



## TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1<sup>er</sup> au 5 juin 1971

---

Application d'une méthode originale d'identification à la détermination par écho sonar de la forme d'un obstacle sous-marin.

Jean-François CROCE-SPINELLI

Simon LARCHER

Jacques VERNIN,

ingénieurs à la SEMA (METRA INTERNATIONAL)

---

**RESUME**

Cette communication traite du problème de la détermination de la forme d'un obstacle réfléchissant à partir de l'observation locale de l'écho. On décrit le principe d'une approche du problème, procédant d'une idée tout à fait générale que nous avons appelée identification progressive. Elle permet de ramener le problème initial à un problème de Cauchy pour une équation fonctionnelle d'un type particulier, méthode dont on montrera le grand intérêt pratique.

**SUMMARY**

This paper is devoted to the inverse scattering problem of identifying the shape of a totally reflecting object imbedded in waves produced by a unique source, from remote wave measurements. An approach is given here, which is based on quite general an idea we called progressive identification. As a result, the original problem is reduced to a simpler one: it is just necessary to solve an initial value problem for a functional equation of a particular type, which is a rather flexible way, as will be shown using special hypotheses in order to make explanations easier.



---

### AVANT-PROPOS

Le problème dont traite cette communication est celui de trouver, par l'observation locale de l'écho d'un signal connu, la forme de l'obstacle responsable de cet écho. Il est inutile de souligner son intérêt en vue de la détection.

On décrit essentiellement le principe d'une approche de ce problème, procédant d'une idée tout-à-fait générale que nous avons appelée identification progressive. Son caractère essentiel est de ramener à un problème de Cauchy pour une équation fonctionnelle d'un type particulier - méthode dont les grands avantages seront mis en évidence chemin faisant.

On n'a pas cherché à conférer les apparences de la rigueur à l'exposé, s'attachant plutôt à donner une idée claire de la démarche de base dans un cadre volontairement heuristique. Le lecteur pourra trouver une présentation plus ferme et plus générale dans [2].

Il y a un peu moins d'un an que l'idée décrite ici est étudiée à la SEMA et jusqu'ici nous n'en avons trouvé aucune mention dans la littérature, encore moins de sa mise en oeuvre sous forme systématique. Présentée d'abord sous forme rudimentaire dans [1] elle est exposée de manière plus précise, quoiqu'encore très incomplètement formalisée, dans [2] ; une application numérique au problème de la prospection sismique est en cours [3] ; enfin, une communication sur ce thème a été proposée au congrès I F A C de juin 1972 (Paris). Les études sur le sujet se poursuivent, bien entendu.



---

## 1 - LE PROBLEME : DESCRIPTION QUALITATIVE

Dans un milieu vibrant, non nécessairement homogène ni isotrope, et étendu (pour simplifier) à l'infini dans toutes les directions se trouve un obstacle compact, de frontière "suffisamment régulière", réfléchissante selon une loi connue (obstacle parfaitement rigide par exemple). A partir d'un point connu A du milieu est émis un signal vibratoire de forme connue, à support compact dans le temps (on prendra son début pour instant origine), le milieu étant par ailleurs au repos. Ce signal se propage dans le milieu, se réfléchissant notamment sur l'obstacle. On observe l'état vibratoire du milieu dans une "petite" région B (éventuellement réduite à un point B : dans ce cas on supposera aussi connues certaines dérivées spatiales de l'état vibratoire) au cours du temps. Il s'agit de restituer à partir de là la frontière de l'obstacle, inconnue a priori.

Dans la suite on fera table rase d'un certain nombre de difficultés qui seraient tout-à-fait sérieuses dans une méthode opérationnelle, mais dont la prise en compte ne ferait qu'alourdir un exposé de principe comme celui-ci. Ainsi, on ne s'attachera qu'au cas d'ondes de pressions linéaires dans un fluide homogène (hypothèse dont on s'affranchit sans peine pourvu que les dimensions de l'obstacle correspondent à une variation négligeable des propriétés du milieu). D'autre part, on supposera que le signal émis est une impulsion ; cela n'est pas fondamental, mais le signal étant observé en B avant son écho il est raisonnable de commencer par "déconvoluer". Enfin, on axera l'exposé sur un problème modèle académique indiquant seulement à grands traits comment appliquer la méthode dans le cas général.

