TROISIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

Problème de décision : Cas où le modèle exact n'est pas forcément inclus parmi les modèles étudiés.

J. M. PROTH. Université de Nancy - 54 - NANCY

M. R. FEIX Groupe Recherches Ionosphériques ORLEANS - La Source

RESUME : Il s'agit d'une généralisation du problème de Bayes. Un certain nombre de modèles M (hypothèses explicatives) sont décrits à l'aide d'une matrice donnant les probabilités pour que chaque modèle amène la réalisation (ou la non réalisation) de q évènements indépendants, dont les issues sont supposées du type binaire. La connaissance de la séquence qui a réellement pris place (expérience) permet de construire les probabilités à posteriori (à partir d'un ensemble de probabilité à priori).

Malheureusement, si le modèle exact n'a pas été inclus, le théorème de BAYES amène parfois une pseudo-convergence vers un modèle inexact. Il est donc nécessaire de s'affranchir de la normation à chaque étape, de la somme des probabilités, et étudier la valeur de chaque modèle pris isolément par référence à l'expérience observée.

SUMMARY : A generalisation of the BAYES problem is presented. M explanatory models are described by a matrix giving, for each model, and each of q independent events, the probability of realization (or no realization - the issues of these events being supposed of binary type). The knowledge of the sequence of the effectively realized events (experiment) leads to a set of a posteriori probabilities (a set of a priori probability being given). Unfortunately if the true model has not been included BAYES theorem brings sometimes a pseudo-convergence toward a wrong model. One should get rid of the normation, at each step, of the probabilities sum and the value of each model, considered independently of the others models, must be studied with reference to the observed experiment. We will introduce a "lenght" L_α associated to the α model defined by :

$$L_\alpha = - \sum_j \log P_\alpha^j - \sum_k \log (1 - P_\alpha^k)$$

TROISIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

Problème de décision : Cas où le modèle exact n'est pas forcément inclus parmi les modèles étudiés.

J. M. PROTH. Université de Nancy - 54 - NANCY

M. R. FEIX Groupe Recherches Ionosphériques
ORLEANS - La Source

RESUME

Nous proposons la définition d'une "longueur" L_α associée au modèle α .

$$L_\alpha = - \sum_j \log P_\alpha^j - \sum_k \log (1 - P_\alpha^k)$$

Dans cette formule, P_α^i désigne la probabilité que le modéle α amène la réalisation de l'évènement i . La sommation sur j désigne la sommation sur les évènements qui se sont effectivement réalisés, celle sur k sur ceux qui ne se sont pas réalisés. Les longueurs L_α ainsi obtenues permettent par comparaison à des valeurs théoriques (éventuellement obtenues par simulation) de décider si le modèle testé est le modèle exact et de rejeter tous les modèles si nécessaire.

SUMMARY

P_α^i is the probability that the α "model" leads to the realization of event I . The j summation refers to these events which effectively have been realized. The k summation to those which have not been realized. These computed L_α can be compared to theoretical values (eventually obtained through a computer simulation) and the comparison decide if the model under investigation is the correct one. If necessary all models will be rejected.

Problème de décision : Cas où le modèle exact n'est pas forcément inclus parmi les modèles étudiés.

J.M. PROTH - M.R. FEIX

INTRODUCTION

Un des problèmes fondamentaux du calcul des probabilités est celui de l'obtention des probabilités à posteriori de differentes hypothèses, l'issue d'un certain nombre d'évènements liés à ces hypothèses étant connues. C'est le célèbre théorème de BAYES. Son utilisation suppose qu'un certain nombre de modèles (hypothèses) - dont on se donne arbitrairement les probabilités à priori - sont testés en recalculant, après l'issue de chaque évènement, les probabilités à posteriori de ces modèles. Très souvent, le théorème est utilisé dans le contexte suivant.

1) - On est certain que le modèle exact fait partie de l'ensemble des modèles étudiés.

2) - On travaille sur un nombre d'expériences considérables, que l'on peut répéter à volonté.

Dans ces conditions, on peut montrer que les probabilités à priori souvent données d'une manière empirique et arbitraire, et sous la seule condition qu'elles ne soient pas strictement nulles, finissent par s'effacer devant "l'évidence expérimentale"

Ce cas limite d'application du théorème de BAYES correspond, en gros, au cas du physicien travaillant sur un grand nombre d'évènements (micro ou macroscopiques) et ce avec une grande précision. Ce n'est malheureusement pas le cas de sciences dont l'organisation mathématique est moins avancée (biologie, économie, étude des milieux naturels, géophysique, etc...)

