



TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1<sup>er</sup> au 5 juin 1971

---

SYSTEMES DE NAVIGATION HYBRIDES OPTIMAUX

1<sup>ere</sup> partie : Méthodologie (P. FAURRE)

2<sup>eme</sup> partie : Système Expérimental (L. CAMBERLEIN)

P. FAURRE (•), L. CAMBERLEIN, M. VIEVILLE

SAGEM, 6 avenue d'Iéna, 75 - PARIS (16e)

• Egalement : Centre d'Automatique de l'Ecole des Mines et IRIA.

---

**RESUME**

Les diverses étapes de la conception d'un système optimal de traitement d'informations sont présentées : modélisation, étude des performances et de la sensibilité, mécanisation, programmation et tests.

On décrit ensuite le système de navigation hybride optimal réalisé à la SAGEM à partir d'un navigateur par inertie, les informations redondantes étant des recalages en position et un Doppler.

**SUMMARY**

We present the different steps of the design of an optimal data processing system : modelisation, performance and sensitivity studies, mechanization, programming and test.

Then, an optimal hybrid navigation system built by SAGEM is described. This experimental system integrates the redundant informations from an inertial navigator, a Doppler radar and from position updatings.



SYSTEMES DE NAVIGATION HYBRIDES OPTIMAUX  
METHODOLOGIE ET SYSTEME EXPERIMENTAL

---

INTRODUCTION

Concevoir un système de navigation hybride optimal, c'est essentiellement résoudre un problème d'utilisation optimale d'information, problème posé depuis fort longtemps en sciences et en techniques, et moteur essentiel pour le développement du calcul des probabilités et de la statistique.

Il y eut de nombreux précurseurs illustres dont Gauss, Laplace... ; il fallut attendre cependant les années 40 pour que les besoins en systèmes d'armes et systèmes de communication à hautes performances conduisent Shannon {1} et Wiener {2} à effectuer des travaux fondamentaux dans ce domaine. Mais l'on peut considérer que c'est grâce au développement des moyens de calcul numérique d'une part et à l'introduction par Kalman {3} - {5} de méthodes récursives de filtrage statistique d'autre part que l'on a pu envisager à partir des années 60 de construire des systèmes optimaux fonctionnant en temps réel.

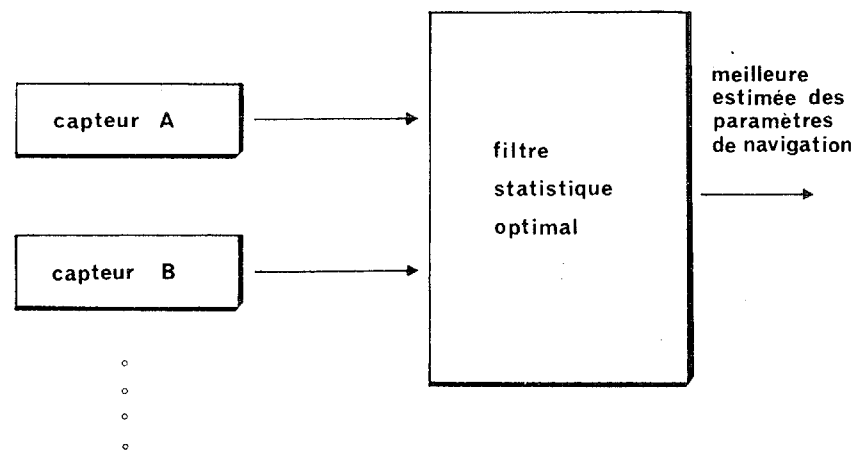
Envisageons alors de ce point de vue le problème de la navigation : il consiste à déterminer les paramètres fondamentaux que sont la position, la vitesse et l'attitude (cap et verticale) d'un véhicule. Pour cela, divers capteurs ou systèmes peuvent être utilisés :

- système de navigation par inertie fournissant l'ensemble des paramètres,
- Doppler, loch, fournissant la vitesse sur les axes du véhicule,
- aides radioélectriques à la navigation (VOR-DME, LORAN, OMEGA, satellites) fournissant après traitement une information de position,
- visées astrales,
- cap magnétique,
- nombre de tours des moteurs, etc...



---

Chaque capteur fournit tout ou partie des paramètres de navigation avec des caractéristiques d'erreur très différentes. Un système de navigation hybride optimal est alors un système qui tient compte de façon optimale de ces informations pour déterminer à chaque instant la meilleure estimée des paramètres de navigation. La structure d'un tel système est donnée sur la figure 1.



**Figure 1 - Système de navigation optimal**

Nous allons présenter d'abord la méthodologie à utiliser pour la conception d'un tel système à l'aide d'un filtre de Kalman, puis un système expérimental qui a été réalisé par la SAGEM pour tester ces idées.

La présentation sera bien sûr rapide et nous renvoyons à {6} les lecteurs désireux d'approfondir le sujet.



---

Première Partie

METHODOLOGIE

1. Généralités

Une méthode d'estimation récursive d'un paramètre à partir d'observations  $y_n$  est de la forme

$$\hat{x}_n = f(\hat{x}_{n-1}, y_n) \quad (1)$$

où  $\hat{x}_n$  est la meilleure estimée de  $x$  compte tenu des observations  $y_1, y_2, \dots, y_n$ .

La formule est dite récursive car la nouvelle estimée  $\hat{x}_n$  est fonction seulement de l'observation présente  $y_n$  et de l'ancienne estimée  $\hat{x}_{n-1}$ , et ne fait pas intervenir explicitement les anciennes observations  $y_{n-1}, y_{n-2} \dots$ . On voit immédiatement combien une telle formule est adaptée au calcul numérique en temps réel.

R.E. Kalman [3] a montré qu'il existe des formules d'estimation récursives linéaires si l'on cherche à estimer un processus gaussien-markovien  $x(t)$  à partir d'observations  $y$  dépendant linéairement de  $x$  et éventuellement bruitées par un bruit blanc. Il s'agit donc de donner une telle représentation markovienne au problème posé.

Lorsque le modèle est obtenu, il convient de simuler les performances du système optimal. Cette simulation consiste essentiellement à intégrer l'équation de Riccati du filtre optimal qui donne la covariance des erreurs d'estimation et par conséquent les performances du système optimal.

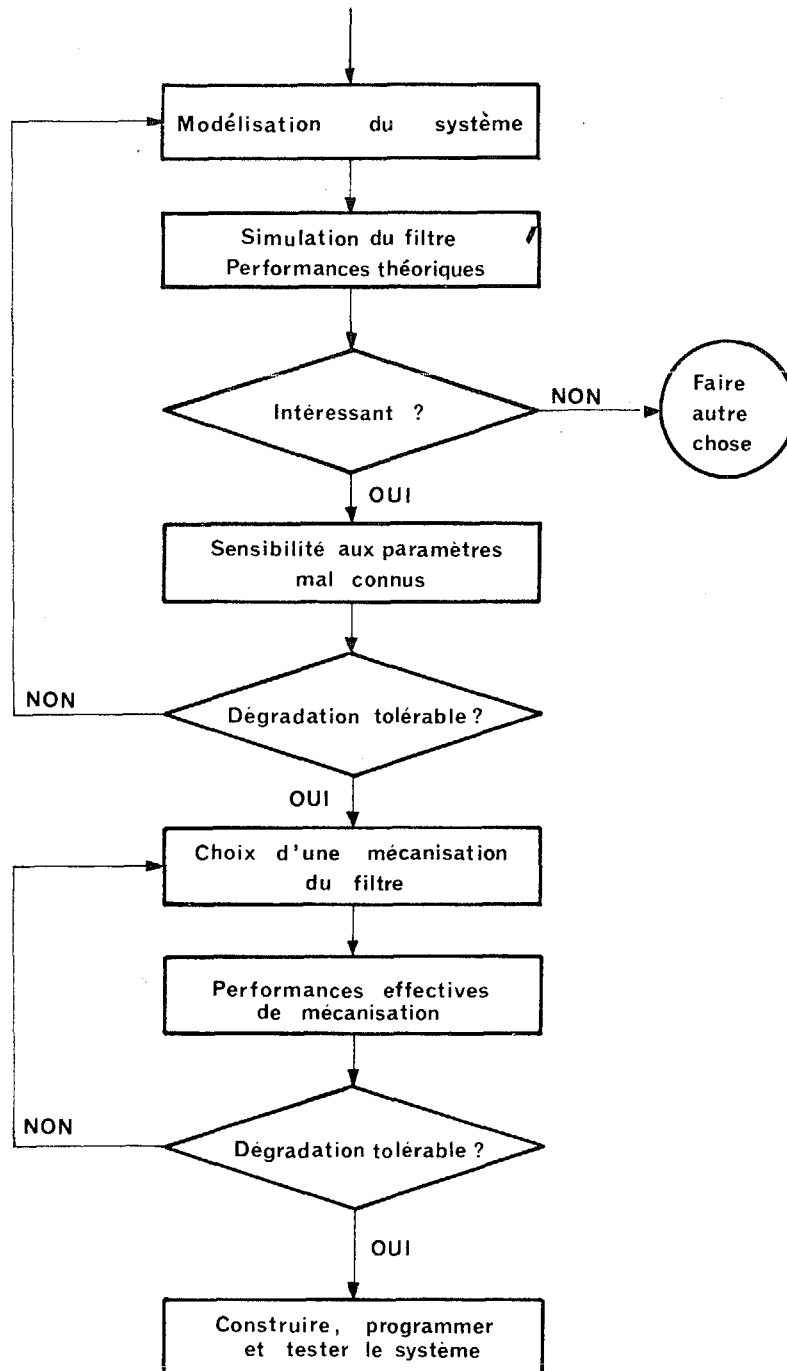


Figure 2 - Synthèse d'un filtre optimal



---

Dans la réalité cependant, le modèle mathématique n'est pas connu parfaitement. Le problème pratique important est celui de la sensibilité du filtre : quelles dégradations de performances sont entraînées par la mauvaise adaptation du filtre aux lois statistiques des paramètres traités ? Suivant les cas, les effets peuvent être faibles ou au contraire désastreux.

