

## TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1<sup>er</sup> au 5 juin 1971

---

ETUDE ET REALISATION D'UN FILTRE OPTIMAL A MEMOIRE FINIE

A. SILVENT(\*)

---

**RESUME**

On expose une méthode pour réaliser un filtre optimal à mémoire finie travaillant sur des fonctions échantillonnées. La conception de l'appareil permet d'accéder aux réglages de tous les paramètres définissant la réponse percussionnelle. On présente les résultats expérimentaux des tests de fonctionnement.

**SUMMARY**

*A method of carrying out an optimal filter with finite memory, working on sampled functions, is given. The design of the device makes it possible to adjust all parameters defining the percussional response. An account is given of experimental results with working tests.*

---

Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires (CEPHAG) -  
associé au CNRS - 44, av. Félix Viallet 38 GRENOBLE-



A. SILVENT

1. INTRODUCTION

On désire construire un filtre "identité" pour la classe des fonctions polynômiales d'ordre  $n$  donné, qui minimise l'erreur quadratique moyenne associée au bruit dont on connaît les caractéristiques statistiques jusqu'au second ordre. On s'impose de plus un support de réponse percussionnelle "borné" de durée  $T$ .

L'étude théorique [1,2] de ces filtres conduit à l'expression de leur réponse percussionnelle  $H(t)$ . Le problème technique consiste donc à réaliser un dispositif tel que l'on puisse commodément fixer les paramètres qui caractérisent  $H(t)$ .

On s'impose de travailler sur des fonctions aléatoires échantillonnées ; la réponse percussionnelle est alors une suite de  $N$  distributions de DIRAC équidistantes et pondérées.

Dans ces conditions le produit de convolution qui détermine la sortie  $Y$  associée à l'entrée  $X$  s'écrit :

$$Y_{(k\Delta T)} = \sum_{j=0}^{N-1} X_{(k\Delta T - j\Delta T)} \cdot H_{(j\Delta T)}$$

La réalisation physique de ce produit de convolution implique l'exécution des trois opérations suivantes :

- retards  $j\Delta T$  de la fonction d'entrée échantillonnée ( $j = 0, 1, \dots, N - 1$ ).



- produits de  $X_{(k\Delta T - j\Delta T)}$  par  $H_{(j\Delta T)}$
- sommation à l'instant  $k\Delta T$  des  $N$  produits.

Le schéma fonctionnel du filtre s'organise conformément à ces trois opérations.

## 2. RETARDS DE LA FONCTION D'ENTREE ECHANTILLONNEE

### 2.1 Principe

On utilise un registre analogique à décalage dans lequel les éléments de mémoire sont des condensateurs. Pour obtenir la synchronisation des transferts du contenu de chaque cellule de mémoire dans la suivante on met en oeuvre un double registre fonctionnant en deux temps (voir Fig. 1) :

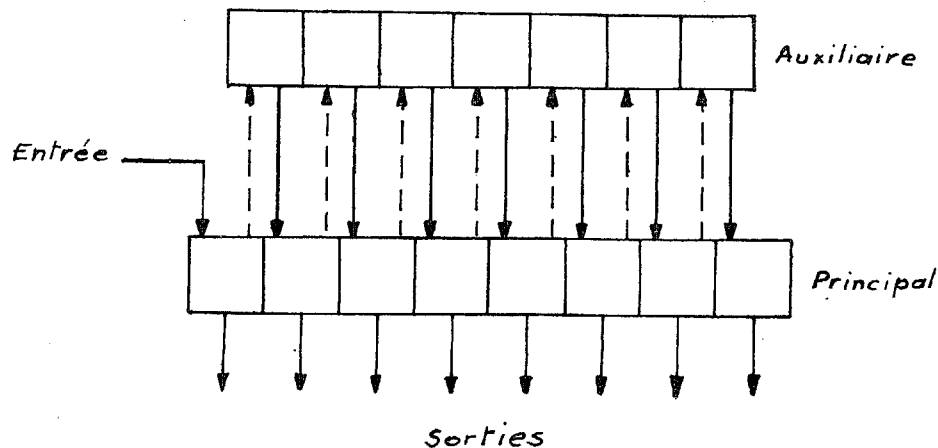


Fig. 1



- 
- 1er temps : Entrée d'un échantillon dans la première cellule de mémoire et transfert du contenu du registre auxiliaire dans le registre principal.
  - 2e temps : Maintien du contenu du registre principal et sa recopie avec décalage d'une unité dans le registre auxiliaire.

Ainsi le signal observé à l'instant  $k\Delta t$  sur la  $j^{\text{ème}}$  sortie est :

$$X(k\Delta T - j\Delta T)$$

si  $\Delta T$  est le temps séparant deux transferts successifs.

## 2.2 Solution technique adoptée

Le schéma suivant (Fig. 2) illustre le principe du décalage des échantillons mis en mémoire, donc de leur retard dans le temps.

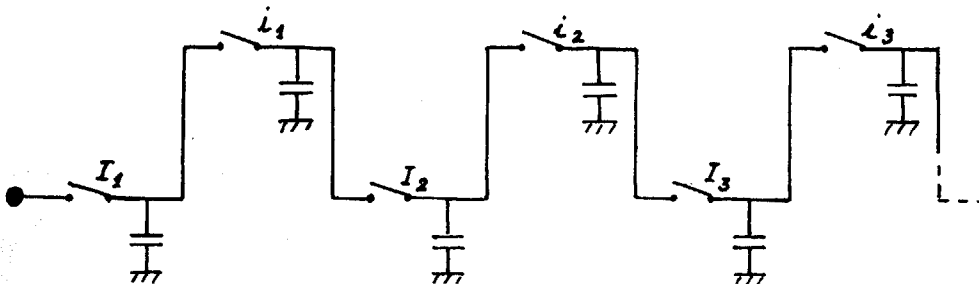


Fig. 2

La fermeture simultanée des interrupteurs "i" commande le transfert du contenu des mémoires du



registre principal dans le registre auxiliaire alors que la fermeture simultanée des interrupteurs "I" commande la recopie dans le registre principal des informations stockées dans le registre auxiliaire.

En pratique chaque condensateur est suivi d'un amplificateur suiveur à grande impédance d'entrée afin d'éviter une dégradation excessive des informations lors des transferts et des maintiens successifs. Le schéma électrique d'une cellule de mémoire est donné figure.3. Un transistor à effet de champ joue le rôle d'interrupteur. L'amplificateur suiveur comporte un étage différentiel d'entrée à transistors à effet de champ dont la très grande résistance de grille rend négligeable la fuite du condensateur pendant la phase de maintien. L'impédance de sortie de l'amplificateur A et la résistance de saturation du transistor interrupteur suivant doivent être aussi faibles que possible pour minimiser la constante de temps de charge du condensateur C.[3]