Notamment l'hypothèse du modèle exact élément de l'ensemble des modèles étudiés est cruciale. De plus, le nombre d'évènements observés peut très bien être limité et la probabilité à priori doit alors être soigneusement choisie (en particulier une probabilité à priori nulle rejette définitivement ce modèle.). D'autre part, le fait que le théorème de BAYES normalise à l'unité, à chaque étape, la somme des probabilités nous oblige à faire un choix.

Il serait donc souhaitable de disposer d'une formulation moins rigide qui, en particulier, n'étudie pas la valeur d'un modèle par rapport aux autres modèles, mais étudie la valeur de chaque modèle, par seule référence à la suite des évènements observés. Pour arriver à ce but, nous mettons en oeuvre deux idées.

1) - Nous regardons la suite des évènements observés comme définissant un chemin parmi tout un ensemble de chemins possibles et "mesurons" la probabilité de ce chemin dans l'hypothèse d'un des modèles exacts en affectant à chacune des étapes une certaine longueur.

2) - A partir de chacun des modèles dont nous disposons nous simulerons un ensemble de chemins qui seront comparés au chemin observé.

De ces calculs, nous déduirons une "mesure" de la vraissemblance de chaque modèle avec l'ensemble des observations, ce qui nous amènera, si besoin était, à rejeter tous les modèles considérés.

Problème de décision : Cas où le modèle exact n'est pas forcément inclus parmi les modèles étudiés

J.M. PROTH - M.R. FEIX

FORMULATION DU PROBLEME

Le problème qui nous préoccupe peut donc s'énoncer comme suit : nous sommes en présence de n 'modèles', M_1, M_2 ....., M_n pouvant conduire chacun, indépendemment, à q 'énoncés' E_1, E_2,....., E_q.

Les modèles pourraient être par exemple des maladies (resp. des modèles économiques) et les énoncés des symptômes (resp. des lois économiques). Nous supposerons que ces énoncés conduisent à des issues binaires (est vérifié (vrai), n'est pas vérifié (faux)).

Nous appellerons $\mathcal{E}_j$ l'évènement, 'l'énoncé' E_j est vérifié et nous qualifierons d'expérience toute simulation faite à partir d'un modèle et qui conduit à un évènement du type : $\bigwedge_{j=1}^{q} (\mu\,\mathcal{E}_j)$, où $(\mu\,\mathcal{E}_j)$ représente soit l'évènement $\mathcal{E}_j$, soit l'évènement (non $\mathcal{E}_j$).

Ces évènements représentent tout simplement les suites possibles V V F ... etc ...

$\mathcal{M}_i$ désignera, dans la suite, l'évènement 'la simulation est faite à partir du modèle M_i'.
Enfin, la matrice A (n, q) = $[p_{ij}]$, où $p_{ij} = \Pr\{\mathcal{E}_j/\mathcal{M}_i\}$ est une donnée du problème.

Sachant que nous venons d'observer un évènement du type $\bigwedge_{j=1}^{q} (\mu\,\mathcal{E}_j)$, nous proposons de répondre aux questions suivantes :

1) - **Le modèle à partir duquel a été faite la simulation qui est à l'origine de cet évènement fait-il partie de l'ensemble M_i i = 1, ... , n ?**

2) - Dans le cas où le modèle en question fait partie de l'ensemble M_i $i = 1, 2, \ldots, n$, peut-on déterminer ce modèle ?

Dans un premier temps, nous allons supposer connue l'information : le modèle qui est à l'origine de la simulation appartient à l'ensemble M_i $i = 1, \ldots, n$.

III - LE MODELE APPARTIENT A L'ENSEMBLE M_i $i = 1, \ldots, n$

Nous allons présenter dans ce cas deux méthodes qui peuvent nous permettre de déterminer le modèle en question, à condition toutefois que le nombre d'énoncés soit suffisamment grand.

La première de ces méthodes, très connue, utilise le théorème de BAYES.