Enfin, la programmation du filtre peut poser certains problèmes. Le filtre optimal consiste essentiellement à intégrer l'équation de Riccati en même temps que l'équation générant la meilleure estimée  $\hat{x}(t)$  de  $x(t)$ .

Il se peut que le volume de calcul correspondant soit trop important et que l'on envisage une simplification des calculs par omission des termes qui semblent insignifiants ou par d'autres méthodes. Il convient dans ce cas de contrôler les dégradations de performances correspondant à ces simplifications.

Enfin, la programmation et la mise au point d'un programme qui peut faire quelques milliers d'instructions, ne sont pas toujours aisées. Il est nécessaire de faire appel à des méthodes de test évoluées, d'autant plus que la fiabilité recherchée est grande.

La démarche qui vient d'être décrite pour la conception d'un système de traitement optimal d'informations est résumée par l'organigramme de la figure 2. Dans les paragraphes suivants nous envisageons plus en détail quelques points et surtout nous donnerons des références.

## 2. Modélisation

Nous avons déjà dit qu'il était indispensable de donner au problème une représentation gaussienne-markovienne.



Etant donné qu'un processus gaussien-markovien n'est rien d'autre que l'état d'un système linéaire excité par un bruit blanc, il convient donc de donner au problème d'utilisation optimale d'informations que l'on cherche à traiter, le modèle suivant :

$$\dot{x} = F(t) x + v(t) \quad (3)$$

$$y(t) = H(t) x(t) + w(t) \quad (4)$$

$$v(t) = \text{bruit blanc}, \quad \begin{aligned} E\{v(t)\} &= 0 \\ E\{v(t) v'(s)\}^* &= Q(t) \delta(t-s) \end{aligned} \quad (5)$$

$w(t)$  = bruit blanc discret (i) ou continu (ii) suivant que les observations sont échantillonnées ou continues ; suivant le cas :

$$\begin{aligned} \text{i) } E\{w(t_i)\} &= 0 \\ E\{w(t_i) w'(t_j)\} &= R(t_i) \delta_{ij} \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } E\{w(t)\} &= 0 \\ E\{w(t) w'(s)\} &= R(t) \delta(t-s) \end{aligned} \quad (7)$$

Mais comment obtient-on ce modèle ?

Plusieurs cas se présentent :

- a) utilisant les lois de la physique, la mise en équation du problème conduit à un modèle de la forme (3) et (4).
- b) ayant conduit une expérimentation statistique et ayant fait un traitement statistique des enregistrements, on a une estimation de la fonction de corrélation de  $y$  (supposé ici stationnaire) :

$$\phi_y(\tau) = E\{y(t + \tau) y'(t)\} \quad (8)$$

---

\*  $v'$  désigne la matrice transposée de  $v$ .



Il existe alors des méthodes permettant de déterminer un modèle du type (3)-(4) à partir de (8) : c'est le problème dit de la réalisation stochastique. Une méthode consiste à factoriser le spectre, c'est à dire la transformée de Laplace de (8). D'autres méthodes plus récentes et plus adaptées au calcul numérique sont exposées dans {7} et {8}.

- c) En pratique, on se trouve dans un cas intermédiaire entre a) et b).

Des équations de la physique on déduit un modèle du type

$$\dot{x}_1 = F_1 x_1 + G_1 u_1 \quad (9)$$

$$y = H_1 x_1 + w_1 \quad (10)$$

mais les bruits  $u_1$  et  $w_1$  ne sont pas blancs. Il convient alors d'appliquer à  $u_1$  et  $w_1$  une méthode du cas b) pour obtenir une représentation markovienne du problème en augmentant le vecteur d'état  $x_1$ . C'est le cas des modèles utilisés pour représenter les systèmes de navigation hybride.

### 3. Simulation et sensibilité

Le modèle markovien (3)-(4) étant donné, l'algorithme de filtrage optimal consiste en les équations suivantes :

#### i) Cas d'observations échantillonnées

- entre deux observations

$$\dot{\hat{x}} = F(t) \hat{x} \quad (11)$$

$$\dot{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' + Q \quad (12)$$

- à l'instant d'une observation

$$\hat{x}_+ = \hat{x}_- + \Sigma_- H' (H\Sigma_- H' + R)^{-1} (y - H\hat{x}_-) \quad (13)$$

$$\Sigma_+ = \Sigma_- - \Sigma_- H' (H\Sigma_- H' + R)^{-1} H\Sigma_- \quad (14)$$



ii) Cas d'observations continues

$$\dot{\hat{x}} = F\hat{x} + \Sigma H' R^{-1} (y - H\hat{x}) \quad (15)$$

$$\dot{\Sigma} = F\Sigma + \Sigma F' - \Sigma H' R^{-1} H\Sigma + Q \quad (16)$$

La matrice  $\Sigma(t)$  qui intervient dans ces équations n'est rien d'autre que la matrice de covariance de l'erreur du filtre :

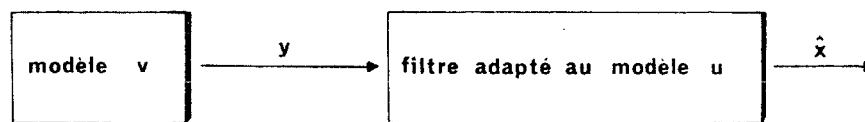
$$\Sigma(t) = E \{ \tilde{x}(t) \tilde{x}'(t) \} \quad (17)$$

avec 
$$\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (18)$$

Pour simuler les performances du système optimal, il faut donc intégrer numériquement (9) l'équation de Riccati discrète (12)-(14) ou continue (16) suivant les cas. On obtient ainsi les variances des différentes erreurs.

Le modèle (3)-(4) n'étant jamais connu parfaitement car les expérimentations statistiques peuvent coûter très cher dans certains cas, il convient d'étudier la sensibilité du filtre aux paramètres mal connus. Afin d'analyser la sensibilité, on est conduit à introduire deux modèles (figure 3) :

- le modèle  $v$  ou modèle vrai caractérisé par les matrices  $H_v$ ,  $F_v$ ,  $Q_v$ ,  $R_v$  en général inconnues,
- le modèle  $u$  ou modèle utilisé dans le filtre.



**Figure 3 - Le problème de la sensibilité**



---

Les performances de l'estimation ainsi réalisée ne sont pas obtenues par intégration de l'équation de Riccati correspondant au modèle  $v$  ou au modèle  $u$  car il n'y a plus adaptation du filtre à la statistique des signaux traités. Il est utile de faire appel à des méthodes spéciales pour calculer la sensibilité, c'est à dire la dégradation de performances due à cette mauvaise adaptation. Nous renvoyons à [6] pour l'exposé de ces méthodes.

#### 4. Mécanisation et tests de mise au point

La mécanisation du filtre, c'est à dire la réalisation effective de l'algorithme (11)-(16), soulève plusieurs questions :

- Choix d'une méthode numérique et d'un pas d'intégration : les deux contraintes essentielles sont que les calculs doivent être faits en temps réel et de façon économique ; à ce sujet [9] est une bonne référence ; il peut être envisagé d'utiliser le calcul parallèle pour accélérer l'intégration.
- Détermination de la longueur des mots utilisés et choix entre virgule fixe et virgule flottante.

Afin de pouvoir résoudre les deux questions précédentes il convient pour un choix donné de tester les dégradations de performances par la méthode de sensibilité appropriée. En effet, les erreurs numériques, interprétées comme un bruit supplémentaire, correspondent à une mauvaise adaptation entre filtre et modèle.

Il est très fréquent qu'une partie des calculs -ceux qui correspondent à la covariance- soient à faire en virgule flottante, ceci étant dû aux variations importantes dans la précision d'estimation des paramètres en cours de fonctionnement entraînant une variation correspondante et amplifiée dans la covariance.



---

Le test d'un système avec filtre numérique optimal n'est pas aisé. Le programme peut en effet comporter quelques milliers d'instructions. Deux types de méthodes sont envisageables :

- méthodes de test hors ligne (off line) par signaux caractéristiques : le filtre étant un système linéaire, on vérifie sa réponse à des signaux types (réponse impulsionnelle par exemple).
- méthodes de test dynamique en ligne (on line) : il est facile de voir que si le filtre est bien adapté à son modèle, le signal

$$v(t) = y(t) - H\hat{x}(t)$$

doit être un bruit blanc (innovation du processus). Par conséquent, on peut effectuer un test statistique d'hypothèse sur  $v(t)$  en cours de fonctionnement pour vérifier que  $v(t)$  est bien un bruit blanc {10}. Cette approche peut permettre d'ailleurs une auto-adaptation du filtre aux lois statistiques.



---

## Deuxième Partie

### SYSTEME DE NAVIGATION OPTIMAL EXPERIMENTAL

#### 5. Généralités

Cette expérimentation a été réalisée dans le cadre d'un marché d'étude financé par le Service Technique Aéronautique. L'objectif visé était la définition d'un système de navigation pour avion d'armes de hautes performances.

Le système de navigation hybride expérimenté intègre les informations redondantes d'un système à inertie, d'un radar Doppler, de recalage de position à partir de moyens divers et d'une centrale barométrique. Les trois premières informations sont traitées par un filtre de Kalman, la dernière est utilisée de façon classique.

Après la description des équipements, on présente le modèle markovien du système hybride -choisi après l'étude de performance et de sensibilité- les caractéristiques des programmes de filtrage, les difficultés rencontrées dans la réalisation pratique du filtrage, les méthodes de mise au point utilisées et les résultats des premiers essais au sol réalisés au moment de la rédaction de cet exposé.

#### 6. Description de l'installation d'essais

##### 6.1 Les équipements (Hardware)

La figure 4 décrit le schéma de l'installation expérimentale montée sur la Caravelle du Centre d'Essais en Vol de Brétigny.