On considérera donc le cas où la région B est réduite à un point B, et où l'obstacle est de révolution autour de l'axe AB. Ce



---

problème bidimensionnel permet une simplification importante de l'exposé de principe, tout en évitant certaines difficultés de formulation dues au traînage dans les "vrais" cas bidimensionnels. Insistons sur le fait que le choix de ce cadre artificiel n'est dû qu'au souci d'être clair dans le cadre d'un exposé très bref, et que la validité de la méthode n'est nullement tributaire de ces hypothèses adaptées au besoin de la cause. Le lecteur est encore une fois invité à se reporter à [2].



## 2 - FORMULATION EN POTENTIELS RETARDES

Il y a plusieurs manières de représenter mathématiquement le phénomène qui vient d'être décrit. La plus classique, l'analyse harmonique, a outre ses difficultés propres le défaut de bloquer d'emblée le mécanisme que nous nous proposons de mettre en oeuvre. La formulation la plus propice semble être celle qui utilise les potentiels retardés. Renvoyant à [4] le lecteur soucieux d'une présentation plus approfondie, nous en donnons ici une brève introduction.

L'état du système est décrit par la fonction  $u(M, t)$  (représentant ici la pression); il est supposé être initialement en état de repos. Le signal émis au point A est de la forme  $\delta_A \otimes f(t)$ , où  $f(t)$  représente le "top".

L'obstacle ("rigide") est figuré par un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$ , soit  $\Omega$ , de frontière  $\Gamma$  "suffisamment régulière". On notera  $\mathcal{O} = \mathbb{R}^3 - \bar{\Omega}$  l'extérieur de l'obstacle.

On cherche donc  $u(M, t)$  dans  $\mathcal{O} \times \mathbb{R}_t^+$ , solution de :

$$(2,1) \square u(M, t) = \delta_A \otimes f(t)$$

$$(2,2) u(M, 0) = 0$$

$$(2,3) \frac{\partial u}{\partial t}(M, 0) = 0$$

$$(2,4) \frac{\partial u(M, t)}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma$$

où  $\vec{n}$  est la normale extérieure à  $\mathcal{O}$ , intérieure à  $\Omega$

$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$  est l'opérateur des ondes (dans la suite, on prendra pour simplifier  $c=1$ ).

Il est alors classique que ce problème est bien posé au sens de Petrowski, (en particulier il n'est pas nécessaire d'adjoindre des conditions aux limites à l'infini, le signal étant à support compact dans le temps).



On considère alors la distribution  $\tilde{u}(M,t)$  qui prolonge  $u$  à  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}t$ , définie par :

$$(2,5) \quad U(M,t) = 0 \text{ pour } t < 0, M \in \mathcal{O}$$

$$(2,6) \quad \tilde{u}(M,t) = u(M,t), \text{ pour } M \in \mathcal{O}$$

$$(2,7) \quad \tilde{u}(M,t) = W(M,t), \text{ pour } M \in \Omega \quad \mathcal{O}$$

où  $W(M,t)$  est la solution du problème de Dirichlet paramétré en  $t$ ,

$$(2,8) \quad \Delta W = 0 \text{ dans } \Omega, \text{ pour tout } t$$

$$(2,9) \quad W(P,t) = U(P,t), \quad P \in \Gamma$$

qui existe donc pourvu que  $u$  soit suffisamment régulière.

On obtient alors par application des formules de Green, au sens des distributions :

$$(2,10) \quad -\Delta \tilde{u} = -[\Delta u] + \mu^0 \sigma,$$

où  $[\Delta u]$  est laplacien au sens ordinaire,  $\mu^0$  la distribution qui a pour valeur sur une fonction test  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$  :

$$(2,11) \quad \langle \mu^0, \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \sigma \varphi \, d\Gamma,$$

où l'on a posé :

$$(2,12) \quad \sigma(M,t) = \frac{\partial u(M,t)}{\partial n} - \frac{\partial w(M,t)}{\partial n}$$

on a donc :

$$(2,13) \quad \square \tilde{u} = \delta_A \otimes f(t) + \mu^0$$

Mais il est connu que la solution élémentaire de l'opérateur  $\square$  dans  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}t$