III - 1) Utilisation du Théorème de BAYES

Compte tenu des hypothèses, les évènements $_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ forment une partition, c'est-à-dire :

a - $\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i = \Omega$, évènement toujours vrai. En d'autres termes, le modèle à partir duquel a été faite la simulation appartient à l'ensemble M_i $i = 1, \ldots, n$

b - $\mathcal{M}_i \wedge \mathcal{M}_k = \phi$ $\forall_{i,k} = 1, \ldots, n$ avec $i \neq k$, ce que l'on pourrait énoncer : l'expérience ne peut être faite à partir de deux modèles à la fois.

Le théorème de BAYES peut donc être utilisé et nous savons que

$$P_i = P_r\left\{m_i/\left[\bigwedge_{j=1}^{q}(\mu\,\mathcal{E}_j)\right]\right\} = \frac{P_r\left\{\left[\bigwedge_{j=1}^{q}(\mu\,\mathcal{E}_j)\right]/m_i\right\}\; P_r\, m_i}{\sum_{k=1}^{n} P_r\left\{\left[\bigwedge_{j=1}^{q}(\mu\,\mathcal{E}_j)\right]/m_k\right\}\; P_r\, m_k}$$

Dans les expériences qui ont été faites, nous avons donné à $P_r\{m_i\}$ la valeur $\frac{1}{n}$ pour tout i. En effet, rien ne nous permettait , à priori, d'attribuer des probabilités différentes aux modèles.

Nous avons observé, comme nous le verrons dans l'exemple présenté plus loin, (trois modèles et 40 énoncés), que si M_i est à l'origine de la similation, la valeur obtenue pour P_i est très proche de 1 .. Dans le cas contraire cette valeur est très proche de 0.

III - 2) Méthode du maximum de vraissemblance (Chemin minimum).

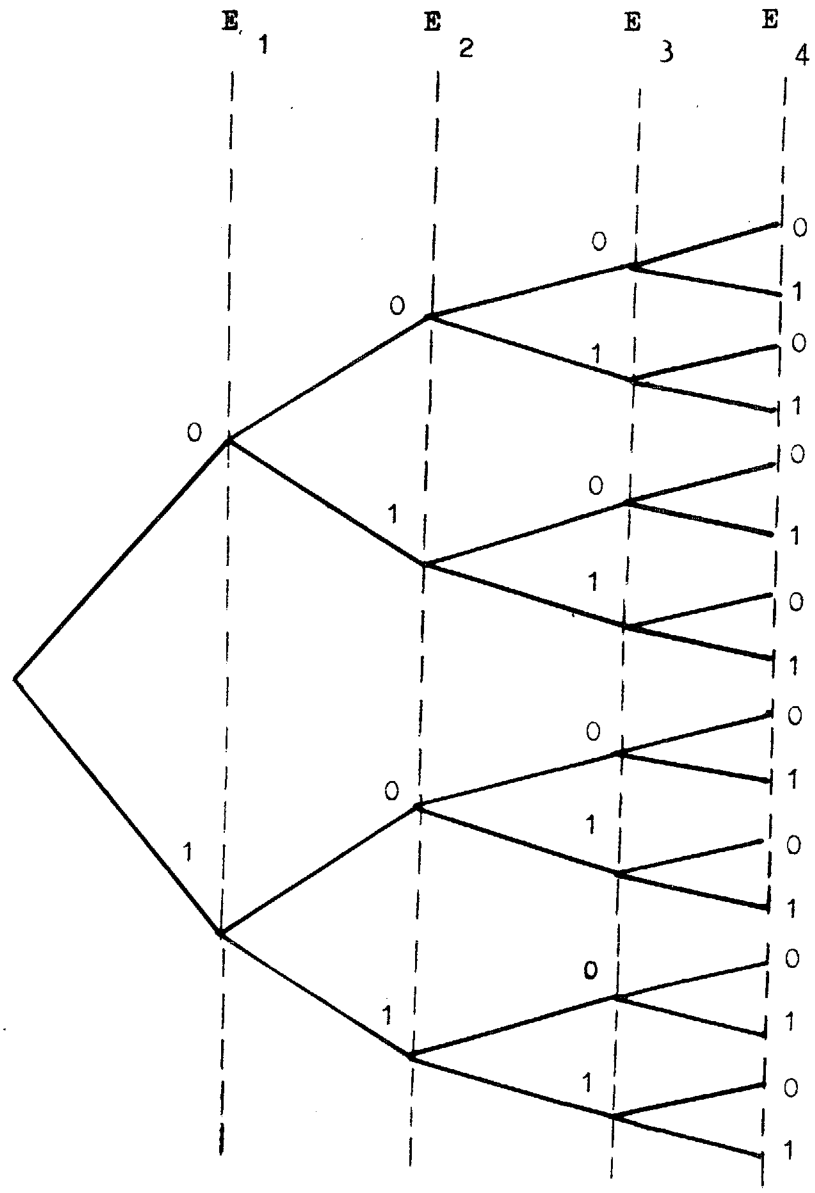
$S = \bigwedge_{j=1}^{q} (\mu\,\mathcal{E}_j)$ étant toujours le résultat de notre expérience, considérons, pour i=1, 2, ..., n,