---

La base de l'installation est un système de navigation à inertie prototype dont la technologie date de 1965-1966. C'est un système en plusieurs boîtes, dont les performances de navigation sont de la classe 1,5 NM/H, CEP. Ce système, étudié pour avion d'armes, possède un calculateur numérique embarqué relativement puissant, tout au moins considéré comme tel à l'époque de sa sortie : le temps d'addition est de 39  $\mu$ s et la capacité mémoire d'environ 8 kilo-mots de 24 bits. Les fonctions programmées de façon standard dans ce calculateur sont nombreuses et comprennent la conduite de la plateforme en alignement et navigation, des couplages classiques accéléromètre de verticale-altitude barométrique et inertie - Doppler, la navigation automatique le long d'une trajectoire définie par points tournants, le recalage simple de position et la conduite des visualisations et des commandes du système.

La puissance de calcul et la mémoire, qui restaient disponibles, étaient insuffisantes pour les besoins du filtre de Kalman. On choisit d'ajouter un calculateur identique. On définissait ainsi une structure de calcul parallèle. Le dialogue entre les deux calculateurs se fait par l'intermédiaire d'une mémoire tampon de 600 bits en technologie MOS. Les calculateurs fonctionnent de façon asynchrone sur le principe "maître-esclave". Le calculateur 1, celui du système à inertie, est le maître. Il définit le rythme général des calculs et des échanges avec le calculateur 2, l'esclave.

Le radar Doppler, qui fournit l'information redondante de vitesse, est un Doppler moderne à antenne fixe. Il donne les composantes longitudinale et transversale de la vitesse sol sous forme de fréquences d'impulsions. Son domaine d'utilisation est principalement fonction de l'assiette avion, de l'altitude et de la nature de la zone survolée, terre ou mer.

L'altitude est donnée par la centrale aérodynamique du bord dont le traducteur de pression est du type mécanique classique.

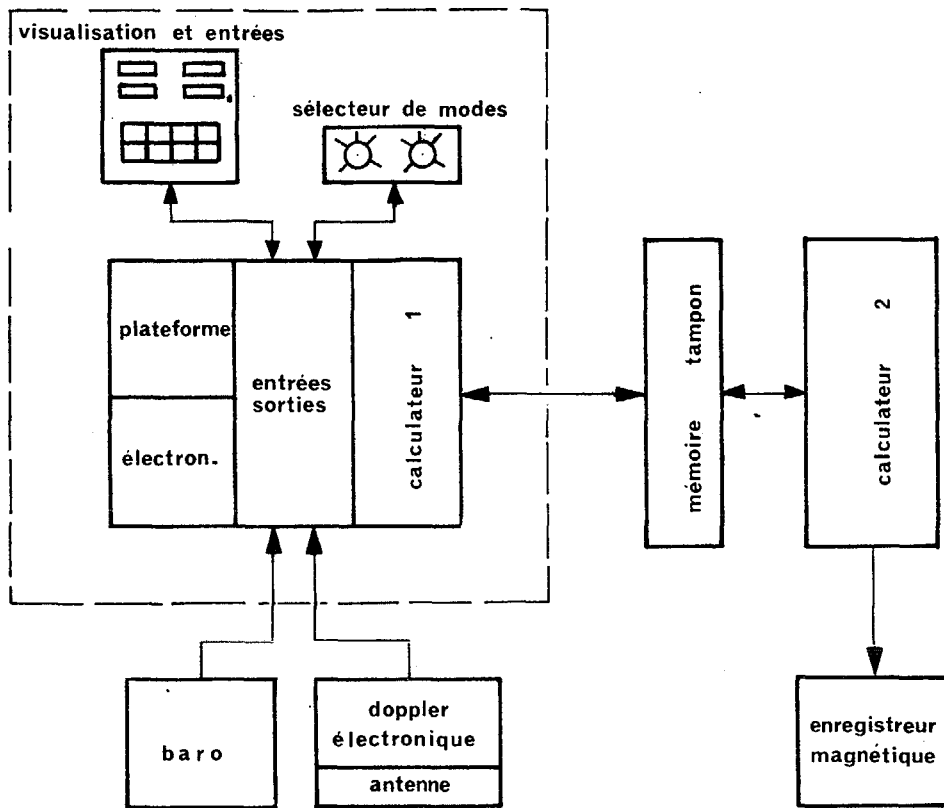


Figure 4 - Installation en essais sur Caravelle au CEV

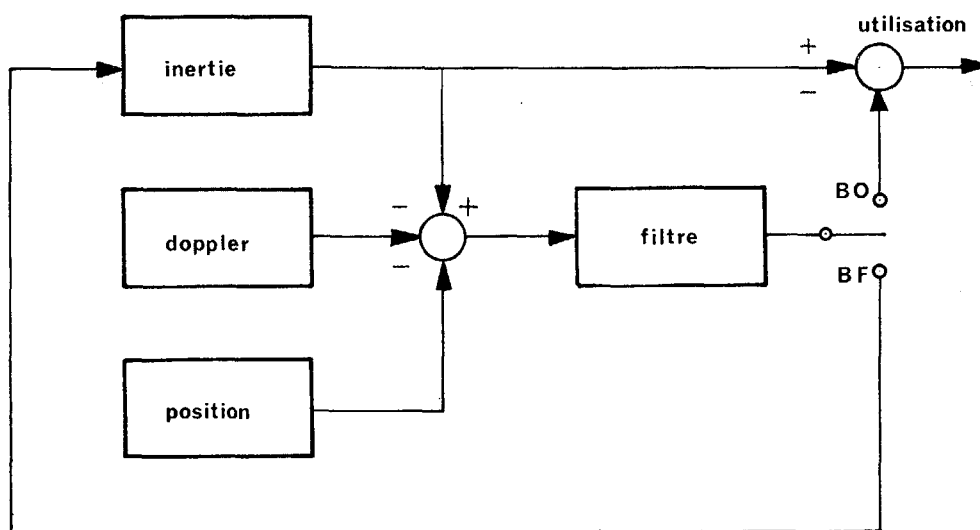


Figure 5 - Fonctionnement en boucle ouverte ou fermée



---

Les recalages de position sont effectués au moyen du boîtier de visualisation et d'entrées numériques du système à inertie. Ils sont faits à partir de moyens divers en particulier un hyposcope. La visualisation permet également l'affichage de la position donnée par l'inertie et de son estimée donnée par le filtre.

Le calculateur 2 est connecté à un enregistreur magnétique embarqué qui toutes les 50 secondes emmagasine les 124 paramètres les plus significatifs du fonctionnement du filtre.

Les caractéristiques générales des principaux équipements sont données par les tableaux 1 à 3.

## 6.2 Les modes de fonctionnement

### - Modes de navigation

La redondance des informations de l'inertie, du Doppler et du recalage de position est utilisée pour définir plusieurs modes de navigation :

- a) inertie pure
- b) inertie-recalage de position optimal
- c) inertie-Doppler optimal
- d) inertie-Doppler-recalage de position optimal

### - Boucle ouverte et boucle fermée - Alignement en vol

Un sélecteur permet de commander pour les modes b, c et d, un fonctionnement en boucle ouverte (BO) ou en boucle fermée (BF), qui est schématisé par la figure 5.



- . Technologie (1965)
  - circuit intégré
  - mémoire à tambour miniature à palier hydrodynamique
- . Capacité mémoire 8 709 mots de 24 bits
  - programme non modifiable : 7 680 mots
  - travail : 645 mots
  - système : 384 mots
- . Structure série parallèle comprenant
  - une unité arithmétique universelle
  - un analyseur différentiel numérique
- . Opération en virgule fixe
- . Possibilité de programmer 2 opérations simultanées
- . Horloge : 640 kHz
- . Temps opératoire
  - addition : 39  $\mu$ s
  - multiplication : 39  $\mu$ s
  - division (sur 24 bits) : 1000  $\mu$ s (programmation simultanée d'opérations toutes les 39  $\mu$ s)
- . Entrée/sortie programmée, série
- . Poids : 21 kg
- . Volume 3/4 ATR : 18 l.

**Tableau 1 - Calculateur embarqué Sagem  
AE.51.A**





---

Dans le fonctionnement en boucle ouverte, les paramètres de navigation et d'attitude sont corrigés à l'extérieur, avant utilisation, le système à inertie reste autonome.

Dans le fonctionnement en boucle fermée, certaines composantes du vecteur d'état sont corrigées dans le système à inertie. En toute rigueur, cette correction devrait être faite sans retard et instantanément. En pratique, compte tenu de la charge de calcul, la correction est effectuée avec environ un demi pas de retard (26 s). Suivant les paramètres, la correction est

- . instantanée, pour les grandeurs numériques de position, vitesse, dérives et facteurs d'échelle des gyroscopes,
- . progressive, pour l'attitude plateforme, par commande des gyroscopes dont la vitesse de précession est limitée.

Le fonctionnement en boucle fermée permet en particulier l'alignement en vol de la plateforme. En outre, dans certains cas le contrôle des erreurs inertielles peut être nécessaire pour satisfaire l'hypothèse de linéarité. Cependant, le fonctionnement en boucle fermée a l'inconvénient de détruire l'autonomie du système à inertie et de dégrader ainsi la fiabilité de ses informations.

#### - Utilisation de l'information barométrique

L'information d'altitude barométrique n'est pas intégrée par le filtre, pour des raisons de simplicité, car l'altitude n'est pas un paramètre critique. Cependant, on réalise un couplage à gain stationnaire avec l'accéléro vertical. Ce couplage fournit l'altitude et la vitesse verticale. Un sélecteur permet ou non de les utiliser dans la mécanisation du système à inertie et dans la matrice observation du filtre.



- . Système prototype pour avion d'armes
- . Technologie 1966
- . Gyroscopes flottants à un degré de liberté
- . Plateforme toute attitude à quatre axes de cardan
- . Calculateur universel digital AE 51 A
- . Mécanisation toute latitude asservie à un pôle arbitraire
- . Précision : de la classe de 1,5 NM/H, CEP.