à support dans  $t > 0$  est :

$$(2,14) \quad \square^{-1} = \frac{1}{4\pi t} \delta_{t-r}$$

où  $\delta_{t-r}$  est la distribution qui a pour valeur sur une fonction test  $\varphi(x,t)$  :



$$\langle \delta_{t-r}, \varphi \rangle = \int_{r=t} \varphi(x, r) dx$$

La solution est donc :

$$(2,15) \quad \bar{u} = \frac{1}{4\pi t} \delta_{t-r} * (\delta_A \otimes f(t)) + \frac{1}{4\pi t} \delta_{t-r} * \mu_\sigma^0$$

on obtient alors pour tout point M extérieur à  $\Omega$  :

$$(2,16) \quad u(M, t) = \Phi(M, t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(P, t-MP)}{MP} d\Gamma_P$$

où P désigne le point courant de  $\Gamma$ .

u est donc la superposition d'une onde incidente  $\Phi(M, t)$ , donnée par :

$$(2,17) \quad \Phi(M, t) = \frac{1}{4\pi AM} f(t-AM),$$

et d'un potentiel retardé de simple couche sur la surface  $\Gamma$ .

La densité superficielle des masses potentiante sera solution de l'équation (intégrale) obtenue par la condition aux limites (2,4), qui s'écrit :

$$(2,18) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n_M} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n_M} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(P, t-MP)}{MP} d\Gamma_P = 0$$

où  $\vec{n}_M$  est le vecteur unité normal à  $\Gamma$  au point M, dirigé vers l'intérieur de  $\Omega$ .

Soulignons ici qu'une difficulté apparaît sur le sens à donner au symbole  $\frac{\partial u}{\partial n_M}$  ; on ne sait pas a priori, en effet, si u(M, t) existe et est dérivable pour M appartenant à  $\Gamma$  : on ne possède que la dérivabilité au sens des distributions de u. On l'obtiendra par le passage à la limite :

$$\frac{u(N_1, t) - u(N_2, t)}{\rho_1 - \rho_2}, \text{ pour } \rho_1 \text{ et } \rho_2 \text{ tendant vers } 0, \text{ avec :}$$

$N_i = M + \rho_i n_M$ . Remarquons encore qu'il est fondamental de choisir  $\rho_1$  et  $\rho_2$  négatifs, car la limite peut dépendre de leur signe.



On va mettre l'équation intégrale (2,18) en  $\sigma(M,t)$  sous une forme plus commode, en extrayant la singularité du deuxième terme :

L'intégrale s'écrit :

$$\int_{\Gamma} \frac{\sigma(P,t-MP)}{MP} d\Gamma_P = \int_{\Gamma} \frac{\sigma(P,t)}{MP} d\Gamma_P + \int_{\Gamma} \frac{\sigma(P,t-MP) - \sigma(P,t)}{MP} d\Gamma_P$$

Avec quelques conditions de régularité sur  $\sigma$  et sur  $\Gamma$ , l'intégrande du deuxième terme possède une dérivée normale continue sur  $\Gamma$ ; donc :

$$\frac{\partial}{\partial n_M} \left[ \int_{\Gamma} \frac{\sigma(P,t-MP) - \sigma(P,t)}{MP} d\Gamma_P \right] = \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_M} \left[ \frac{\sigma(P,t-MP) - \sigma(P,t)}{MP} \right] d\Gamma_P$$

Quant au premier terme, il représente un potentiel newtonien de simple couche paramétré par  $t$ ; on sait alors que sa dérivée normale subit un saut :

$$\frac{\partial}{\partial n_M} \left[ \int_{\Gamma} \frac{\sigma(P,t)}{MP} d\Gamma_P \right] = -2\pi\sigma(M,t) + \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_M} \left[ \frac{\sigma(P,t)}{MP} \right] d\Gamma_P$$

et l'équation intégrale s'écrit :

$$(2,19) \quad -\frac{1}{2} \sigma(M,t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_M} \left[ \frac{\sigma(P,t-MP)}{MP} \right] d\Gamma_P + \frac{\partial \Phi}{\partial n_M} = 0$$

On remarque alors que,  $\Phi(M,t)$  étant donné par l'expression (2,17), il faudra que  $f$  soit dérivable.