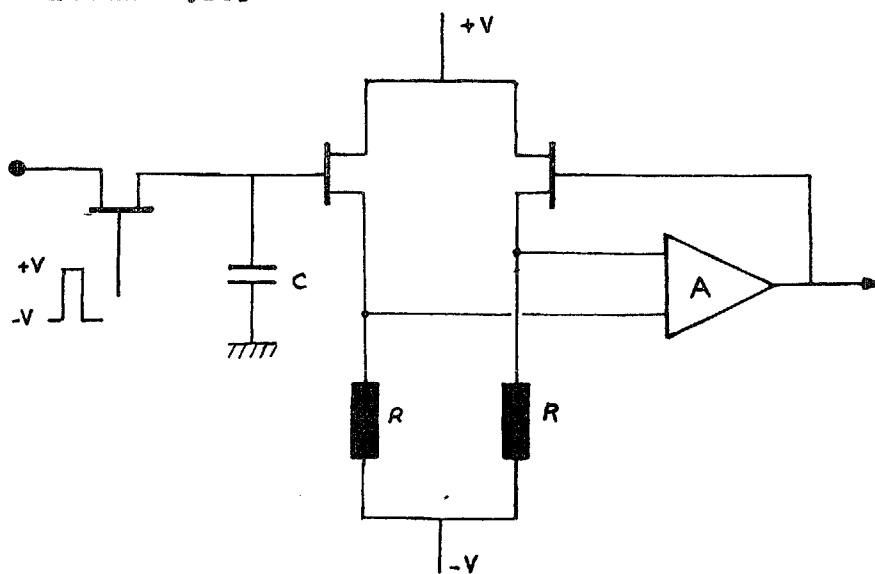


Fig. 3



### 2.3 Choix des éléments - Rapidité de fonctionnement

La durée  $\tau_1$  du temps de transfert et la durée  $\tau_2$  du temps de maintien sont choisies égales, le temps de maintien dans un registre correspondant au temps de recopie dans l'autre. La somme  $\tau_1 + \tau_2$  est égale à  $\Delta T$ .

Le condensateur  $C$  est fixé de façon à conserver à l'expression  $e^{-\frac{N\tau}{R_0C}}$  une valeur très voisine de 1 pour la valeur maximale  $\tau$ ,  $R_0C$  étant la constante de temps de décharge dans l'entrée de l'amplificateur suiveur. La vitesse maximale de fonctionnement est déterminée en considérant que si  $E$  est l'amplitude d'un échantillon présenté à l'entrée, la valeur effectivement mise en mémoire dans la  $N^{\text{ième}}$  cellule est :

$$E(1 - e^{-\frac{\tau}{R_0C}})^N \approx E(1 - Ne^{-\frac{\tau}{R_0C}})$$

$R_0C$  étant la constante de charge du condensateur  $C$  à travers l'impédance de sortie de  $A$  et la résistance de saturation de l'interrupteur. La valeur minimale de  $\tau$  correspondant aux retards les plus faibles admissibles dans ce cas sans dégradation notable de l'information est fixée par l'importance du terme  $Ne^{-\frac{\tau}{R_0C}}$ .

## 3. PRODUITS ET SOMMES

### 3.1 Principe

L'emploi d'un sommateur analogique à  $N$  entrées



pondérées permet d'effectuer simultanément ces opérations (Fig.4) [4]

La tension de sortie  $V$  est donnée par l'expression :

$$V = \sum_{j=0}^{N-1} E_j \frac{R}{R_j}$$

or  $E_j = X_{(k\Delta T - j\Delta T)}$

En donnant aux rapports  $\frac{R}{R_j}$  la valeur  $H_{(j\Delta T)}$

on a  $V = Y_{(k\Delta T)} = \sum_{j=0}^{N-1} X_{(k\Delta T - j\Delta T)} \cdot H_{(j\Delta T)}$

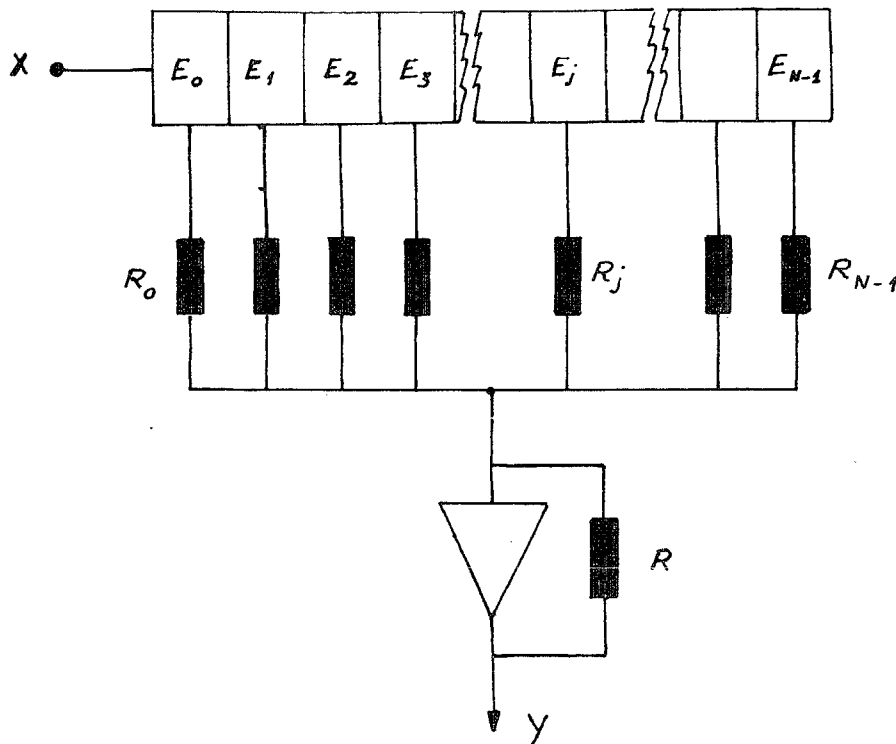


Fig. 4



---

### 3.2 Réalisation pratique - Réglage de la réponse percussionnelle

La réalisation pratique de ce dispositif ne pose pas de problème particulier. Les résistances  $R_j$  sont ajustables ; une tension  $E$  continue et calibrée est appliquée à l'entrée du registre analogique. Toutes les résistances de pondération sont déconnectées sauf  $R_j$  ; on ajuste  $R_j$  pour que le rapport de la tension de sortie  $V_j$  à la tension  $E$  soit égal à  $H(j\Delta T)$ .

### 3.3 Affectation des signes

Pour affecter aux distributions de DIRAC constituant la réponse percussionnelle, le signe convenable, on utilise deux voies de sommation traitant séparément les distributions positives et les distributions négatives. Le choix s'effectue au moyen de  $N$  inverseurs (Fig. 5). La réponse  $Y(k\Delta T)$  est la somme des tensions délivrées par chacune des deux voies.