$$\eta_i(S) = \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Log}(\mu\, p_{ij}) \quad \text{où} \quad \mu\, p_{ij} = p_{ij} \;\text{ si } (\mu\,\mathcal{E}_j) = \mathcal{E}_j$$

$$\text{et} \quad \mu\, p_{ij} = 1 - p_{ij} \;\text{ si } (\mu\,\mathcal{E}_j) = (\text{non}\,\mathcal{E}_j)$$

Nous allons justifier l'utilisation de cette pondération : la figure suivante représente tous les résultats possibles d'une expérience, qui sont au nombre de 2^q, où q est le nombre d'énoncés.

Un noeud marqué 1 au niveau E_j indique la réalisation de l'évènement $\mathcal{E}_j$. Par contre, un noeud marqué 0 indique la réalisation de (non $\mathcal{E}_j$).



Nous associons à chaque arc de cette arborescence et pour chaque modèle M_i, une longueur définie de la manière suivante :

si l'arc est situé entre les niveaux E_{j-1} et E_j

1) - nous disons que sa longueur est $-\log p_{ij}$ si le noeud de niveau E_j est caractérisé par 1.

2) - nous disons que sa longueur est $-\mathrm{Log}\,(1-p_{ij})$ si le noeud de niveau E_j est caractérisé par 0.

Si bien que la quantité η_i (S) définie plus haut représente la longueur du chemin, image de S pour le modèle M_i et $\eta_i(S)$ est d'autant plus grand que la probabilité que S se réalise sachant que la similation a été faite à partir de M_i est faible

La méthode que nous proposons consiste à admettre que S a été généré à partir du modèle M_i tel que

$$\eta_i\,(S) = \inf_{1 \leqslant k \leqslant n} \eta_k\,(S)$$

En d'autres termes, nous considerons que S a été généré par le modèle qui permet de l'obtenir avec la plus forte probabilité, d'où le nom de la méthode. Rappelons à ce sujet un théorème connu en théorie de l'information. Soient deux ensembles de probabilité P_i et Q_i tels que :

$$\sum_{i=1}^{N} P_i = \sum_{i=1}^{N} Q_i = 1 \quad \text{alors :}$$

$$-\sum_{i=1}^{N} P_i \log P_i \leqslant -\sum_{i=1}^{N} P_i \,\mathrm{Log}\, Q_i$$

Appliquons ce théorème à chaque noeud j de l'arborescence i .

$$- P_{ij} \operatorname{Log} P_{ij} - (1 - P_{ij}) \operatorname{Log} (1 - P_{ij}) \leq -P_{ij} \log P_{kj} - (1 - P_{ij}) \log (1 - P_{kj})$$

et ceci quelque soit j (le noeud) et i et k (les modèles considérés). D'où en sommant :

$$\sum_{j=1}^{q} \left[- P_{ij} \operatorname{Log} P_{ij} - (1-P_{ij}) \operatorname{Log} (1-P_{ij}) \right] \leq$$

$$\sum_{j=1}^{q} \left[-P_{ij} \operatorname{Log} P_{kj} - (1 - P_{ij}) \log (1 - P_{kj}) \right]$$

Cette dernière inégalité montre que la longueur moyenne du chemin "mesuré" à partir du modèle d'où est issue la simulation (c'est - à- dire du modèle vrai) est inférieur ou égal à la longueur de ce même chemin mesuré à partir de tout autre modèle. Nous pensons que la différence entre les deux membres de l'inégalité ci-dessus traduit en partie la discernabilité des modèles M_i et M_k. Les graphiques donnés à la fin illustrent ces propriétés pour différents modèles.