La solution du problème direct, c'est à dire calcul du signal reçu au point B connaissant le signal émis et l'obstacle, est alors fournie par (2,16), (2,17), et (2,18). Dès ce niveau les avantages de la formulation du problème en potentiels retardés sont manifestes : alors que les méthodes consistant à faire une transformation de Fourier du problème et à appliquer ensuite les méthodes de potentiel à l'équation de HELMHOLTZ aboutissent à l'intégration d'une équation intégrale "pour chaque fréquence", au



---

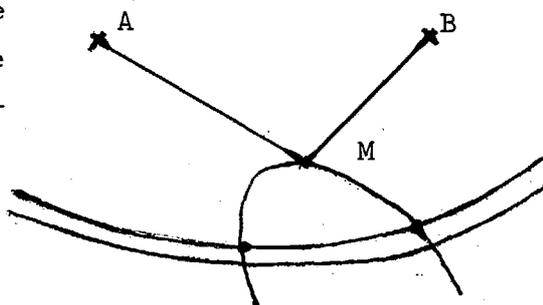
contraire la forme de (2,19) est particulièrement remarquable, puisque, numériquement, elle peut être considéré comme fournissant  $\sigma(M,t)$  en fonction de ses valeurs antérieures; cette circonstance favorable est évidemment due au caractère hyperbolique du phénomène.



### 3 - IDENTIFICATION PROGRESSIVE

Avant de présenter analytiquement l'algorithme proposé, une description verbale de son principe sera peut-être utile. On va la donner dans le cas du problème évoqué au point 1, in fine, à savoir : obstacle de révolution autour de l'axe AB, sans point sur le segment AB, et on va raisonner dans un plan passant par AB, pour un milieu homogène, l'observation étant localisée en un point B du milieu, et le signal impulsionnel.

Remarquons d'abord que dans la formulation en potentiels retardés on a affaire à un milieu entièrement homogène (pas d'obstacle), où se trouve simplement une ligne de singularités qu'il s'agit de localiser. Ainsi, tout ce qui est "entendu" en B jusqu'à l'instant  $t$  "provient" de l'intérieur (fermé) d'une ellipse de foyers A et B, de grand axe  $ct$  ( $c$ , célérité du son dans le milieu) ; en effet, une singularité M ne peut commencer à émettre avant d'être atteinte par le signal venu de A, et pour que cette émission soit entendue en B avant  $t$  on doit avoir  $AM + MB \leq ct$ . On notera  $H_B(t)$  l'intérieur fermé de cette ellipse.



Le schéma de principe est alors celui-ci : supposons identifiée, à partir du signal, observé en B sur  $[0, t]$ , la partie de l'obstacle intérieure à  $H(t)$  ; on va, si c'est possible, identifier la partie comprise entre  $H_B(t)$  et  $H_B(t + dt)$  à l'aide du signal recueilli sur  $[t, t + dt]$  : on aura ainsi "transporté" l'hypothèse de récurrence en  $t + dt$ , et "découplé" l'identification, en ce sens que chaque "tranche d'espace"  $H_B(t + dt) - H_B(t)$  sera traitée individuellement, à partir des renseignements recueillis sur la "tranche de temps"  $t, t + dt$ . On peut com-




---

parer le degré de simplicité de cette façon de faire à celui d'une approche "globale" dans les mêmes termes que la résolution d'un système linéaire triangulaire à celle d'un système plein.

Plus précisément, pour  $dt \rightarrow 0$ , les éléments à identifier se ramènent à deux (1) nombres : les directions des tangentes à la frontière de l'obstacle en ses intersections avec  $H_B(t)$  ; on ramène de la sorte le problème à un problème de Cauchy, apparenté à une équation intégral-différentielle : dérivée en  $t$  de l'inconnue égale fonctionnelle à support à gauche de  $t$  de cette inconnue.

Précisons un peu plus le mécanisme d'identification.

Par construction de  $H(t + dt)$ , il ne peut y avoir de "trajets" extérieurs à  $H(t + dt)$  dans la tranche de signal reçu en  $B$  sur  $t, t + dt$ . Ainsi, sur cette période  $(t, t + dt)$ , le signal entendu en  $B$  pourra se décomposer en deux parties :

- . une partie dont le "trajet" est entièrement intérieur à  $H(t)$  (la notion de trajet reposant ici sur l'influence mutuelle des singularités ; on ne précise pas davantage) ; cette partie peut être complètement restituée à l'aide des renseignements déjà acquis aussi l'appellera-t-on partie prédictible.
- . une partie dont le trajet, contenu dans  $H(t + dt)$  sort de  $H(t)$  ; cette partie sera appelée innovation. On peut d'ailleurs donner du problème une formulation stochastique

---

(1) Les intersections en question sont supposées au nombre de deux seulement pour simplifier cette première présentation.



mettant en évidence un processus d'innovation au sens de Frost [5] .