### 3.4 Réglage du gain

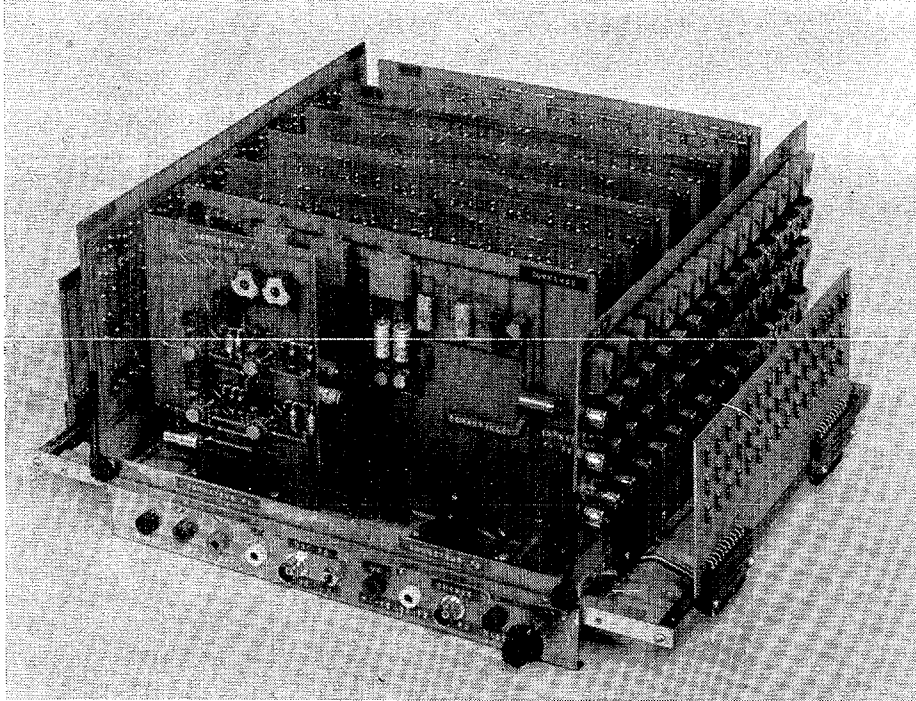
Un réglage fin du gain du filtre est obtenu, après affichage des différentes valeurs  $H(j\Delta T)$ , en jouant sur la valeur de la résistance  $R$ .