**Tableau 2 - Système à inertie SAGEM - S. 111**

- . Antenne fixe à 3 faisceaux
- . Sortie en fréquence
  - vitesse longitudinale            35,02 Hz/noeud
  - vitesse latérale                    17,95 Hz/noeud

**Tableau 3 - Radar Doppler EMD . DECCA . 72**



## 7. Modèle markovien des erreurs du système hybride

Cette expérimentation a été précédée d'une étude importante suivant les étapes de la méthodologie qui a été présentée dans la première partie. Les études de performances et de sensibilité ont en particulier conduit à adopter le modèle markovien suivant des erreurs du système hybride

$$\dot{x} = Fx + v \quad (20)$$

avec  $x = \begin{Bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{Bmatrix} \quad (21)$

et où

$x_1$  est le vecteur d'état des erreurs dynamiques du système à inertie,

$x_2$  est le vecteur d'état des erreurs des composants du système à inertie,

$x_3$  est le vecteur d'état des erreurs du Doppler.

### a) Erreurs dynamiques du système à inertie

On a choisi la description classique [6] et [11] par deux systèmes d'équations différentielles projetées sur les axes plateforme : les équations en  $\psi$  et les équations d'erreurs de position. Cette description conduit aux équations les plus simples. Le vecteur d'état correspondant est

$$x_1 = \begin{Bmatrix} \psi_x, \psi_y, \psi_z, \delta x, \delta y, \delta \dot{x}, \delta \dot{y} \end{Bmatrix}' \quad (22)$$

où

$\psi_x, \psi_y, \psi_z$  désignent les rotations autour des axes plateforme faisant passer du repère calculateur, défini comme le trièdre géographique local du point calculé, au repère plateforme.



$\delta x, \delta y$  désignent les erreurs horizontales de position dans les axes plateforme.

$\dot{\delta x}, \dot{\delta y}$  désignent les dérivées temporelles de  $\delta x$  et  $\delta y$ .

b) Erreurs des composants inertiels

A la suite de l'étude de sensibilité les biais des accéléromètres et les balourds des gyroscopes ont été négligés. Les seules erreurs retenues sont les dérives et facteurs d'échelle des gyroscopes. Le modèle pris pour la dérive et suggéré par l'expérience est

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon} \quad (23)$$

où

$\bar{\varepsilon}$  est la dérive de jour à jour, constante au cours du vol,

$\tilde{\varepsilon}$  est la dérive aléatoire, variable au cours du vol, dont le modèle choisi est du premier ordre

$$\dot{\tilde{\varepsilon}} = -\beta \tilde{\varepsilon} + v \quad (24)$$

où  $v$  est un bruit blanc. Ce modèle permet de représenter aussi bien un signal à temps d'autocorrélation  $T = 1/\beta$ , qu'un cheminement aléatoire, si  $\beta = 0$ .

L'expérience conduit à considérer le facteur d'échelle comme constant au cours du vol et variable d'un jour à l'autre. Le modèle correspondant est donc

$$\dot{K}_g = 0 \quad (25)$$

Le vecteur d'état des erreurs de gyroscope s'écrit alors

$$x_z = \left\{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, K_{gx}, K_{gy}, K_{gz} \right\}^T \quad (26)$$



### c) Erreurs du Doppler

Pour le Doppler utilisé l'étude de sensibilité conduit à négliger le facteur d'échelle. Les seules erreurs retenues sont des biais sur chaque axe, constants au cours du vol mais aléatoire d'un vol à l'autre, ceci pour des limites d'utilisation précises (voir paragraphe 8.4)

$$\dot{b}_d = 0 \quad (27)$$

Le vecteur d'état des erreurs Doppler est par conséquent

$$x_3 = \begin{pmatrix} b_{dx} \\ b_{dy} \end{pmatrix} \quad (28)$$

### d) Erreurs de la position de recalage

La position est mesurée à des instants discrets par divers moyens. On considère que les erreurs sont indépendantes d'une mesure à l'autre et qu'elles sont caractérisées par leur CEP.

## 8. Description des programmes (Software)

### 8.1 Equations programmées

Les tableaux 4 et 5 présentent les équations de filtrage programmées ainsi que les notations des vecteurs et matrices utilisés.

Les formules d'intégration et de calcul de la matrice de transition correspondent à un algorithme Runge-Kutta d'ordre deux qui minimise les erreurs. La matrice de transition a été découpée en deux blocs qui sont calculés sur des pas différents, 10 et 30 secondes pour des raisons de précision développées au paragraphe 9.2.



GRANDEUR	DIMENSION	DEFINITION
$x$	$15 \times 1$	Vecteur d'état d'erreur du système hybride.
$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ 0 & F_{22} \end{pmatrix}$	$15 \times 15$	Matrice dynamique du système hybride.
$v$	$15 \times 1$	Bruit excitant, gaussien centré, non corrélé.
$Q$	$15 \times 15$	Covariance de $v$ , matrice diagonale.
$y$	$4 \times 1$	Vecteur d'observation.
$H$	$4 \times 15$	Matrice d'observation.
$w$	$4 \times 1$	Bruit des observations, gaussien centré, non corrélé.
$R$	$4 \times 4$	Covariance de $w$ , matrice diagonale.
$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} \\ 0 & \Phi_{22} \end{pmatrix}$	$15 \times 15$	Matrice de transition.
$\hat{x}$	$15 \times 1$	Meilleure estimée de l'erreur du système hybride.
$\Sigma$	$15 \times 15$	Covariance des erreurs résiduelles.
$K$	$15 \times 4$	Gain du filtre.
$V$	$15 \times 15$	Diagonale de $\Sigma$ .
$\epsilon$	$1 \times 1$	Coefficient de désensibilisation du filtre, compris entre 0 et 1.
$h$	$1 \times 1$	Pas numérique du filtre (50 s)
$h^*$	$1 \times 1$	Pas numérique fractionné (10 s).

Tableau 4 - Définition des symboles



EQUATIONS PROGRAMMEES	OBSERVATIONS	CALCULATEUR
<p>CALCUL DE <math>\phi_{-1}(t+h, t)</math></p> $\phi_{-1}(t+h, t) = \prod_{i=0}^n \phi(t + (i+1)h^*, t + ih^*)$ $\phi(t + (i+1)h^*, t + ih^*) = 1 + \frac{h}{4} F_{11}(t+ih^*) + \frac{3}{4} F_{11}(t + (i + \frac{2}{3})h^*) + \frac{h^2}{2} F_{11}(t + (i + \frac{2}{3})h^*)$ <p>CALCUL DE <math>\phi_{22}</math> : <math>\phi(t+h, t) = 1 + \frac{h}{4} F(t) + \frac{3}{4} h F(t + \frac{2}{3}h) + \frac{h^2}{2} F(t + \frac{2}{3}h) F(t)</math></p>	<p>Matrice de transition.</p> <p style="text-align: center;">1</p>	
$\hat{\Sigma}_-(t+h) = \phi(t+h, t) \hat{\Sigma}_+(t)$ $\Sigma_-(t+h) = \phi(t+h, t) \Sigma_+(t) \phi'(t+h, t) + hQ + \frac{h^2}{2} \left[ F(t)Q + QF'(t) \right]$	<p>Intégration.</p> <p style="text-align: center;">2</p>	
$K = (1-\epsilon) \Sigma_- H' \left[ E \Sigma_- H' + R \right]^{-1} + \epsilon VH' (H VH')^{-1}$ $\hat{\Sigma}_+ = \hat{\Sigma}_- + K (y - E \hat{\Sigma}_-)$ $\Sigma_+ = (1 - KH) \Sigma_-$	<p>Recalage Doppler et position, composante par composante.</p> <p style="text-align: center;">2</p>	

Tableau 5 - Equations du filtre



---

Les équations classiques du filtre de Kalman ont été modifiées pour inclure la technique de l' "a" de désensibilisation aux erreurs de modèles et aux erreurs numériques (6).

## 8.2 Répartition des programmes dans les calculateurs

La répartition des programmes a été principalement dictée par les contraintes suivantes

- une bonne partie de la mémoire et de la puissance du calculateur 1 est utilisée par les programmes spécifiques S 111,
- un certain nombre de calculs doit être fait en flottant, pour des raisons de précision numérique développées au paragraphe 9.3.

Le partage des programmes et la spécialisation des calculateurs en "fixe" et en "flottant" se sont révélés satisfaisants. Ainsi, le calculateur 1 traite tous les programmes en fixe et le calculateur 2 ceux en flottant (voir figure 6).

Les échanges entre calculateurs se font en série, par transfert programmé, vers la mémoire tampon. Le débit de ce mode de transmission est faible mais suffisant pour traiter les 88 paramètres échangés durant chaque pas de calcul (50s).

Le bilan des charges de calcul et des volumes mémoires utilisés est donné par les tableaux 6 et 7. Il est important de noter que l'optimisation du volume mémoire n'a pas été l'objectif principal de l'expérimentation, par contre l'optimisation temps réel a été un soucis permanent.