C'est évidemment à partir de l'innovation qu'on va chercher à identifier la "tranche d'espace" nouvelle. Or cette innovation fait intervenir l'inconnue de façon particulièrement simple, car pour des raisons de délai les trajets sortant de  $H(t)$  (c.à.d. ayant des points dans  $H(t + dt) - H(t)$ ) ne peuvent être, pour  $dt$  "infinitement petit", que des trajets directs ; plus correctement, l'émission d'une singularité intérieure à  $H(t)$  ne peut être influencée par celle d'une singularité située dans  $H(t + dt) - H(t)$ . L'identification locale se fera donc de façon relativement commode, après restitution de la partie prédictible ; et on peut remarquer que la restitution, à chaque instant, de la partie prédictible coïncide avec le calcul, pour un obstacle connu, du signal observé en B.

L'inconnue à identifier à chaque instant consistant en deux nombres (directions des deux tangentes) il est clair que l'innovation devra comprendre au moins deux nombres indépendants pour qu'on puisse avoir une chance de mener à bien l'identification instantanée : on pourra donc observer par exemple, la pression et sa dérivée spatiale dans une certaine direction.

REMARQUE IMPORTANTE : pour appliquer l'approche du cas tridimensionnel, il faudrait considérer une région d'observation B et remplacer  $H_B(t)$  par  $H_{\mathcal{B}}(t) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} H_B(t)$

On n'en dira pas davantage sur ce cas.

Ce raisonnement d'origine physique, dont l'exposition un peu laborieuse ne doit pas dissimuler la simplicité foncière, se traduit analytiquement comme on va l'exposer maintenant.



Au point précédent on a obtenu l'expression du signal reçu au point B, à savoir :

$$(3,1) \quad u(B,t) = \Phi(B,t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\sigma(P,t-BP)}{BP} d\Gamma_P$$

avec :

$$(3,2) \quad \Phi(M,t) = \frac{1}{4\pi AM} f(t-AM)$$

$$(3,3) \quad -\frac{1}{2} \sigma(M,t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n_M} \left[ \frac{\sigma(P,t-MP)}{MP} \right] d\Gamma_P + \frac{\partial \Phi}{\partial n_M} = 0$$

Sans faire ici une étude rigoureuse de l'existence et des propriétés de la solution de cette équation, précisons que  $\sigma$  aura la régularité de la dérivée normale de l'onde incidente  $\Phi$ , ce qui est physiquement intuitif; on peut établir d'autre part que  $\sigma(M,t) \equiv 0$  tant que  $AM > t$ , soit tant que l'onde incidente n'a pu venir illuminer le point M; on peut alors préciser les domaines d'intégration :

$$(3,4) \quad u(B,\theta) = \Phi(B,\theta) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma(\theta)} \frac{\sigma(P,\theta-BP)}{BP} d\Gamma_P$$

où  $\Gamma(\theta) = \Gamma \cap H(\theta) = \{ P \mid P \in \Gamma, AP+BP \leq \theta \}$

$H(\theta)$  étant l'intérieur (fermé) de l'ellipsoïde de foyers A et B et de grand axe  $\theta$ , de révolution autour de A et B.

De même on aura :

$$(3,5) \quad -\frac{1}{2} \sigma(M,t) + \frac{1}{4\pi} \int_{E_M(t)} \frac{\partial}{\partial n_M} \left[ \frac{\sigma(P,t-MP)}{MP} \right] d\Gamma_P + \frac{\partial \Phi}{\partial n_M}(M,t) = 0$$

où  $E_M(t)$  est l'intersection de  $\Gamma$  avec l'intérieur de l'ellipsoïde de foyers A et M de grand axe  $t$ .

On peut alors évaluer la "condition initiale"  $\sigma(M,t)$  pour  $t=AM$ , en un point M de la surface :



Le domaine d'intégration de (3,5) devient :

$$E_M(AM) = \{ P \mid P \in \Gamma, AP + PM \leq AM \}, M \in \Gamma$$

C'est donc l'intersection de  $\Gamma$  et du segment fermé  $AM$ , qui est de mesure superficielle nulle. L'intégrale correspondante sera nulle a priori pour tout point  $P$  différent de  $M$ ; seule subsistera la singularité correspondant au point  $M$  lui-même :