Les résultats obtenus par cette méthode, dans le cas ou l'on sait que le modèle exact est inclus parmi les modèles étudiés, sont aussi significatifs que ceux qui ont été obtenus à partir du théorème de BAYES.

Nous allons en présenter quelques uns.

III - 3) PRESENTATION DE QUELQUES RESULTATS

Les résultats qui suivent ont été obtenus à partir de trois modèles et 40 énoncés. Les différentes lignes de la matrice A (3, 40) ont été générés suivant des lois différentes de densités respectives :

Problème de décision : Cas où le modèle exact n'est pas forcement inclus parmi les modèles étudiés.
J.M. PROTH - M.R. FEIX

Modèle 1 $f_1(p) = \begin{cases} 1 \text{ si } p \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Modèle 2 $f_2(p) = \begin{cases} 12\,p^2 - 12\,p + 3 \text{ si } P \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Modèle 3 $f_3(p) = \begin{cases} 2p \text{ si } p \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Résultats obtenus :

Nous présentons quelques résultats qui nous permettrons pour l'exemple envisagé, de comparer les deux méthodes.

SIMULATIONS	MODELE 1		MODELE 2		MODELE 3	
	BAYES	LONGUEUR	BAYES	LONGUEUR	BAYES	LONGUEUR
1	1	21,06	$0,26.10^{-14}$	54,61	$0,79 \times 10^{-9}$	42,02
2	0,99999	25,54	$0,16.10^{-8}$	45,77	$0,18.10^{-7}$	43,34
3	0, 99995	28.	$0,11.10^{-9}$	50.87	$0,40.10^{-4}$	38.12
4	1.	21.87	$0,66.10^{-17}$	61.42	$0,59.10^{-9}$	43.12
5	1.	16.9	$0.9\ 10^{-21}$	65.36	0.9×10^{-11}	42.33
6	1.	21.80	0.26×10^{-15}	57.66	0.17×10^{-11}	48.85
7	0,99999	26.50	0.24×10^{-9}	48.62	0.14×10^{-5}	39.98
8	1.	20.21	0.89×10^{-21}	68.68	0.86×10^{-11}	45.68
9	0.99999	24.20	0.56×10^{-6}	38.59	0.27×10^{-9}	46.24
10	1.	19.58	0.71×10^{-14}	52.16	0.69×10^{-10}	42.97

Simulation à partir de M_1

Simulation à partir de M_2

SIMULATIONS	MODELE 1		MODELE 2		MODELE 3	
	BAYES	LONGUEUR	BAYES	LONGUEUR	BAYES	LONGUEUR
1	0.86×10^{-8}	31.72	0.99999	13.16	0.48×10^{-9}	34.60
2	015×10^{-8}	33.36	0.99999	13.10	0.14×10^{-8}	33.48
3	0.87×10^{-12}	36.34	1.	8.57	0.28×10^{-12}	37.46
4	0.21×10^{-8}	34.54	0.99999	14.56	0.14×10^{-8}	34.89
5	0.2×10^{-10}	37.19	1.	12.56	0.49×10^{-9}	33.98
6	0.14×10^{-9}	46.69	0.99999	20.	0.17×10^{-6}	35.57
7	0.3×10^{-7}	33. 09	0.99999	15.79	0.47×10^{-9}	37.26
8	0.1×10^{-7}	31.28	0.99999	12.89	0.61×10^{-10}	36.40
9	0.21×10^{-12}	35.76	1.	6.58	0.16×10^{-9}	29.09
10	0.5×10^{-10}	34.59	1.	10.91	0.14×10^{-10}	35.89

Simulation à partir de M_3

SIMULATIONS	MODELE 1		MODELE 2		MODELE 3	
	BAYES	LONGUEUR	BAYES	LONGUEUR	BAYES	LONGUEUR
1	0.4×10^{-6}	35.05	0.14×10^{-19}	66.07	0.99999	20.36
2	0.36×10^{-3}	30.83	0.31×10^{-19}	67.81	0.99963	22.91
3	0.15×10^{-8}	40.83	0.14×10^{-13}	52.41	0.99999	20.52
4	0.2×10^{-9}	43.83	0.15×10^{-13}	53.46	1.	21.67
5	0.5×10^{-9}	44.02	0.15×10^{-15}	59.05	1.	22.63
6	0.3×10^{-9}	39.10	0.16×10^{-17}	58.23	1.	17.28
7	0.3×10^{-11}	44.18	0.14×10^{-8}	38.18	0.99999	17.81
8	0.2×10^{-8}	42.12	0.14×10^{-10}	47.05	0.99999	22.12
9	0.12×10^{-7}	38.76	0.9×10^{-10}	43.63	0.99999	20.56
10	0.24×10^{-8}	40.31	0.14×10^{-10}	45.42	0.99999	20.48