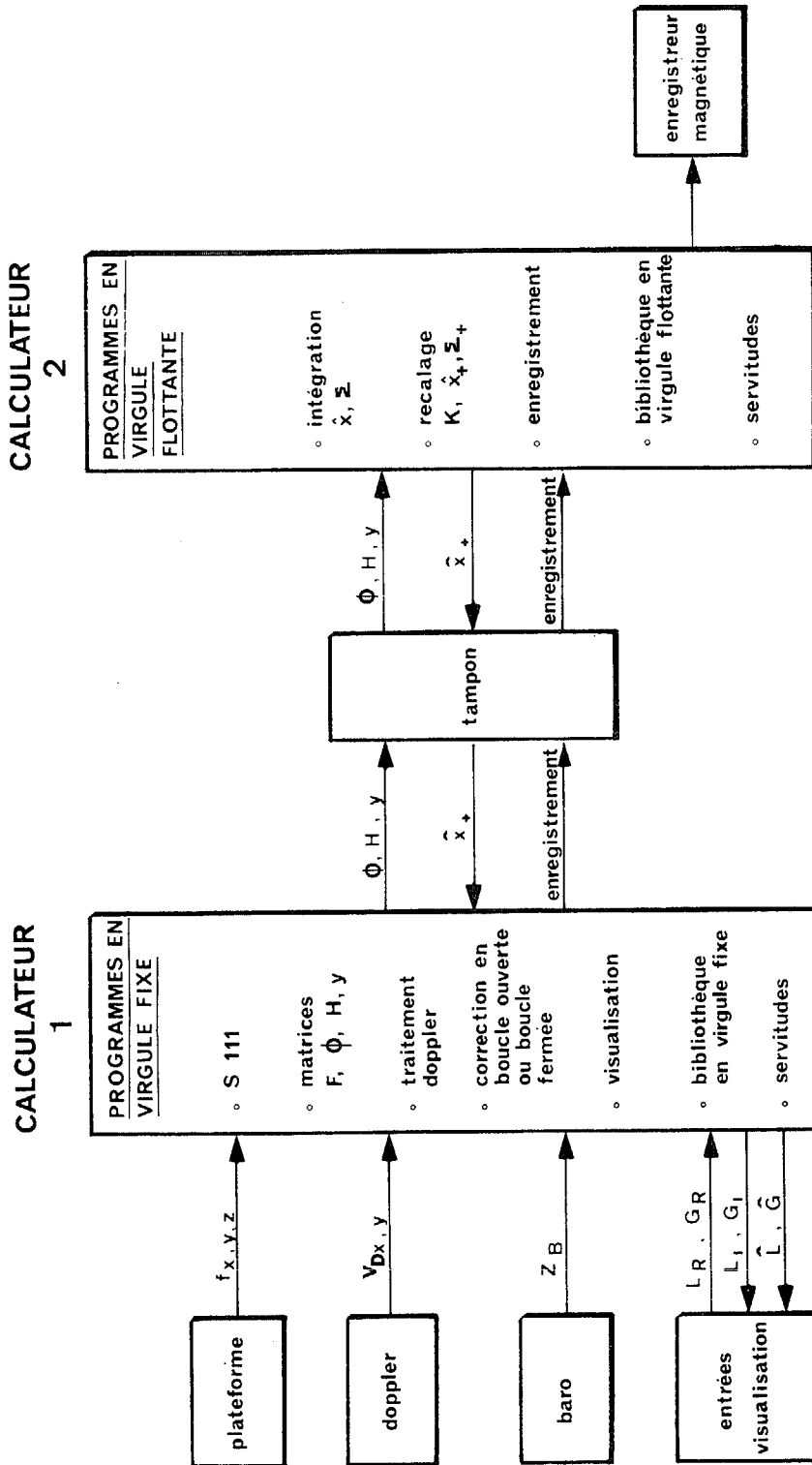


Figure 6 - Répartition des programmes et organisation des échanges d'information



---

### 8.3 Déroulement des programmes en temps réel

Le déroulement des calculs se fait de façon asynchrone dans les deux calculateurs mais avec un contrôle rigoureux du temps réel par le calculateur 1. C'est ce dernier qui définit la durée du pas d'intégration, lance les programmes du 2 et gère les échanges. Lorsque le 2 a terminé un traitement, il se met en attente d'un nouvel ordre (voir figure 7).

Le début du pas d'intégration coïncide avec l'échantillonnage de l'observation Doppler. L'observation de position peut intervenir à n'importe quel instant.

## 9. Difficultés rencontrées dans la réalisation pratique du filtre

### 9.1 Contrainte temps réel

Le calcul en temps réel ajoute à la programmation un certain nombre de difficultés et de contraintes qui sont liées

- à la vitesse limitée des calculs,
- à la nécessité de contrôler le temps de façon rigoureuse, notamment pour les opérations d'intégration, la synchronisation des échantillonnages, des observations, etc...
- aux échanges entre les calculateurs.

Ainsi, la meilleure estimée de l'erreur, après recalage Doppler et position, est disponible avec 26 secondes de retard. En raison de la puissance de calcul limitée et de la précision numérique nécessaire, il n'a pas été possible de réaliser un algorithme d'intégration réellement "prédicteur". De plus, le traitement des observations, qui en toute rigueur devrait être instantané, demande environ une dizaine de secondes.



**Tableau 6 - Utilisation des calculateurs**

	VOLUME MEMOIRE	TEMPS DE CALCUL
1	80 %	95 %
2	60 %	55 %

**Tableau 7 - Détail du volume mémoire**

1	Alignement	925
	Navigation	900
	Visualisation	1125
	Kalman	2000
	Divers	1350
	TOTAL	6300
2	Kalman	3700
	Divers	1000
	TOTAL	4700
TOTAL GENERAL .....		11000 mots
TOTAL KALMAN .....		5700 mots



---

En pratique, ce retard n'est pas gênant. En boucle ouverte il se traduit par un retard de la correction de l'affichage. En boucle fermée il est négligeable devant les constantes de temps dynamiques des erreurs, en particulier la période de 84 minutes de l'inertie.

## 9.2 Algorithme d'intégration

La matrice de transition est utilisée pour intégrer (et prédire) la meilleure estimée des erreurs et la matrice de covariance des erreurs résiduelles. Le calcul de la matrice de transition se fait par intégration de la relation

$$\dot{\phi} = F \phi \quad (29)$$

La précision de cette intégration, qui dépend donc des caractéristiques de la trajectoire, conditionne les performances du filtre. Schématiquement, pour un algorithme et un objectif de précision donnés plus les évolutions sont sévères, plus le pas d'intégration doit être petit.

Le problème était donc de choisir un algorithme, suffisamment précis pour les trajectoires envisagées, donnant une charge et un volume de calcul minimal.

L'idée exploitée est de considérer que les termes les plus sensibles aux évolutions sont ceux qui dépendent le plus directement des erreurs dynamiques inertielles, c'est à dire le bloc  $\phi_{1:7}$  (dimensions  $7 \times 7$ ) de  $\phi$ . On a donc choisi de calculer les termes correspondants ( $\phi_{1:7}$ ) de la matrice de transition avec un pas de 10 secondes et les autres avec un pas de 30 secondes.

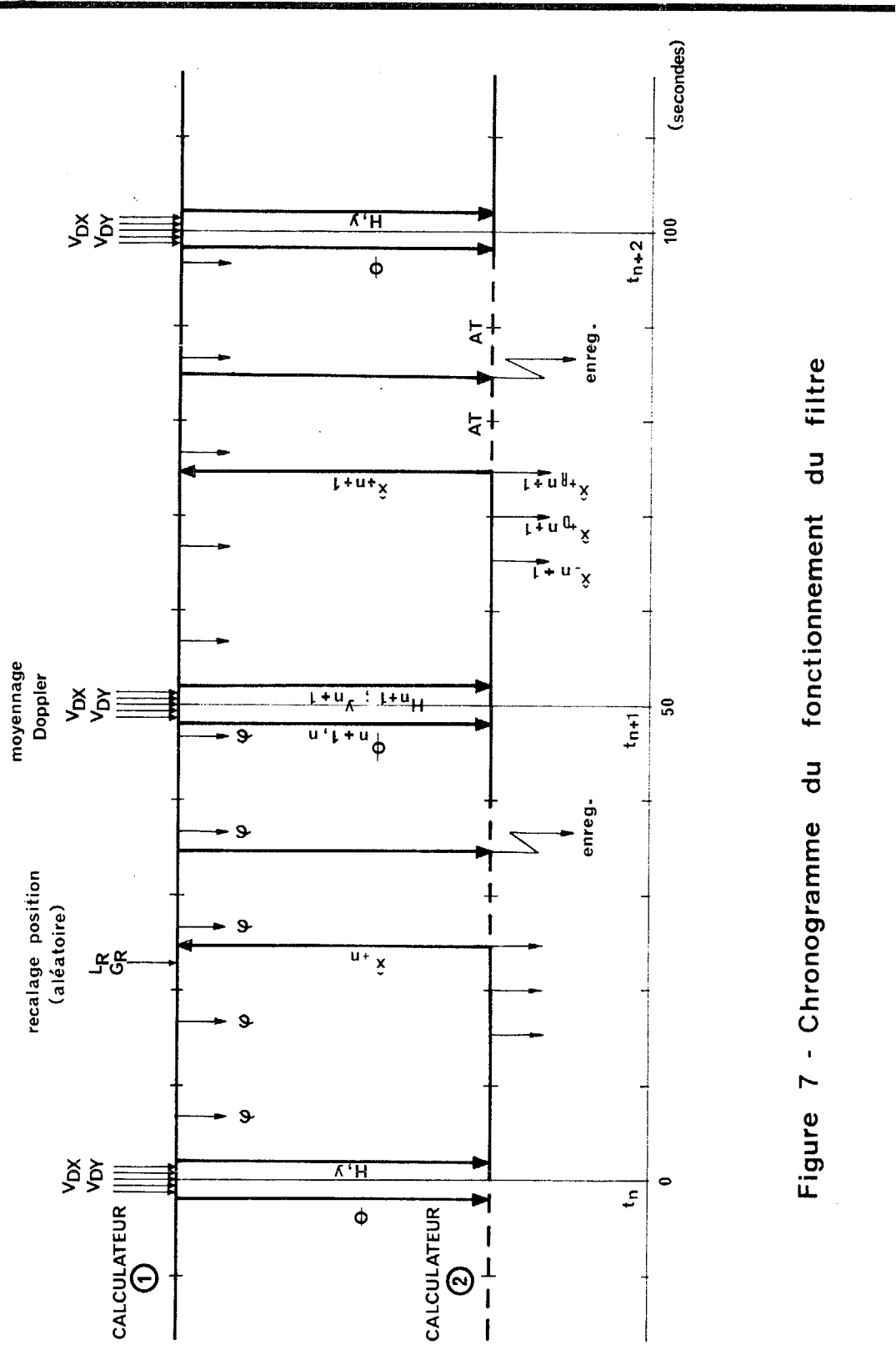


Figure 7 - Chronogramme du fonctionnement du filtre



---

La dégradation de performance due à cet algorithme a été calculée. Elle est négligeable (quelques %) pour des vols type Caravelle. Elle serait rédibitoire pour un avion d'armes. La solution pourrait être alors une réduction du pas de calcul en utilisant un calculateur plus puissant ou, si ce n'est pas possible, d'interrompre simplement l'intégration pendant les évolutions trop sévères après avoir vérifié que la dégradation correspondante est tolérable.