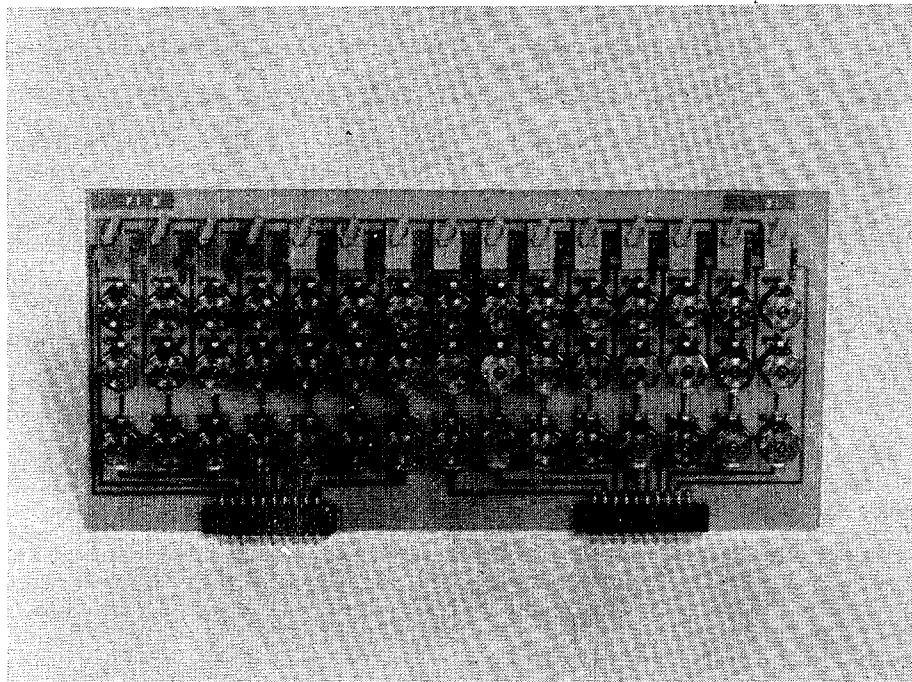


## FILTRE OPTIMAL A MEMOIRE FINIE

---

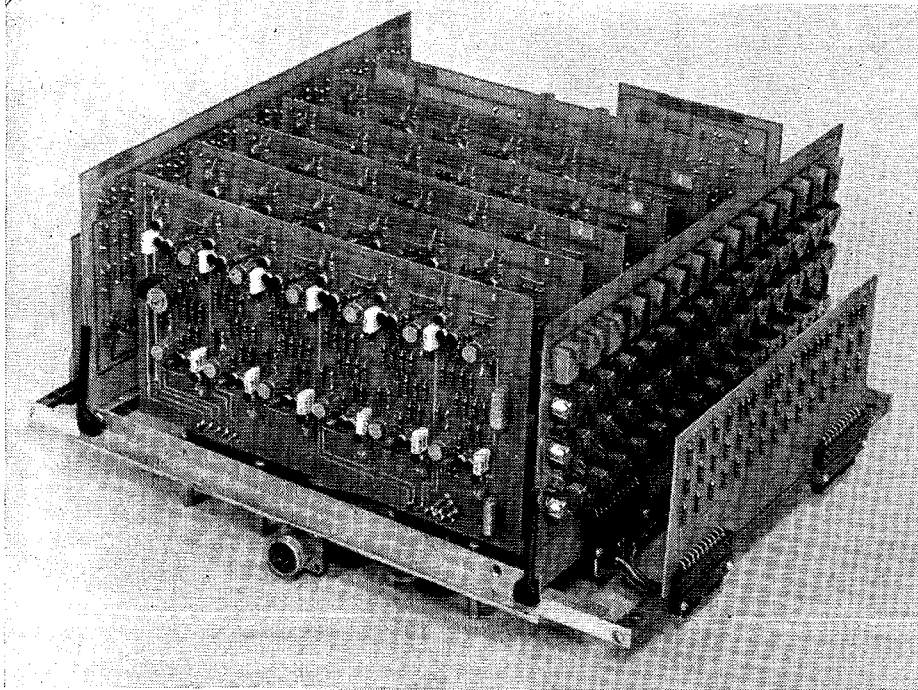


Vue de face

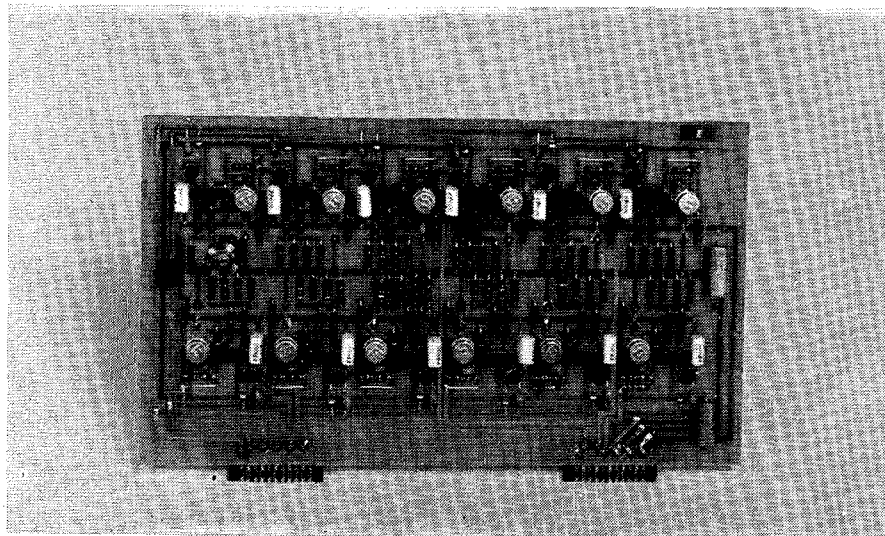


Réseau de pondération





**Vue arrière**



**Elément de registre analogique "12 cellules"**

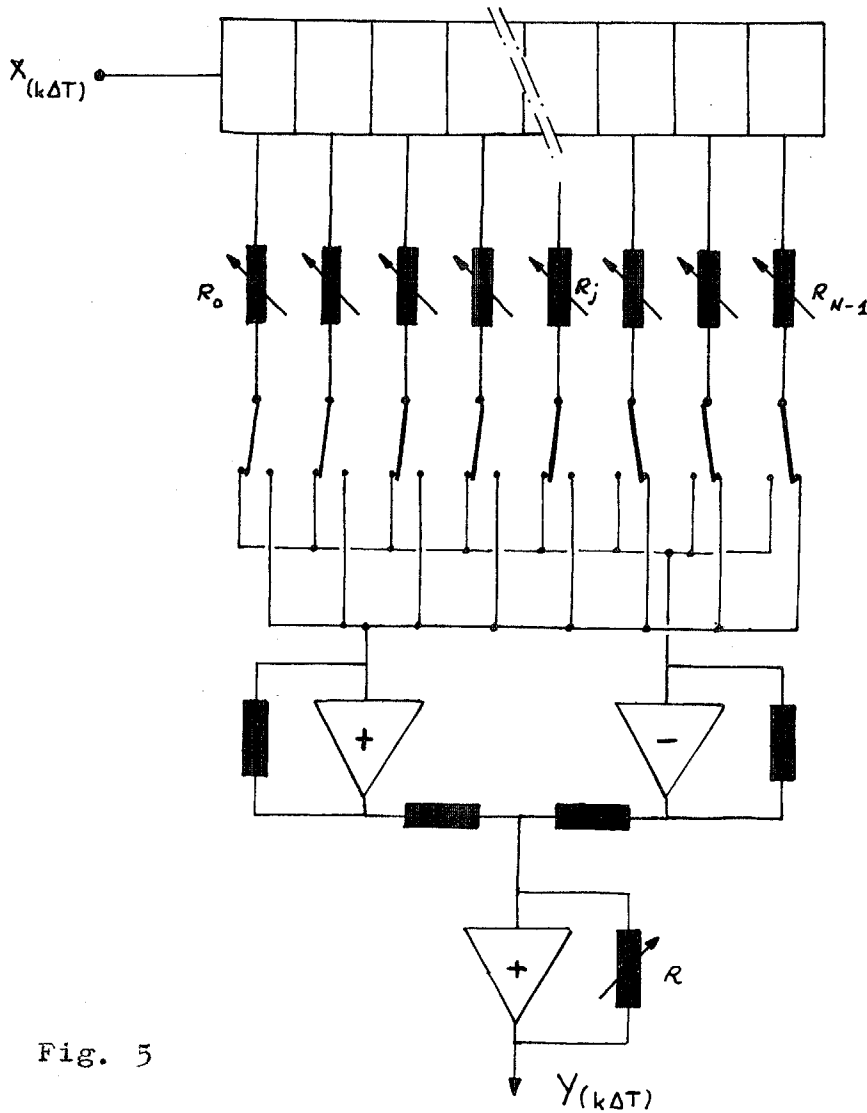


Fig. 5

#### 4. VERIFICATIONS EXPERIMENTALES

##### 4.1 Mesure de l'erreur quadratique moyenne $\mathcal{E}^2$ :

Le signal d'entrée est constitué d'un polynôme dégradé par un bruit dont on connaît la puissance  $\sigma_1^2$  et la fonction d'autocorrélation

$$\Gamma(r) = \sigma_1^2 \exp\left(-\alpha \frac{T}{N-1} |k-j|\right)$$



Après filtrage on obtient le même polynôme, dégradé par un bruit de puissance  $\sigma_e^2$ . On a mesuré le rapport  $\xi^2$  de ces deux puissances dans différents cas.

La filtre ayant été calculé de façon telle que la sortie s'identifie en l'absence de bruit à l'entrée polynômiale, à une avance ou à un retard  $\ell\Delta T$  près, on a relevé le comportement du rapport  $\xi^2$  des erreurs quadratique moyennes en fonction de  $\ell$ .

#### 4.2 Cas des polynômes du 1er degré

La figure 6 montre l'évolution de  $\xi^2$  pour différentes valeurs de  $\ell$  :

Prédiction :  $\ell\Delta T = -\frac{T}{2}$

Retard nul :  $\ell\Delta T = 0$

Retards :  $\ell\Delta T = \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, T$

La courbe théorique est représentée en trait plein.

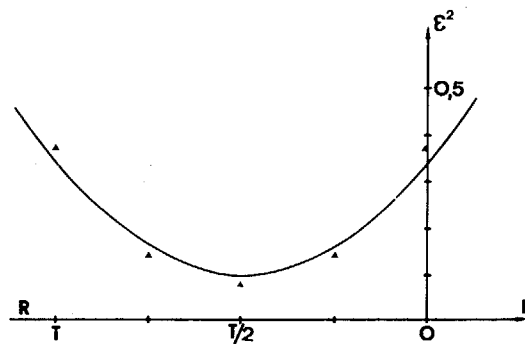


Fig. 6  $T = 7,5 \text{ s}$



Les figures suivantes représentent la forme de la réponse percussionnelle du filtre correspondant à ces différents cas :

- Fig. 7a       $l\Delta T = -\frac{T}{2}$
- Fig. 7b       $l\Delta T = 0$
- Fig. 7c       $l\Delta T = \frac{T}{4}$
- Fig. 7d       $l\Delta T = \frac{T}{2}$

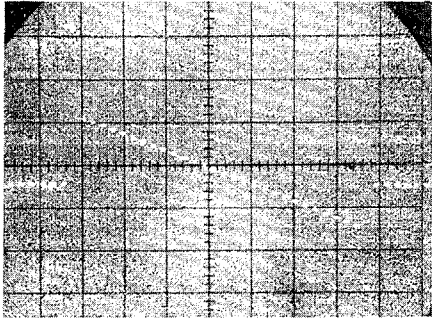


Fig. 7a  
300 mV/div.

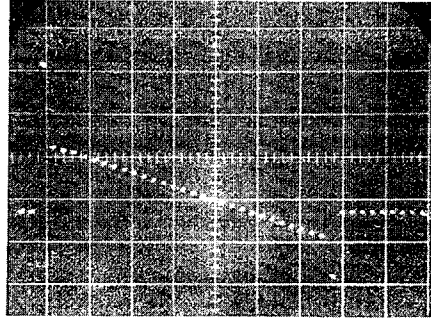


Fig. 7b  
200 mV/div.

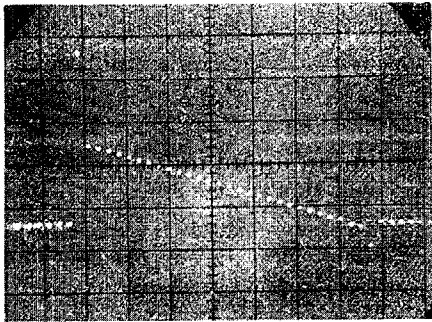


Fig. 7c  
100 mV/div.