En écrivant :

$$(3,6) \quad \frac{\partial}{\partial n_M} \left[ \frac{\sigma(P, t - MP)}{MP} \right] = - \frac{\cos \varphi}{r^2} \left[ \sigma(P, t - MP) + r \frac{\partial \sigma}{\partial t} (P, t - MP) \right]$$

où l'on a posé  $r = MP$ , et  $\varphi$  est l'angle  $(\vec{n}_M, \vec{MP})$ , et, en utilisant le développement :

$$\sigma(P, t - MP) + r \frac{\partial \sigma}{\partial t} (P, t - MP) = \sigma(P, t) - \frac{r^2}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} (P, t - \rho r), \quad \rho \in ]0, 1[$$

(pourvu que  $f$  soit suffisamment régulière), on obtient :

$$\int_{E_M(t)} \frac{\partial}{\partial n_M} \left[ \frac{\sigma(P, t - MP)}{MP} \right] d\Gamma_P = - \int_{E_M(t)} \sigma(P, t) \frac{\cos \varphi}{r^2} d\Gamma_P -$$

$$\int_{E_M(t)} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} (P, t - \rho r) \cos \varphi d\Gamma_P$$

Quand  $t$  tend vers  $AM$ , la seconde intégrale a pour limite zéro et la première :  $-\sigma(M, t) J(M)$ , où  $J(M)$  est l'angle solide sous lequel on voit  $\Gamma$  du point  $M$ , soit  $2\pi$  avec l'hypothèse faite sur la régularité de  $\Gamma$ . On a donc :

$$(3,7) \quad \sigma(M, AM) = \frac{\partial \Phi}{\partial n_M} (M, AM)$$



On peut alors mettre en évidence la progressivité en comparant les signaux reçus à deux instants infiniment voisins  $\vartheta$  et  $\vartheta + \delta\vartheta$  :

$$(3,8) \quad u(B, \vartheta + \delta\vartheta) = \Phi(B, \vartheta + \delta\vartheta) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (\vartheta + \delta\vartheta)$$

$$\frac{\sigma(P, \vartheta + \delta\vartheta - BP)}{BP} d\Gamma_P$$

ce qui fournit :

$$(3,9) \quad \frac{u(B, \vartheta + \delta\vartheta) - u(B, \vartheta)}{\delta\vartheta} = \frac{\Phi(B, \vartheta + \delta\vartheta) - \Phi(B, \vartheta)}{\delta\vartheta} +$$

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma(\vartheta)} \frac{\partial \sigma(P, \vartheta - BP)}{\partial t} \frac{1}{BP} d\Gamma_P + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\delta\vartheta} \left\{ \int_{\delta(\vartheta)} \frac{\sigma(P, \vartheta + \delta\vartheta - BP)}{BP} d\Gamma_P + \right.$$

$$\left. \frac{\delta\vartheta}{8\pi} \left[ \int_{\Gamma(\vartheta)} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} (P, \vartheta + \rho \delta\vartheta - BP) \frac{1}{BP} d\Gamma_P \right] \right.$$

où l'on a noté  $\delta\Gamma(\vartheta)$  le domaine infinitésimal avec  $\delta\vartheta$  :

$$\delta\Gamma(\vartheta) = \{P \mid P \in \Gamma, \vartheta \leq AP + BP \leq \vartheta + \delta\vartheta\}.$$

La relation de "récurrence" s'écrit encore, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur :

$$(3,10) \quad \frac{\delta u}{\delta\vartheta} = \frac{\delta\Phi}{\delta\vartheta} + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma(\vartheta)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} (P, \vartheta - BP) \frac{1}{BP} d\Gamma_P + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\delta\vartheta}$$

$$\left\{ \int_{\delta\Gamma(\vartheta)} \sigma(P, \vartheta - BP) \frac{1}{BP} d\Gamma_P \right\}$$

Si l'on suppose avoir identifié la surface  $\Gamma$  pour sa partie contenue à l'intérieur (fermé) de l'ellipsoïde  $M(\vartheta)$ , sur la base des observations  $u(B, t)$ , pour  $t \in [0, \vartheta]$ , le membre de droite de la relation (3,10) se présente sous la forme de la somme de deux termes :



$$(3,11) \mathcal{P}(B, \Phi, \Gamma(\sigma)) = \frac{\delta \Phi}{\delta \sigma}(B, \sigma) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma(\sigma)} \frac{\partial \sigma}{\partial t} (P, \sigma - BP) \frac{1}{BP} d\Gamma_P$$

qui est la partie prédictible du signal, puisque l'intégrande porte sur la partie déjà identifiée de  $\Gamma$ , et :

$$(3,12) \mathcal{J}(B, \psi(s), \Gamma(\sigma)) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\delta \sigma} \left\{ \int_{\delta \Gamma(\sigma)} \sigma(P, \sigma - BP) \frac{1}{BP} d\Gamma_P \right\}$$

qui représente l'innovation, et se met sous la forme :

$$(3,13) \mathcal{J}(B, \psi(s), \Gamma(\sigma), \Phi) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\delta \sigma} \left\{ \int_{\delta \Gamma(\sigma)} \frac{1}{BP} \frac{\partial \Phi}{\partial n_P} (P, AP) d\Gamma_P \right\}$$