### 9.3 Précision numérique - Virgule fixe ou flottante

Le domaine de variation des différents paramètres est important, notamment pour la matrice de covariance des erreurs résiduelles. Pendant l'alignement en vol de la plateforme, l'écart d'horizontal initial est de l'ordre de quelques degrés et l'écart final de l'ordre de la seconde d'arc. La plage de variation correspondante de la covariance est de  $10^7$ . Les impératifs de cadrage et d'arrondi sont de l'ordre de  $10^2$  ou de  $10^3$ , c'est à dire un total de  $10^9$  à  $10^{10}$  qui dépasse les possibilités du mot de 24 bits.

Deux solutions ont été envisagées : la double précision en virgule fixe et la virgule flottante. La première a été repoussée car

- le nombre de mémoire inscriptible nécessaire est multiplié par deux,
- les problèmes de cadrage en virgule fixe sont considérables dans cette application.

La virgule flottante supprime radicalement la contrainte cadrage. De plus, un seul mot suffit 15 bits pour la mantisse plus le signe et 8 bits pour l'exposant. La programmation des opérations en flottant a été très soigneusement optimisée et conduit à des vitesses de calcul suffisantes pour l'expérimentation. Les performances ont été calculées pour un vol type par rapport à une arithmétique flottante en 72 bits. Les résultats montrent une dégradation inférieure à 1 %.



---

#### 9.4 Prétraitement du Doppler

Avant d'utiliser l'observation Doppler, on effectue deux opérations : un moyennage du signal et un test pour définir les limites de validité.

##### Moyennage du signal

Le Doppler est assez fortement bruité dans les basses fréquences. Pour améliorer le rapport signal sur bruit, on a réalisé un moyennage sur quatre secondes. Le retard de moyennage est compensé en datant l'observation au milieu de la période de moyennage.

##### Test de validité

Le domaine d'utilisation du Doppler dépend de l'altitude, de la zone survolée et en particulier de l'assiette avion. A la limite le Doppler décroche, cependant la dégradation est généralement progressive. Pour garantir le modèle utilisé, dont le domaine de validité est inférieur au domaine d'utilisation, il est indispensable de doubler le signal de décrochage au moins d'un test d'assiette et d'interdire le Doppler au delà de certaines limites.

#### 10. Mise au point du software

Les difficultés rencontrées lors de la mise au point d'un programme de 11000 mots sont nombreuses. Les caractéristiques du dispositif de calcul utilisé pour cette expérimentation en ajoutent de nouvelles : mémoire à tambour, fonctionnement asynchrone des calculateurs, dialogue par l'intermédiaire d'un registre tampon de 600 bits et programmation en langage machine.

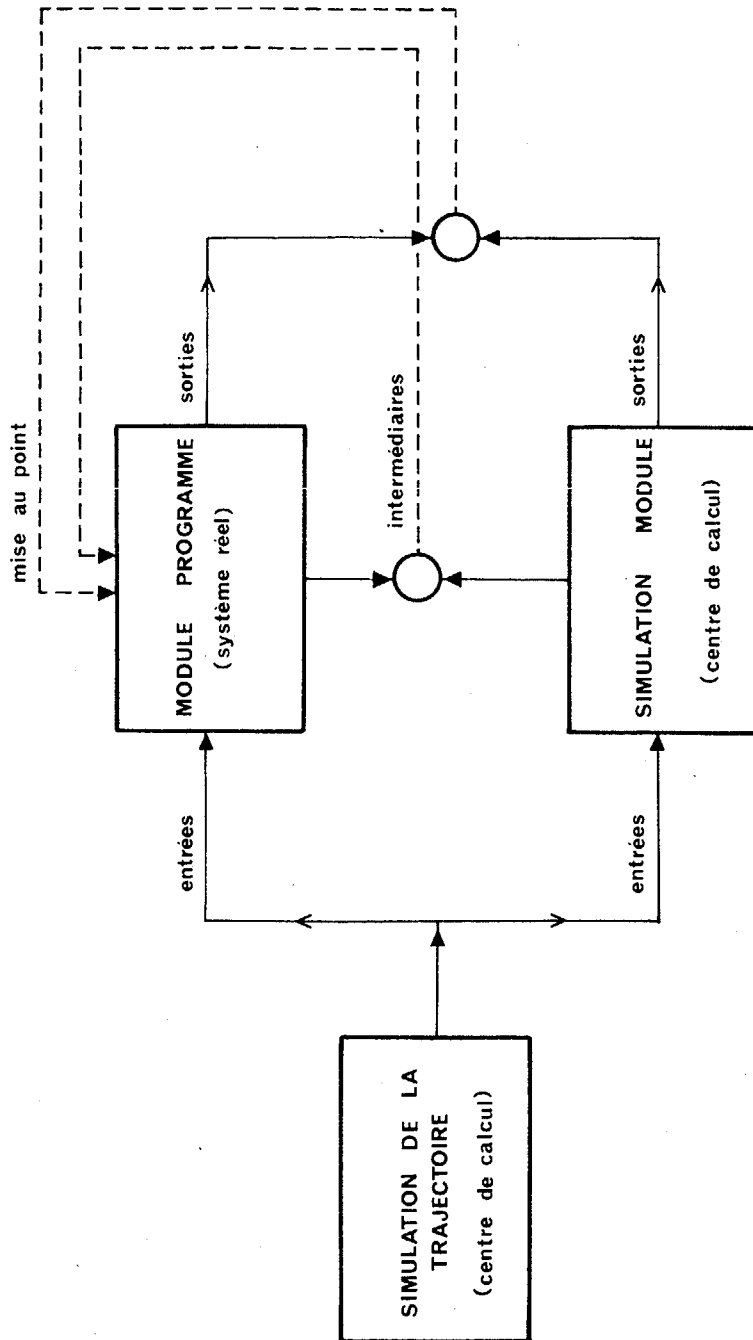


Figure 8 - Test et mise au point des modules de programme du système réel





---

Une technique de programmation modulaire a été adoptée pour faciliter la mise au point des programmes et leur modification éventuelle.

Les fonctions réalisées par chaque module sont complexes, les entrées et sorties sont multivariables. La mise au point n'est donc pas simple.

La méthode de test utilisée est classique : on compare pour une excitation caractéristique, les réponses du programme du système réel et d'une simulation en langage évolué (voir figure 8). La mise au point a été faite module par module avec des entrées simples (échelon), puis pour l'ensemble des programmes avec des entrées correspondant à la simulation d'un vol type. L'écriture des simulations des modules sur un ordinateur puissant (UNIVAC 1108 du CCSA) a demandé trois mois et la mise au point des programmes réels environ deux mois, ce qui peut être considéré comme rapide pour un système de cette taille et de cette complexité.

## 11. Essais

Les tests précédents permettent de contrôler de façon très fine le software, mais ne vérifient en rien la valeur des modèles choisis ni du filtre utilisé. Cet ultime objectif est le but des essais en vol. Cependant, les essais en vol coûtent cher et sont difficiles à exploiter. Il était donc souhaitable de pouvoir, au sol, vérifier le bon fonctionnement et même évaluer, dans certaines limites, les performances de l'ensemble de l'installation.

La méthode retenue pour les essais en laboratoire ( $V=0$ ) du système complet a consisté à étudier la réponse du filtre à des échelons d'erreur en position, dérive et facteur d'échelle gyro, et biais Doppler. Les résultats obtenus sont présentés sous forme de courbes, figures 9 à 13.



---

L'installation a été essayée en fonctionnement "boucle ouverte". De cette façon, il était en effet possible d'apprécier les performances du filtre de Kalman programmé et aussi de les comparer à celles du système à inertie seul.

#### Recalage optimal de position

Les figures 9a et 10a représentent, en écart de latitude et de longitude, l'erreur de position, en fonction du temps, du système à inertie seul. L'échelle des erreurs n'est pas donnée pour des raisons de classification.

Les figures 9b et 10b montrent les erreurs après des recalages de position simples. On entend par là, une translation de la position de la valeur du vecteur de recalage, au niveau de l'affichage et donc sans influence sur les calculs de mécanisation de la plateforme.

En 9c, 9d, 10c et 10d, on représente les erreurs de position résiduelles après les mêmes recalages de position utilisés de façon optimale par le filtre de Kalman.

#### Inertie-Doppler optimal :

Les figures 11 et 12 montrent les erreurs du système à inertie excité par une dérive de  $0,1^\circ/h$  d'un des gyroscopes de verticale ainsi que les erreurs résiduelles après filtrage optimal des informations de l'inertie et d'une entrée Doppler nulle, avec pour seul bruit apparent celui des calculs numériques.

La figure 13 montre les mêmes paramètres pour une excitation du système à inertie par une dérive des gyroscopes plus faible et pour une observation Doppler bruitée par un biais de 1 noeud simulé par une fréquence fixe.