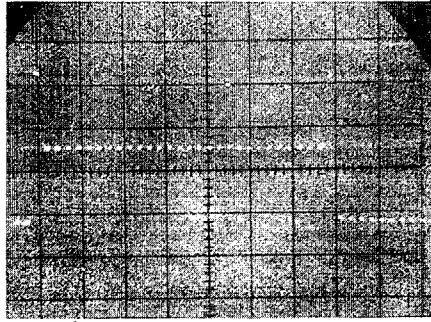


Fig. 7d  
50 mV/div.

Sur les figures 8a et suivantes, représentant les courbes du module du gain complexe  $G(\nu)$  de ces filtres, on peut remarquer une identité de forme pour



Fig. 8a

$T = 7,5 \text{ s}$

Prédiction :  $\frac{T}{2}$

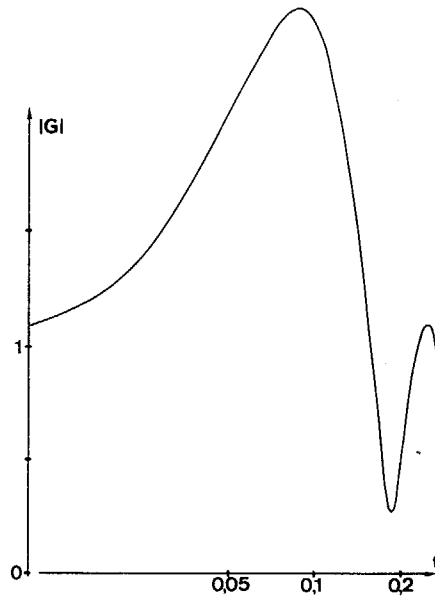


Fig. 8b

$T = 7,5 \text{ s}$

Retard : 0

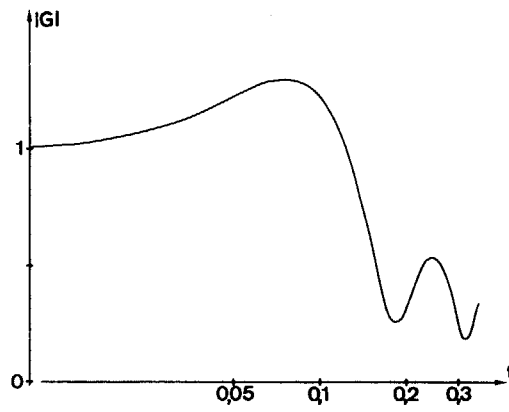


Fig. 8c

$T = 7,5 \text{ s}$

Retard :  $\frac{T}{4}$

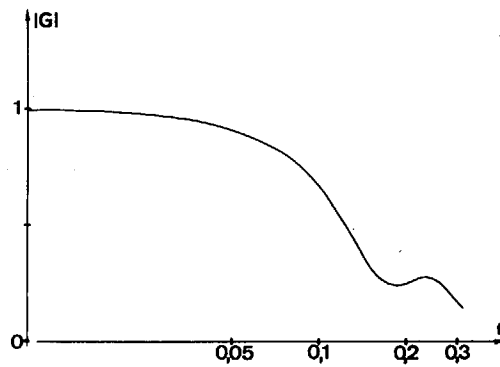






Fig. 8d

$$T = 7,5 \text{ s}$$

$$\text{Retard} : \frac{T}{2}$$

--- Intégrateur

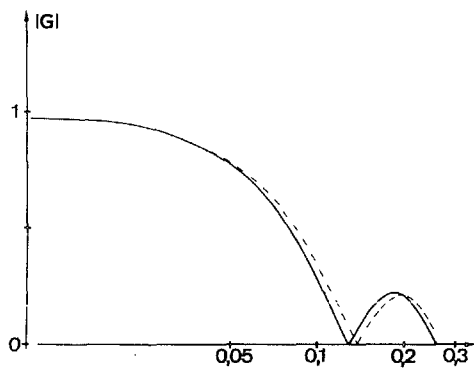


Fig. 8e

$$T = 7,5 \text{ s}$$

$$\text{Retard} : \frac{3T}{4}$$

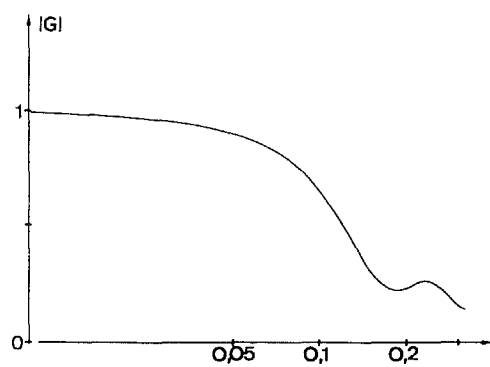
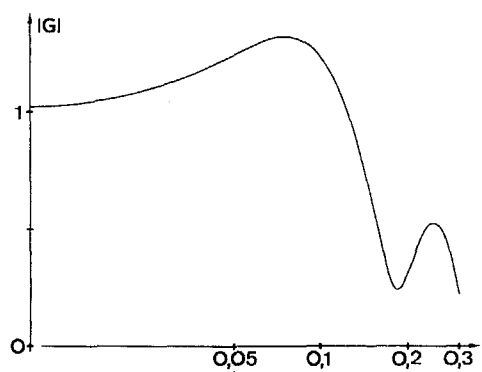


Fig. 8f

$$T = 7,5 \text{ s}$$

$$\text{Retard} : T$$





les valeurs  $\ell\Delta T$  symétriques par rapport à  $\frac{T}{2}$

#### 4.3 Cas des polynômes de 2e degré

De même que ci-dessus on a vérifié, pour une valeur de  $T$ , la loi de variation de  $\varepsilon^2$  en fonction de  $\ell$  (fig. 9)

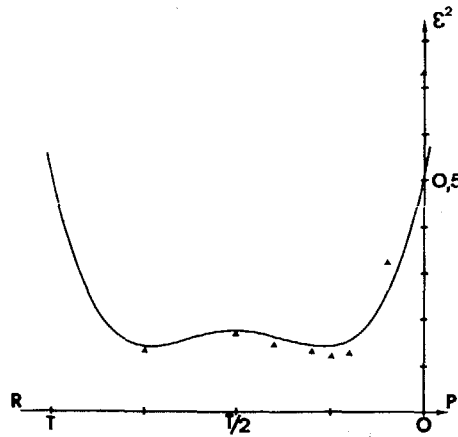


Fig. 9  $T = 10$  s

Les figures 10a et suivantes représentent la forme de la réponse percussionnelle pour différentes valeurs de  $\ell\Delta T$ , les figures 11 donnant les courbes du module du gain

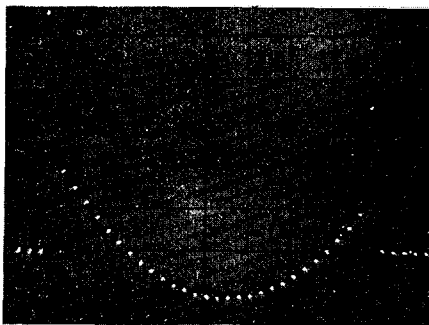


Fig. 10a  $\ell\Delta T = -\frac{T}{2}$   
500 mV/div.