Dans le cas étudié, nous avons constaté qu'il suffisait de considérer :

* Soit le modèle donnant, à l'aide du théorème de BAYES la probabilité la plus forte
* Soit le modèle donnant, par considération des longueurs, la longueur la plus faible.

pour être assuré de déterminer le modèle qui est à l'origine de l'observation.
Nous allons voir que c'est dans la suite que la méthode du maximum de vraissemblance prend tout son intérêt.

IV - LE MODELE CHERCHÉ N'APPARTIENT PAS NECESSAIREMENT A L'ENSEMBLE M_i $i = 1, \ldots\ldots, n$

IV - 1) Théorème de BAYES

Dans ce cas, le théorème de Bayes n'est plus applicable car les évènements $\mathcal{M}_i$ $i = 1, \ldots\ldots, n$ ne forment plus nécessairement une partition. Les simulations nous montrent d'ailleurs, comme nous allons le voir, que son utilisation peut conduire à des conclusions erronées.

<u>Exemples</u>

Nous avons considéré la matrice A (3,40) précédemment utilisée en lui ajoutant une quatrième ligne dont les éléments ont été générés au hasard suivant la loi :

$$f_4(p) \begin{cases} -2p + 2 \text{ si } p \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

En appelant M_4 le modèle ainsi introduit, et en simulant à partir de M_4, nous avons obtenu des résultats dont nous présentons quelques exemples :

Simulations	MODELE 1	MODELE 2	MODELE 3
1	0.99999	0.57×10^{-8}	0.14×10^{-5}
2	0.99999	0.34×10^{-8}	0.31×10^{-4}
3	0.92856	0.0573	0.0140
4	0.999988	0.54×10^{-11}	0.112×10^{-4}
5	0.98425	0.28×10^{-14}	0.0157
6	0.78144	0.916×10^{-3}	0.217
7	0.93004	0.46×10^{-4}	0.0699
8	0.08884	0.25×10^{-9}	0.91115
9	0.99998	0.61×10^{-7}	0.15×10^{-4}
10	0.24×10^{-8}	0.14×10^{-10}	0.99999

Nous voyons que cette méthode nous conduit très souvent, dans ce cas, à considérer comme modèle vrai, le modèle 1 qui n'est pourtant pas à l'origine de la simulation.

IV - 2) Maximum de vraissemblance

Nous allons appliquer cette méthode qui peut, dans bien des cas, répondre aux questions que nous avons posées au début.

Problème de décision : Cas où le modèle exact n'est pas forcement inclus parmi les modèles étudiés.
J.M. PROTH - M.R. FEIX

Reprenons l'exemple introduit plus haut. Nous connaissons la matrice A. Nous pouvons donc simuler à partir de M_1, puis de M_2 et M_3 jusqu'à obtenir la loi de répartition des longueurs des chemins dans ces différents cas. C'est ce que nous avons fait dans l'exemple présenté. Nous avons opéré 1 000 simulations en partant de chacun dès modèles. Puis nous avons déterminé lès bornes entre lesquelles se situent les longueurs des chemins, avec une probabilité de 0,98, dans les différents cas.

Le graphe ci-joint présente les résultats obtenus, que nous rappellons ici : (voir définition des modèles en III-3)

Modèle 1 à l'origine de la simulation

Bornes des chemins mesurés par référence à M_1 : 15,6 - 28,5
Bornes des chemins mesurés par référence à M_2 : 39,4 - 76,9
Bornes des chemins mesurés par référence à M_3 : 31,09 - 50,2

Modèle 2 à l'origine de la simulation

Bornes des chemins mesurés par référence à M_1 : 28,4 - 43,4
Bornes des chemins mesurés par référence à M_2 : 5,8 - 21,4
Bornes des chemins mesurés par référence à M_3 : 27,1 - 41,65

Modèle 3 à l'origine de la simulation

Bornes des chemins mesurés par référence à M_1 : 30,5 - 47,65
Bornes des chemins mesurés par référence à M_2 : 33,9 - 72,1
Bornes des chemins mesurés par référence à M_3 : 16,29 - 28,15