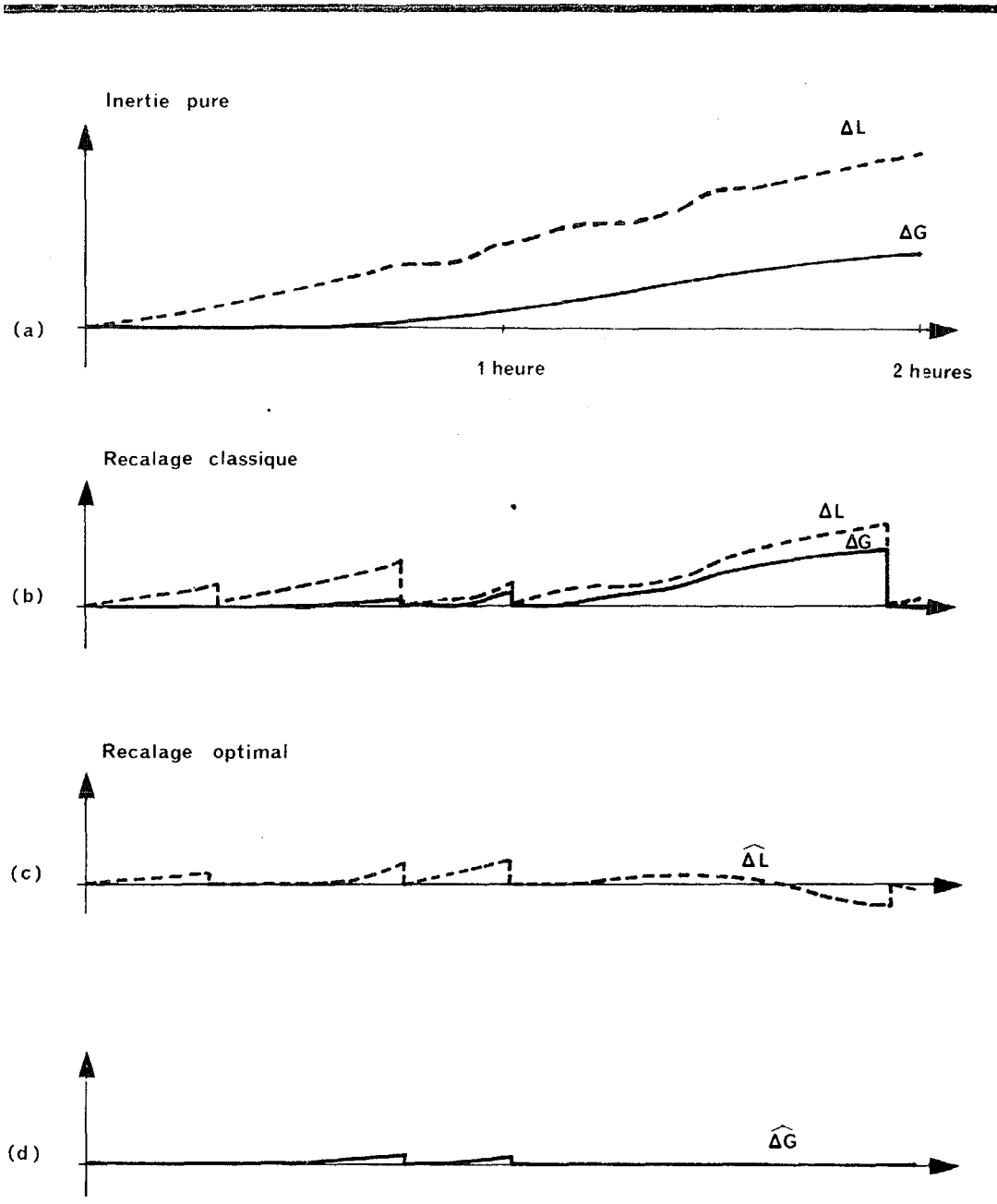


Figure 9 - Inertie - Recalage de position

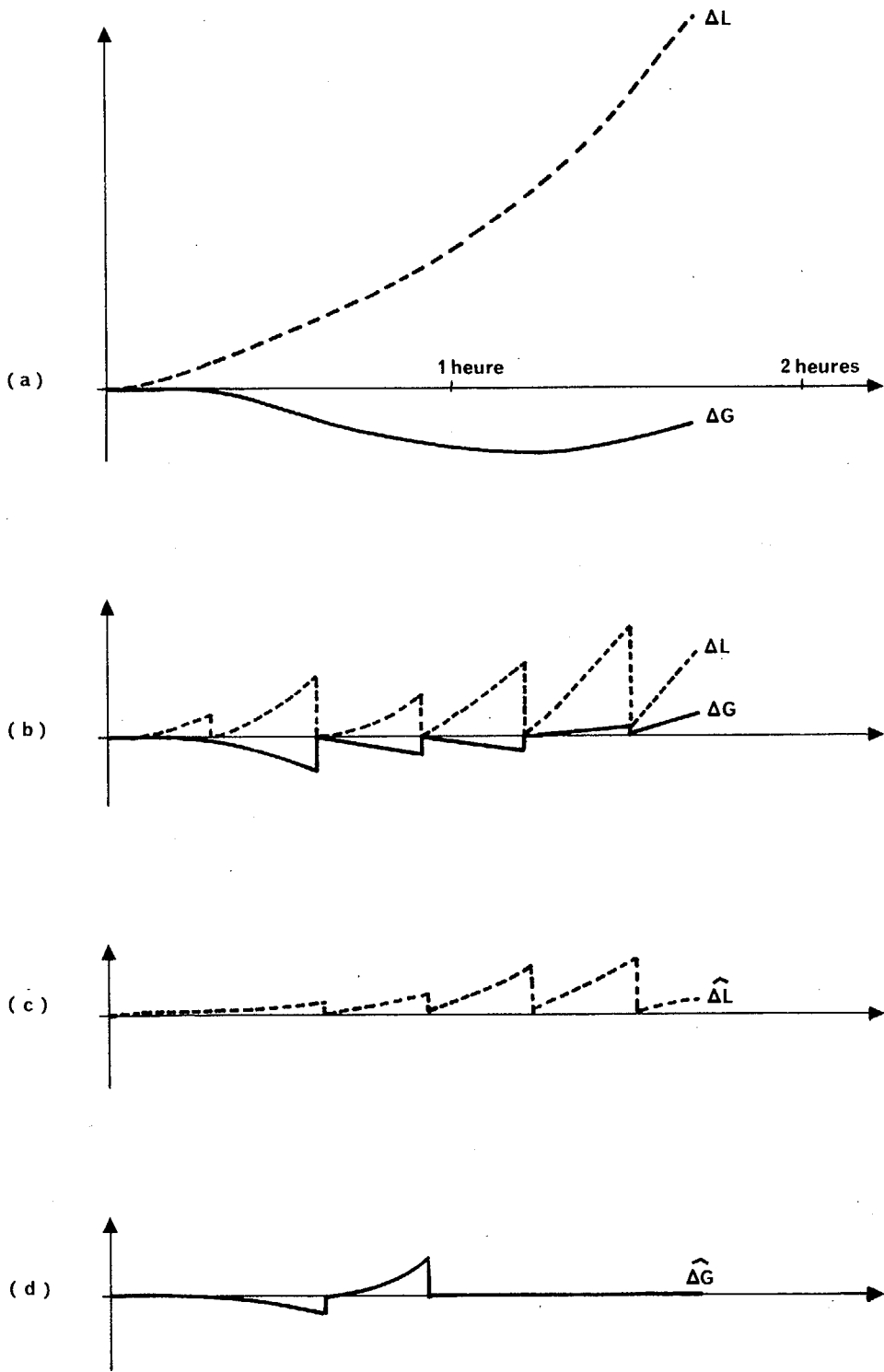


Figure 10 - Inertie - Recalage de position

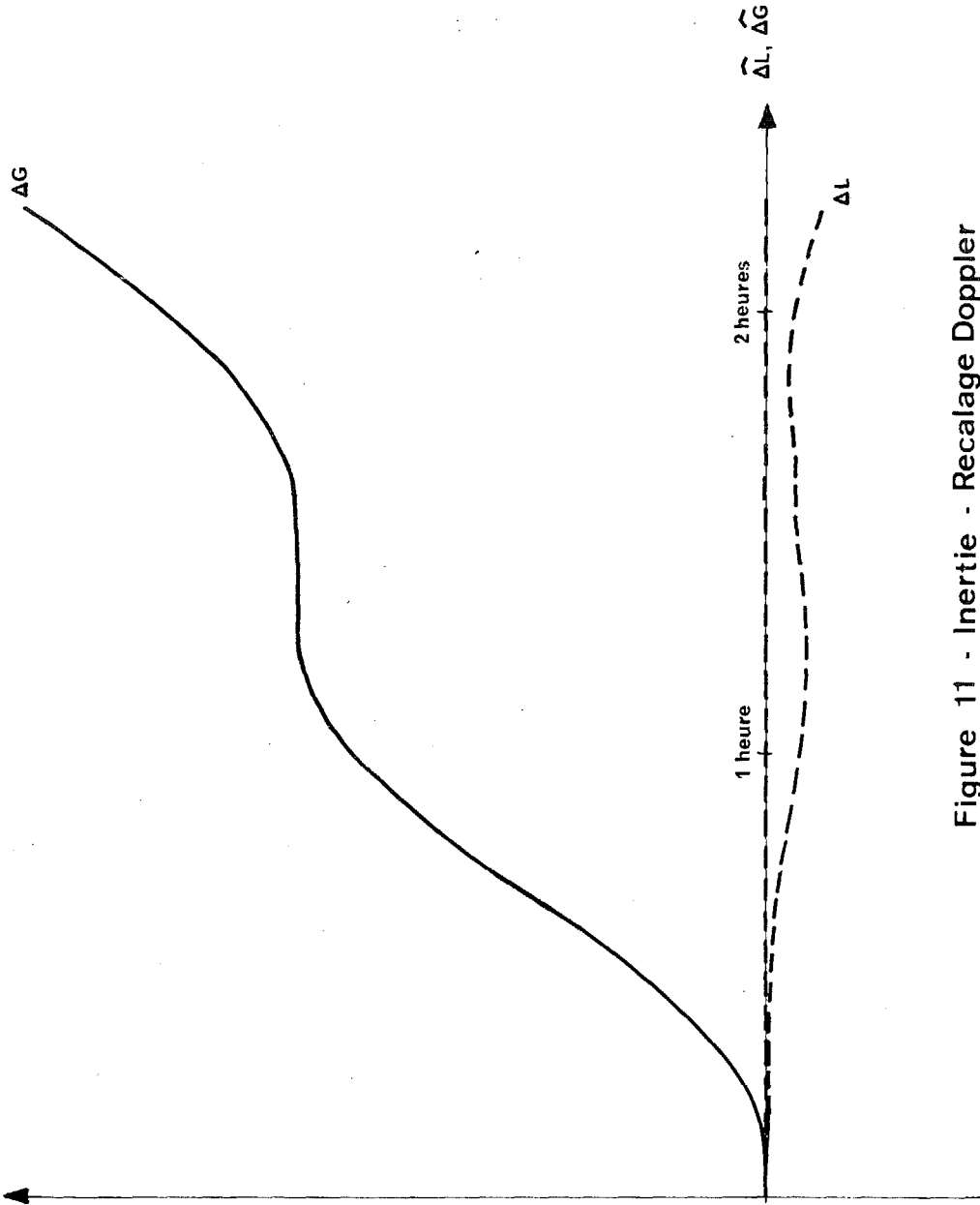


Figure 11 - Inertie - Recalage Doppler

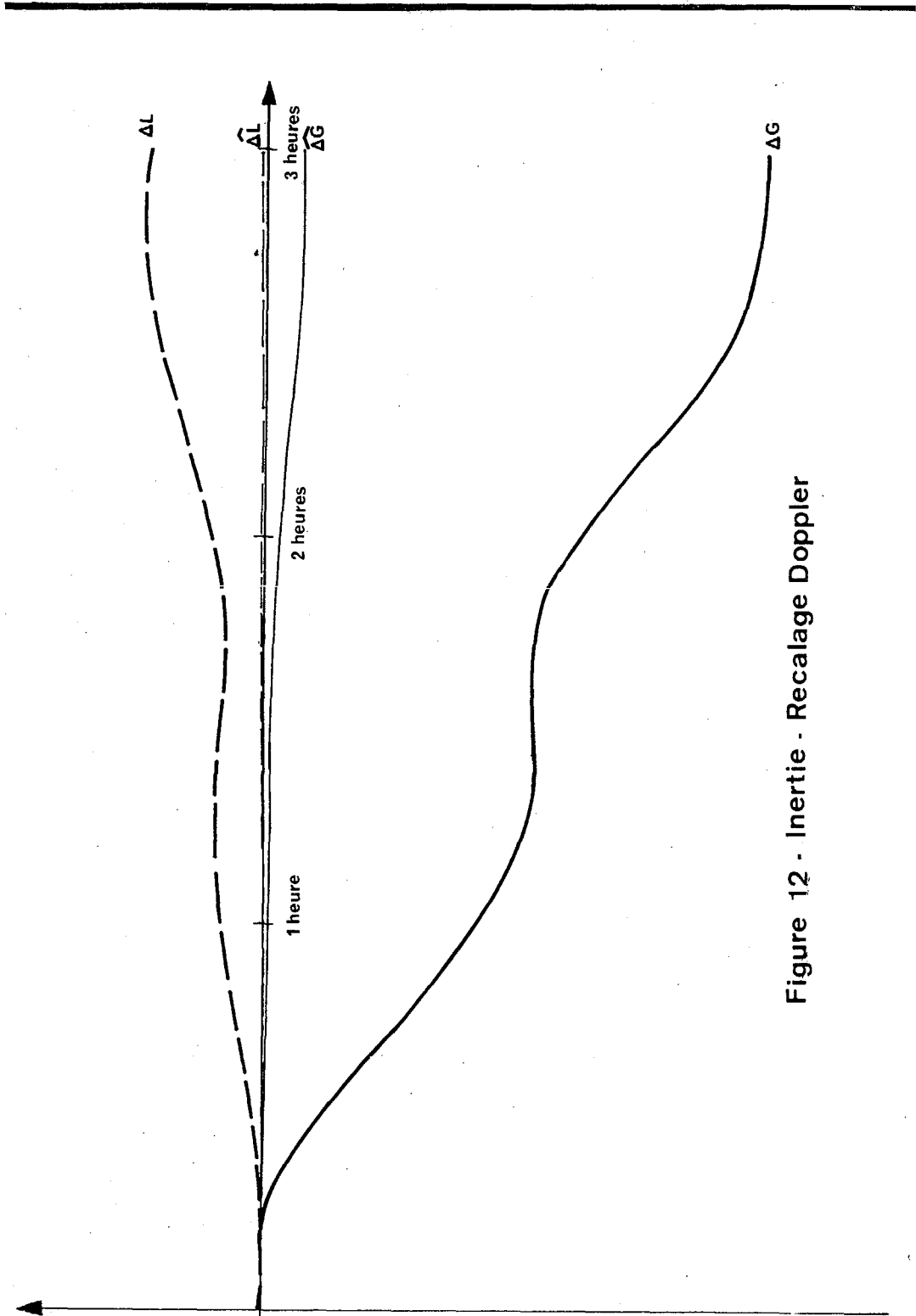


Figure 12 - Inertie - Recalage Doppler

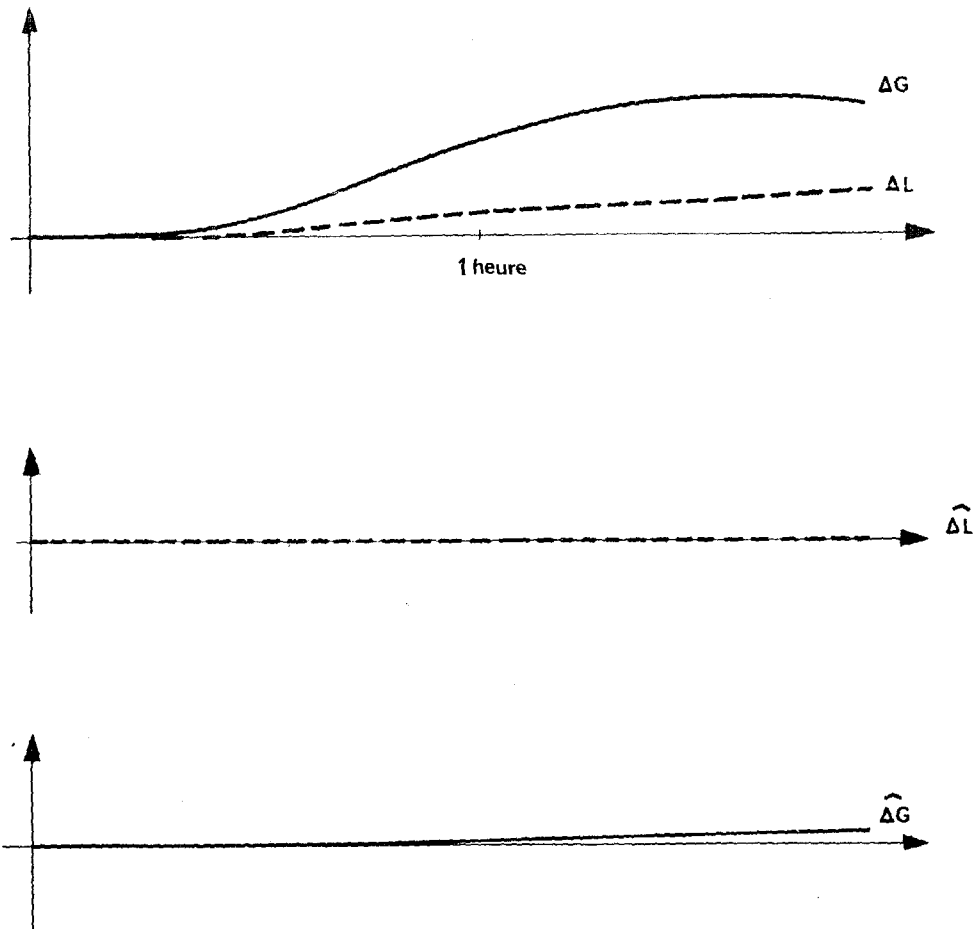


Figure 13 - Inertie - Recalage Doppler



---

## 12. Conclusion

Les systèmes de navigation hybrides optimaux paraissent très séduisants : dans le monde entier divers systèmes militaires ont été réalisés ou sont en cours de réalisation suivant ces principes et nous venons de présenter un tel exemple .

Avec l'accroissement de la fiabilité des sous-systèmes, la diminution en taille et en prix des calculateurs numériques et la recherche active actuelle sur la synthèse de filtres numériques économiques, insensibles et voisins de l'optimum on peut prédire que, rapidement, l'aviation et la marine civiles voudront profiter elles aussi des possibilités ouvertes par cette technique .






---

BIBLIOGRAPHIE

- {1} C.E. SHANNON, W. WEAVER, The Mathematical Theory of Communications, Bell System Technical Journal, juillet et Octobre 1948.
- {2} Norbert WIENER, Time Series, The M.I.T. Press (1949).