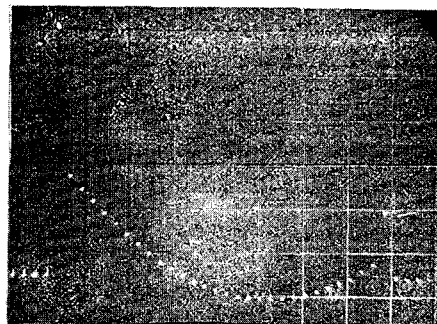


Fig. 10b  $\ell\Delta T = 0$   
200 mV/div.



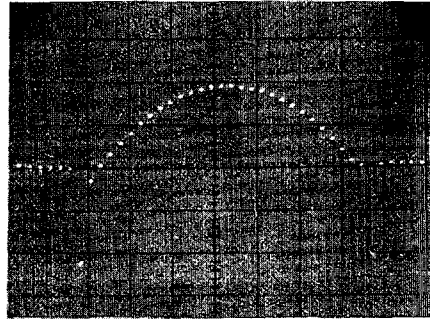
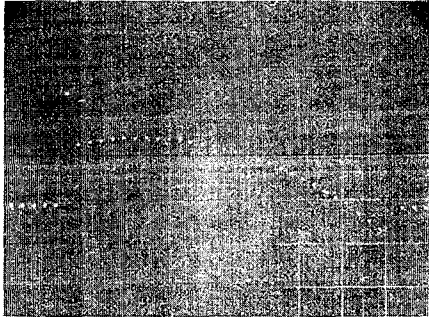


Fig. 10c

$$\ell\Delta T = \frac{T}{4}$$

$T = 10 \text{ s}$

Fig. 10d

$$\ell\Delta T = \frac{T}{2}$$

Fig. 11a

$T = 10 \text{ s}$

Retard = 0

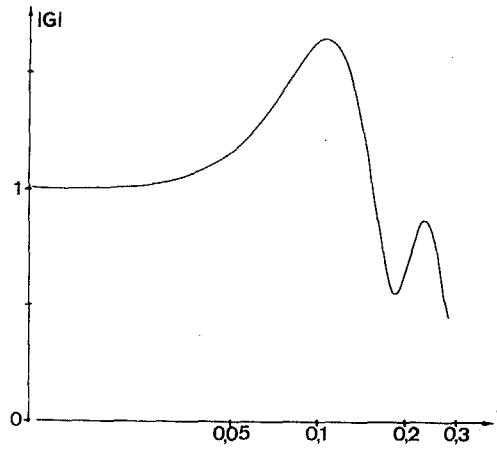


Fig. 11b

$T = 10 \text{ s}$

Retard =  $\frac{T}{4}$

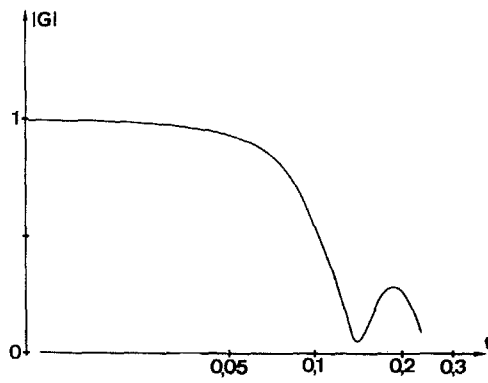




Fig. 11c  
T = 10 s  
Retard =  $\frac{T}{2}$   
--- Intégrateur

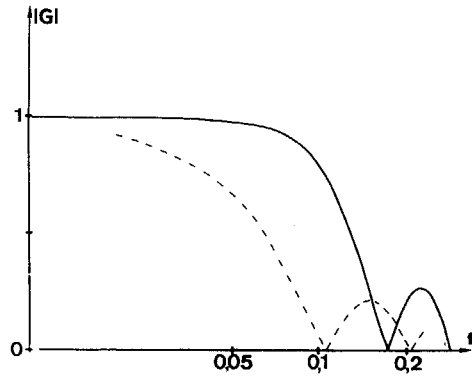


Fig. 11d  
T = 10 s  
Retard =  $\frac{3T}{4}$

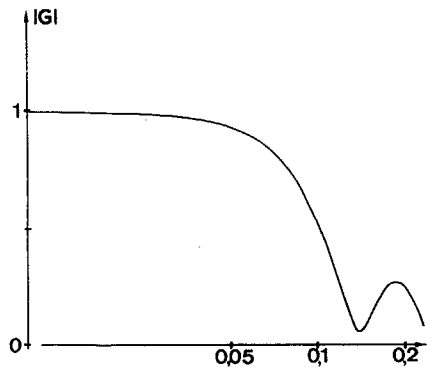
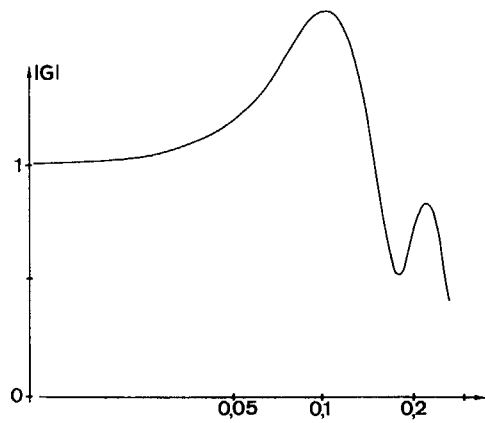


Fig. 11e  
T = 10 s  
Retard = T





Sur la figure 12 sont reportés deux oscillogrammes montrant l'allure des bruits échantillonnés, à l'entrée et à la sortie du filtre, pour deux valeurs de  $l\Delta T$ .

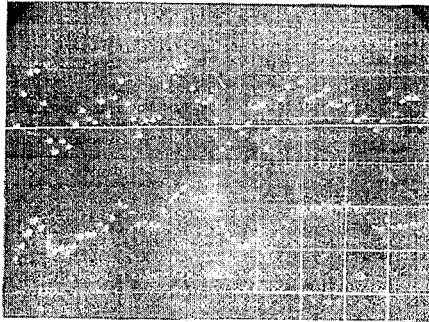


Fig. 12a  
Retard = 0

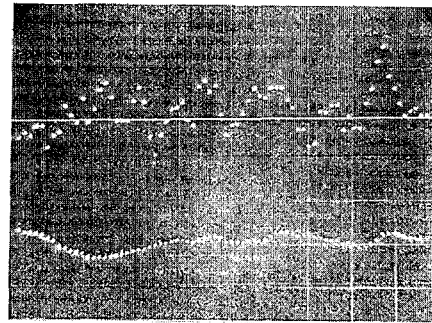


Fig. 12b  
Retard =  $\frac{T}{4}$

Une série de tests, dont les résultats sont figurés en 13, a été effectuée sur une fonction d'entrée du second degré et en l'absence de bruit.

La figure 13a correspond au cas où le retard est nul. On note, après extinction du transitoire de durée  $T$ , la parfaite concordance entre l'entrée représentée en trait continu et la sortie représentée en pointillés.

En 13b le retard est de  $\frac{T}{2}$ . Après la phase transitoire la sortie (pointillés) correspond bien à l'entrée retardée de  $\frac{T}{2}$  (trait interrompu).