L'intégrale figurant au membre de droite de (3,13) est une fonctionnelle, qu'on expliciterait facilement, qui fait intervenir, pour ce qui n'a pas été encore identifié à la date  $\sigma$ , la fonction vectorielle  $\psi(s)$  représentant les cosinus directeurs de la normale à la surface  $\Gamma$  au point M d'abscisse curviligne  $s$  sur la courbe intersection, ce qu'il est suffisant de connaître pour pouvoir reconstruire la tranche  $\delta \Gamma(\sigma)$  et calculer tous les éléments correspondants, et recommencer ensuite le processus d'identification.

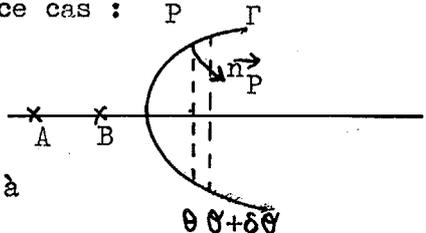
Dans le cas de l'obstacle de révolution, la connaissance de la dérivée du signal au seul point B est suffisante, car, à cause de la symétrie de révolution, l'élément de contact à identifier se réduit à un seul angle, et on a dans ce cas :

$$(3,14) \mathcal{J}(B, \psi, \Gamma(\sigma), \Phi) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{BP} \frac{\partial \Phi}{\partial n_P} (P, AP) \frac{dA}{d\sigma} \right\}$$

où  $\frac{dA}{d\sigma}$  représente la dérivée par rapport à

$\sigma$  de l'aire de  $\Gamma(\sigma)$ , et où on expliciterait

directement l'innovation en fonction de  $\psi$ , qu'on peut alors calculer.





---

Dans le cas où l'obstacle n'est pas de révolution la situation est plus complexe, mais justiciable cependant d'un procédé analogue auquel on a fait allusion supra ; on ne le décrira pas analytiquement.



---

## CONCLUSION

Un long chemin sépare évidemment un tel exposé de principe du reste volontairement intuitif et schématique de la réalisation d'un algorithme opérationnel ; en particulier, s'agissant d'un problème de Cauchy, la question de stabilité ne manquera pas de se poser, tant vis-à-vis des erreurs d'observation que du comportement proprement numérique. Les études poursuivies à la SEMA, si elles ont conduit à un stade plus avancé que celui qui est décrit ici, sont bien loin d'avoir résolu tous les problèmes. En outre, il est certain qu'un gros travail d'approfondissement théorique reste à faire pour faire de cette idée une méthode scientifiquement présentable.

Il nous semble néanmoins que cette approche laisse entrevoir la solution effective d'un problème qui paraissait jusqu'ici tout-à-fait hors de portée et c'est pour cela que nous avons tenu, malgré toutes les lacunes de notre travail actuel, à en communiquer le principe sans plus attendre.



---

REFERENCES

- [1] Commande Optimale et Identification de Systèmes aux Dérivées Partielles : Eléments concernant l'identification d'un coefficient distribué dans l'espace à partir de mesures distribuées dans le temps, Rapport n° 4 à la D.G.R.S.T. - SEMA Octobre 1970.
- [2] J. F. CROCE-SPINELLI : Identification Progressive, présentation provisoire. Note SEMA - Avril 1971 . Disponible auprès de l'auteur.
- [3] Traitement des signaux sismiques et identification stochastique des paramètres physiques du sous-sol. Formulation et principe des méthodes de résolution (rapport SEMA-CFP - Janvier 1971).
- [4] Réflexion d'une onde solitaire sur un obstacle, note interne SEMA, Mars 1970.
- [5] S. LARCHER : Identification progressive et processus d'innovation. Analogies formelles. Note SEMA - Avril 1971 Disponible auprès de l'auteur.