- {3} R.E. KALMAN, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Journal of basic Engineering, p. 35-45, March 1960.
- {4} R.E. KALMAN, R.S. BUCY, New results in Linear Filtering and Prediction Theory, Journal of Basic Engineering, p. 95-108 March 1961.
- {5} R.E. KALMAN, New Methods in Wiener Filtering Theory, Proc. of the First Symposium on Engineering Applications of Random Functions, Wiley, 1963.
- {6} P. FAURRE, L. CAMBERLEIN, J.J. CHEVREUL, P. LLORET, C. MESSAN, Navigation inertielle optimale et filtrage statistique, Dunod, 1971.
- {7} K.J. ÅSTRÖM, S. WENSMARK, Numerical Identification of Stationary Time series, Instruments and Measurements, 1964.
- {8} P. FAURRE, Identification par minimisation d'une représentation markovienne de processus aléatoires, Symposium on Optimization, Nice, Juin 1969, Lecture Notes in Mathematics 132, Springer Verlag.
- {9} P. HENRICI, Discrete Variable Methods in Ordinary Differential Equations, Wiley, 1962.
- {10} R.K. MÉHRA, J. PESCHOM, An innovations approach to fault detection and diagnosis in dynamical systems, IEEE Conferencia Internacional de Mexico, Enero 19-21, 1971.
- {11} J.C. PINSON, Inertial Guidance for Cruise Vehicles, dans C.T. LEONDES, Guidance and Control of Aerospace Vehicle, Mc Graw Hill, 1963.