Ce type de résultats peut toujours être obtenu par simulation. Nous avons alors, partant du modèle 4 qui ne fait pas partie de l'ensemble dès modèles connus, fait 1 000 autres expériences, avec la même seuil de 98 % et nous avons observé que la longueur d'un chemin mesuré par référence à

M_i (i = 1, 2, 3) était extérieur (voir graphique) à l'intervalle des longueurs des chemins obtenus par simulation à partir de M_i , et mesurés par référence à M_i (voir graphe). En d'autres termes, et avec un degré de confiance de 98 % , nous pouvons rejeter, comme n'étant pas à l'origine de l'expérience :

* M_1, si la longueur du chemin obtenu, mesurée par référence à M_1, n'appartient pas à l'intervalle (15,6 - 28,5)
* M_2, si la longueur du chemin obtenu, mesurée par référence à M_2, n'appartient pas à l'intervalle (5,8 - 21,4)
* M_3, si la longueur du chemin obtenu, mesurée par référence à M_3, n'appartient pas à l'intervalle (16,29 - 28,15)

Nous allons donner quelques exemples d'utilisation des résultats obtenus par simulation (notons que les résultats des simulations à partir de M_4 ne nous sont pas connus).

Exemple 1

Le chemin observé nous a donné :

a) - par référence à M_1, une longueur de 33.5
b) - par référence à M_2, une longueur de 79.13
c) - par référence à M_3, une longueur de 43.76

Nous constatons que : $33.5 \notin (15.6 - 28.5)$
$77.13 \notin (5.8 - 21.4)$
$43.76 \notin (16.29 - 28.15)$

Nous en concluerons donc que le modèle qui est à l'origine de l'observation n'est pas un des trois modèles donnés (ce qui est exact).

Remarquons que les calculs faits sur cet exemple par utilisation du théorème de Bayes auraient conduit aux résultats

- Modèle 1 : 0. 99999
- Modèle 2 : 0.15×10^{-19}
- Modèle 3 : 0.35×10^{-4}

ce qui aurait pu nous entrainer à conclure que le modèle 1 est à l'origine de la simulation, alors que la simulation avait été faite à partir du modèle inconnu M_4.

Exemple 2

Nous avons obtenu, pour le chemin observé :

a) - par référence à M_1, une longueur de 34.08
b) - par référence à M_2, une longueur de 14.12
c) - par référence à M_3, une longueur de 31.49

Nous constatons que $14.12 \in (5.8 - 21.4)$
et que, de plus $34.08 \in (28.4 - 43.4)$
et $31.49 \in (27.1 - 41.65)$

Nous en concluerons que M_2 est à l'origine de la simulation, ce qui était le cas.

Dans ce cas d'ailleurs, nous obtenons à l'aide du théorème de Bayes :

Pour le modèle 1 : 0.21×10^{-8}
Pour le modèle 2 : 0.99999
Pour le modèle 3 : 0.28×10^{-7} , et nous aurions été conduits, dans ce cas, à une conclusions exacte.

En pratique, la difficulté reside dans le choix du seuil. Les expériences faites jusqu'à présent et qui se continuent, semblent indiquer qu'il faut le choisir de telle sorte que, l'intervalle obtenu pour les longueurs mesurées par référence au modèle qui est à l'origine de la simulation soit disjoint avec les autres intervalles, et cèci pour chaque cas de simulation.

V - CONCLUSION

Nous ne cherchons pas, dans ce qui précède, à donner un test statistique, mais plus modestement, une méthode d'approche du problème qui, dans la majorité des cas sur lesquels nous nous sommes penchés, a conduit à des résultats satisfaisants.

Il semblerait que nous soyons amenés à nous attacher, dans une prochaine étape, à définir une "distance" entre les différents modèles, et ceci afin de préciser la notion de "differenciation entre modèles". Cette "distance", calculée à partir de la matrice A, devrait nous permettre d'obtenir à priori, le seuil utilisé. Comme nous l'avons remarqué en III - 2 elle fera intervenir la moyenne des chemins et également la dispersion autour de cette moyenne.

Problème de décision : Cas où le modèle exact n'est pas forcément inclus parmi les modèles étudiés.

J.M. PROTH - M.R. FEIX