En 13c le filtre est prédictif (avance  $\frac{T}{2}$ ). On remarque un transitoire très accentué, suivi de la



---

coïncidence entre la sortie (pointillée) et l'entrée avancée de  $\frac{T}{2}$  (trait interrompu).

Enfin en 13d est représenté le résultat du filtrage d'une fonction parabolique par un intégrateur. A la fin du transitoire, le retard est voisin de  $\frac{T}{2}$ , ensuite on remarque une nette divergence entre la sortie et l'entrée retardée.

Fig. 13a

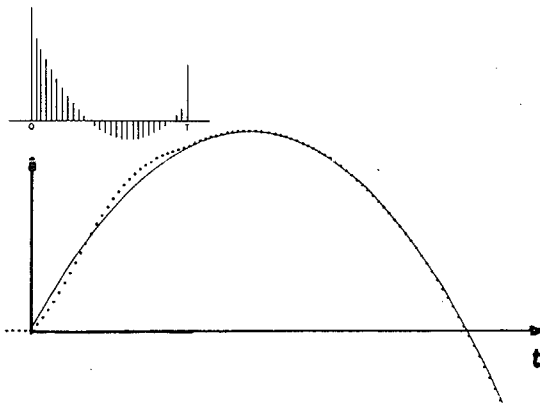


Fig. 13b

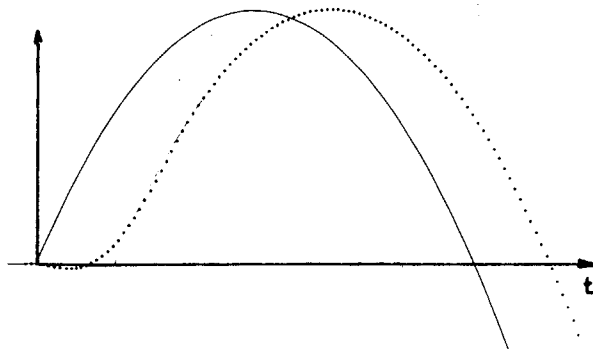




Fig. 13c

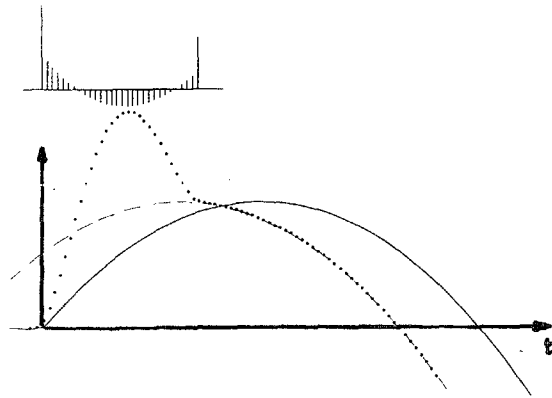
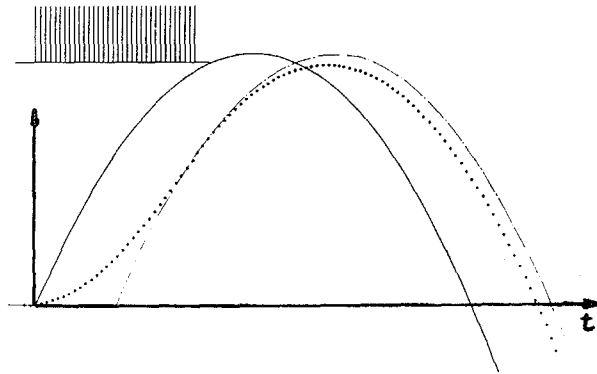


Fig. 13d





Remarque : Cas asymptotique : bruit à corrélation microscopique.

Dans ce cas, la forme de la réponse percussionnelle est donné en 14a pour  $\ell\Delta T = 0$  et 14b pour  $\ell\Delta T = T/4$ , la figure 15 représentant les bruits échantillonnés à l'entrée et à la sortie pour ces deux retards.

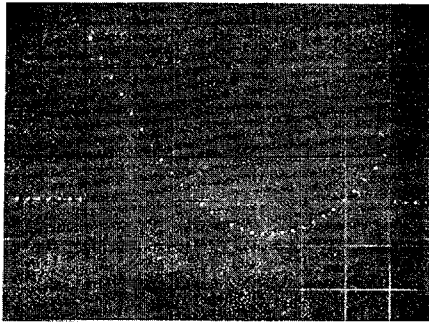


Fig. 14a

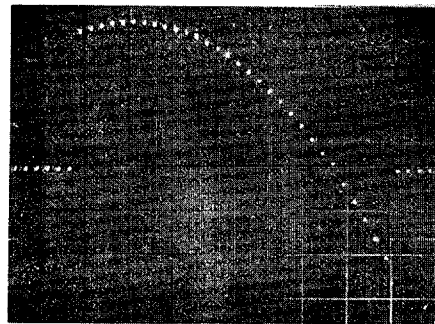


Fig. 14b

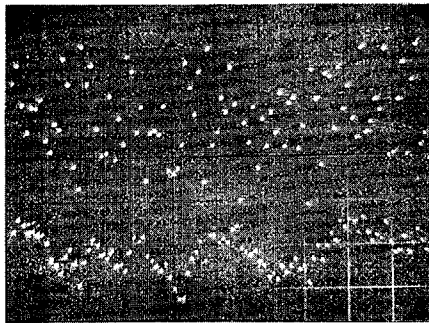


Fig. 15a

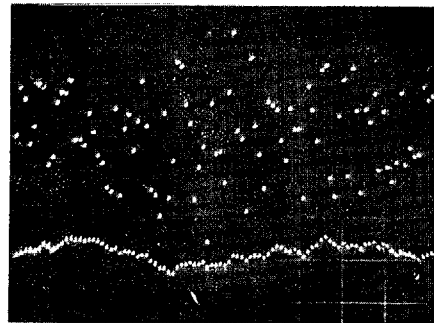


Fig. 15b

#### 4.3 Cas des polynômes du 3e degré

Quelques tests ont été effectués pour ce type de filtre.

- Mesure de  $\mathcal{E}^2$  en fonction de  $\ell$  (Fig. 16)
- Relevé des réponses percussionnelles pour  $\ell\Delta T = 0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}$  (Fig. 17)



- $|G(\nu)|$  pour  $l\Delta T = 0$  (Fig. 18)
- Bruits échantillonnés à l'entrée et à la sortie du filtre (Fig. 19) pour  $l\Delta T = 0, \frac{T}{4}$  et  $\frac{T}{2}$ .

