \leq 1$$

Le nombre de contacteurs qui est de l'ordre de I_p est nettement moindre que $M \times N$ bien que la plupart des commutations soient possibles.

2.- RECONNAISSANCE DES FORMES

Dans les projets sur la reconnaissance des formes on se trouve confronté avec le problème du choix d'une



méthode pour laquelle des expérimentations nécessaires seront d'autant plus nombreuses que le nombre de paramètres à ajuster est plus grand. Il semble donc raisonnable de commencer à essayer des transformations rapides au point de vue du calcul et définies par un nombre maximum de paramètres, tout en assurant une prise en compte de toutes les mesures.

Par analogie avec la méthode des calculs des transformées rapides (partielles) au lieu de traiter simultanément toutes les mesures, on pourrait procéder en plusieurs étapes. Chaque étape intermédiaire consiste à effectuer une partition des sorties de l'étape précédente, puis à traiter les membres de chaque élément de cette partition.

Cette classe de transformation possède des analogies avec ce que l'on désigne par "Layered machines". On pourrait essayer ce type de transformation à l'analyse des sons en vue de leur classification.

3.- EXTRACTEUR DE SONAR A MODULATION LINEAIRE DE FREQUENCE

Le signal reçu étant $s(t)$ le problème consiste à évaluer l'intégrale pendant la durée T :

$$G(t) = \int_t^{t+T} s(\tau) p(\tau - t, v) d\tau$$

$p(\tau, v)$ est le signal patron de référence nul pour $\tau < 0$ et qui dépend de la vitesse radiale v des mobiles recherchés.

Soit B la bande totale du signal chirp émis autour de la fréquence porteuse F . On désigne par C la vitesse de propagation du son et par V la valeur absolue de la vitesse radiale à détecter.

Le nombre de signaux patrons à considérer est de $\frac{4VTF}{C}$ qui vaut 268 environ avec :

$$V = 25, \quad T = 0,2s, \quad F = 20 \text{ kHz}, \quad C = 1500 \text{ m/s.}$$

La largeur de bande des signaux à considérer vaut : $(B + 4VF/C)$. A condition de filtrer suffisamment et d'utiliser le signal analytique, le pas temporel d'échantillonnage peut être pris égal à :

$$\frac{h}{2(B + 4VF/C)}$$



avec :

$$k \leq 1 \text{ par exemple } k = \frac{2}{3}$$

Avec la méthode de convolution classique, le nombre de produits par seconde à effectuer pour chaque vitesse radiale est $9 (B + 4VF/C)^2 T$.

En admettant qu'un produit complexe est trois fois plus "long" qu'un produit ordinaire, le nombre de produits par seconde à effectuer pour chaque vitesse radiale par la Transformée Rapide est de :

$$9 (B + 4VF/C) \log_2 3 (B + 4VF/C) T$$

Avec les mêmes valeurs numériques que ci-dessus et en prenant comme largeur de bande $B = 1000\text{Hz}$, on trouve pour chaque case de vitesse radiale 10 000 000 de produits par seconde par la méthode classique et 300 000 seulement avec les algorithmes rapides. Rappelons que le nombre total par seconde pour toutes les 268 cases de vitesse radiale est de :

- . 10 000 000 x 268, pour la méthode classique,
- . 300 000 x 268, pour la vitesse rapide.

8. CONCLUSION

La présente étude n'a considéré que l'évaluation du nombre de produits à effectuer, les méthodes employées peuvent s'étendre sans difficulté à d'autres facteurs de complexité (appels aux différentes mémoires, opérations logiques, etc.).

Il serait souhaitable de développer les moyens quantitatifs d'évaluation a priori de la complexité des traitements des signaux, de façon à faciliter les études préliminaires de coût efficacité.

REMERCIEMENTS

Nous tenons à remercier la DRME, particulièrement M. VILLARD qui a guidé nos travaux.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] KNUTH (D.E). The Art of Computer Programming, Vol. 2 : Seminumerical Algorithms. Addison-Wesley, 1969, p. 175
- [2] COFFY (J). Description d'algorithmes de transformation de FOURIER. Contributions à la Théorie des systèmes, Cahier n° 3, Novembre 1970, IRIA, pp. 171-199, 6 réf. bibl.
- [3] BLUESTEIN (L.I). A Linear Filtering Approach to the Computation of the Discrete Fourier Transform 1968, NEREM Record, pp. 218-219
- [4] LEDERMAN (H). Introduction to the Theory of Finite Groups. Oliver and Boyd, 1953, p. 55
- [5] COOLEY (J.W), TUCKEY (J.W). An Algorithm for the Machine Calculation of Complex Fourier Series. Math. of Comput. Vol. 19, Avril 1965, pp. 297-301
- [6] GENTLEMAN (W.M), SANDE (G). Fast Fourier Transform for Fun and Profit. AFIPS Conference Proceedings, vol. 29, Fall Joint Computer Conference 1966, pp. 563-578.
-