Fig. 16

T = 12 s

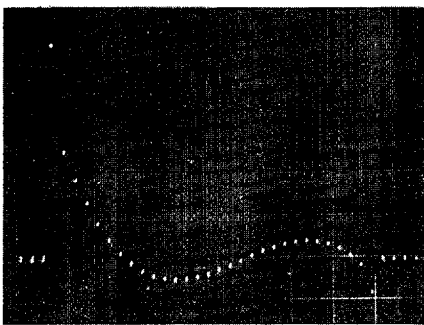
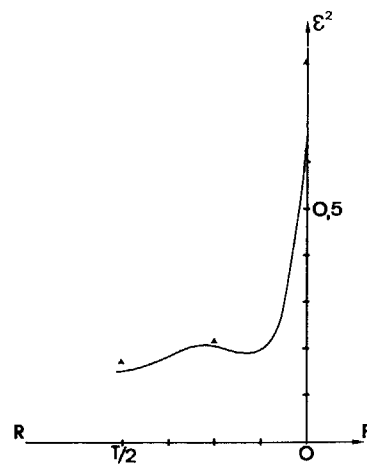


Fig. 17a = 0

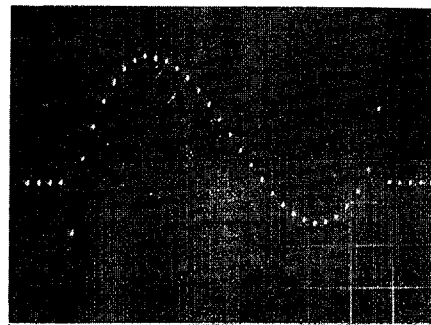
Fig. 17b =  $\frac{T}{4}$ 

Fig. 17c

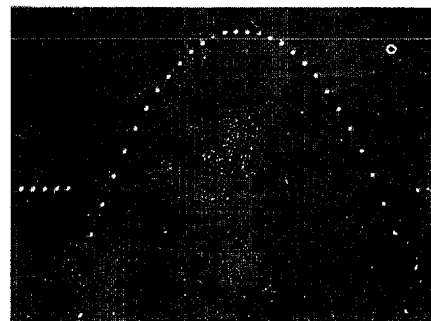
=  $\frac{T}{2}$ 



Fig. 18

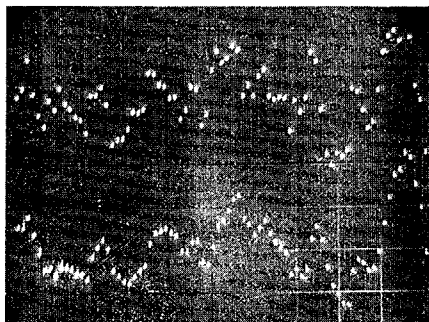
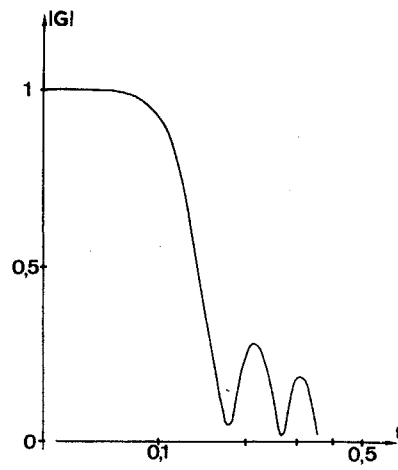


Fig. 19a = 0

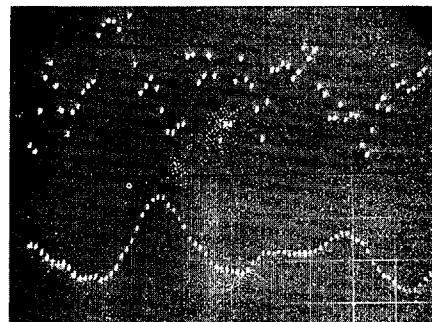


Fig. 19b =  $\frac{T}{4}$

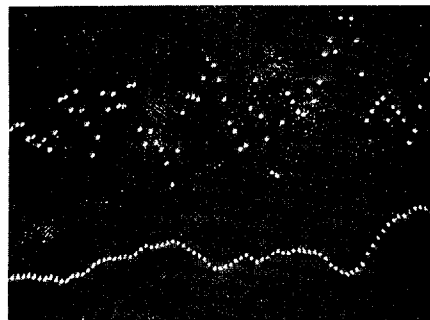


Fig. 19c =  $\frac{T}{2}$





#### 4.4 Filtre intégrateur - bruit à corrélation microscopique

La figure 20 représente la réponse percussive de ce filtre, la figure 21 les bruits échantillonnés à l'entrée et à la sortie.

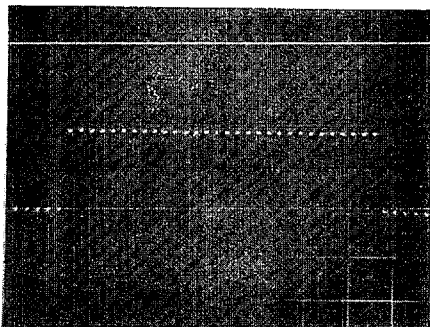


Fig. 20

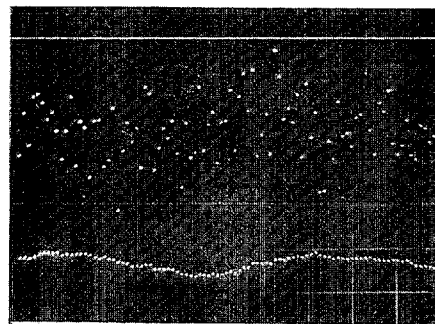


Fig. 21

On a vérifié (Fig. 22) la loi de variation de  $\varepsilon^2$  en fonction du nombre de distributions de DIRAC constituant la réponse percussive du filtre intégrateur. On a constaté que  $\varepsilon^2$  est égale à  $\frac{1}{N}$  quelle que soit la durée T du support.

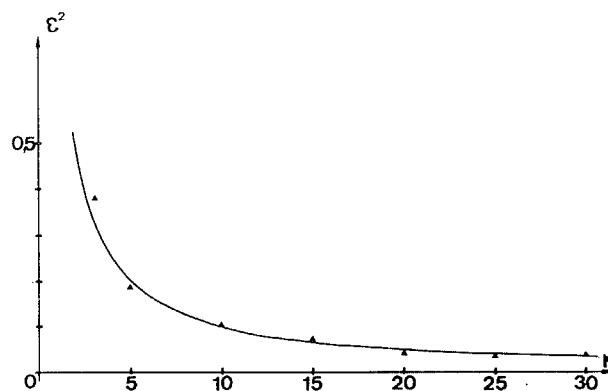


Fig. 22



---

## 5. CONCLUSION

La confrontation des résultats expérimentaux et numériques a montré la validité du dispositif.

Cet instrument, sans prétendre rivaliser avec les moyens de traitements numériques, est d'un grand intérêt : de volume réduit et de mise en oeuvre simple il offre à l'expérimentateur des possibilités de réglages souples et de contrôles immédiats.

Des perfectionnements technologiques visant à améliorer ses performances et à accroître ses caractéristiques d'utilisation ont été entrepris et laissent présager un développement intéressant de cet appareil.

## 6. BIBLIOGRAPHIE

- [1] L.A. ZADEH - J.R. RAGAZZANI - An extension of Wiener's Theory of prediction - Journal of Applied Physics - Vol. 21, p. 645 juillet 1950.
- [2] H. LANNING - R. BATTIN - Random processes in automatic control - Mc Graw Hill book Company Inc. 1956 - p. 300-305.
- [3] W. GOSLING - Application des transistors à effet de champ - Traduction Dunod 1966.
- [4] J. DANLOUX - DUMESNILS - Le calcul analogique en courant continu - Dunod 1958.