TROISIEME COLLOQUE SUR LE

.TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

DETERMINATION DU RAPPORT DE VRAISEMBLANCE POUR LA DETECTION D'UN SIGNAL GAUSSIEN DANS UN BRUIT NON-STATIONNAIRE GAUSSIEN.

Edith MOURIER

RESUME

La détection d'un signal dans un bruit est un test de choix entre deux hypothèses. Après un bref rappel de résultats généraux, on calcule le rapport de vraisemblance, qui est un résumé exhaustif, en supposant que le bruit d'une part, le mélange bruit et signal d'autre part, sont des processus gaussiens, de moyenne nulle, de covariances continues, connues. On ne fait, par contre, aucune hypothèse de stationnarité, on ne suppose pas non plus que le bruit est additif et indépendant du signal.

SUMMARY

The détection of signal in noise is a test of choice between two statistical hypotheses. After a brief review of some general results, the likelihood ratio, which is a sufficient statistic, is computed assuming that both the noise and the mixture signal and noise are gaussian processes, zero mean, with known continuous covariances. But it is not supposed that the processes are stationary nor that the noise is additive and independent of the signal.

DETERMINATION DU RAPPORT DE VRAISEMBLANCE POUR LA DETECTION D'UN SIGNAL GAUSSIEN DANS UN BRUIT NON-STATIONNAIRE GAUSSIEN.

Edith MOURIER.

I - RAPPEL DE QUELQUES DEFINITIONS ET RESULTATS FONDAMENTAUX.

La détection d'un signal dans un bruit consiste à décider, à partir d'une observation $x(t)$ sur un intervalle de temps fini $[0,T]$, si l'on est en présence de bruit seul ou d'un mélange bruit et signal.

$\{x(t), t \in [0,T]\}$ peut s'interpréter comme une réalisation d'un processus aléatoire $\{X(t), t \in [0,T]\}$ ou encore comme une observation x d'un élément aléatoire X dans un espace fonctionnel, espace échantillon, $\mathcal{X}$. Le premier point de vue conduisant à considérer la loi temporelle du processus, le second la mesure de probabilité correspondante μ sur $\mathcal{X}$. Nous supposerons, ici, que les propriétés statistiques du bruit seul, hypothèse H_o, d'une part et celles du mélange bruit et signal, hypothèse H_1, d'autre part sont entièrement connues, c'est à dire que la loi de probabilité du bruit est une mesure connue μ_o, celle du mélange bruit et signal une mesure connue μ_1. Le problème de la détection d'un signal est alors celui d'un test de choix entre les deux hypothèses simples H_o : la loi de X est μ_o et H_1 :la loi de X est μ_1.

$\mathcal{X}$ étant un espace quelconque et $\mathcal{A}$ une σ-algèbre quelconque de parties de $\mathcal{X}$, soient λ et μ deux mesures(1) définies sur $\mathcal{A}$. Par définition μ est absolument continue par rapport à λ, noté $\mu << \lambda$, si $\lambda(E) = 0$ implique $\mu(E) = 0$; il existe alors une fonction mesurable f définie sur $\mathcal{X}$, $f(x) \geq 0$, telle que pour tout $A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) = \int_A f(x)\, d\lambda$$

---

(1) Dans cet Article par "mesure" nous sous-entendons mesure positive, bornée ou σ-finie.

f , unique à la λ-équivalence près, est appelée la densité de Radon-Nikodym de μ par rapport à λ et il est commode d'écrire $f = \frac{d\mu}{d\lambda}$ (1).

Si λ, μ, ν sont 3 mesures définies sur $\mathcal{A}$, telles que : $\mu << \lambda$ et $\nu << \mu$ alors $\nu << \lambda$ et :

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu} \times \frac{d\mu}{d\lambda} \qquad (1)$$

Etant données 2 mesures μ et ν quelconques définies sur $\mathcal{A}$, il existe toujours une mesure λ définie sur $\mathcal{A}$, par rapport à laquelle μ et ν sont absolument continues, il suffit par exemple de prendre $\lambda = \mu + \nu$.

Par définition, 2 mesures μ et ν sont équivalentes, noté $\mu \sim \nu$, si $\mu << \nu$ et $\nu << \mu$ c'est à dire si elles ont les mêmes ensembles de mesure nulle.

Par définition, μ et ν sont mutuellement singulières, ou orthogonales, noté $\mu \perp \nu$, s'il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que :

$$\mu(A) = \nu(A^c) = 0$$

A^c désignant le complémentaire, $\mathcal{X} - A$, de A .

Soit X un élément aléatoire dans un espace quelconque $(\mathcal{X}, \mathcal{A})$ de loi de probabilité μ_o ou μ_1 , soit λ une mesure par rapport à laquelle μ_o et μ_1 sont absolument continues et :

$$f_o = \frac{d\mu_o}{d\lambda} \qquad f_1 = \frac{d\mu_1}{d\lambda}$$

α étant un nombre donné, $0 < \alpha < 1$, il existe, (9) un test pour lequel la probabilité de fausse alarme est égale à α et qui minimise la probabilité de non-détection ; x étant la valeur observée de X ce test consiste à :

(1) Les numéros ( ) renvoient à la Bibliographie.

$$\begin{cases} \text{choisir } H_1 \text{ si } \dfrac{f_1(x)}{f_o(x)} > K \\ \\ \text{choisir } H_o \text{ si } \dfrac{f_1(x)}{f_o(x)} < K \end{cases} \qquad (2)$$

K étant une constante dépendant de α, μ_o et μ_1. Ce test est défini de façon unique par la règle (2) sauf sur l'ensemble $\{x : \dfrac{f_1(x)}{f_o(x)} = K\}$ où le choix entre H_o et H_1 peut se faire avec des probabilités $P_o(x)$, $P_1(x)$, $(P_o(x) + P_1(x) = 1)$, astreintes seulement à satisfaire à la condition que la probabilité de fausse alarme soit égale à α.

Sous des hypothèses peu restrictives pour les applications [3], (par exemple il suffit que $\mathcal{X}$ soit un espace de Banach séparable et réflexif et $\mathcal{A}$ la σ-algèbre des Boréliens), le rapport des densités de Radon-Nikodym, ou rapport de vraisemblance, $\dfrac{f_1}{f_o}(x)$, constitue un résumé exhaustif pour le choix entre μ_o et μ_1.

Le problème fondamental de la détection d'un signal dans un bruit est donc la détermination effective de ce rapport, problème qui n'est actuellement résolu que dans quelques cas particuliers.

II - DETECTION D'UN SIGNAL GAUSSIEN DANS UN BRUIT GAUSSIEN.

Lorsque le processus représentant le bruit et celui représentant le mélange bruit et signal sont des processus réels, gaussiens on a les simplifications suivantes :

1) la loi temporelle d'un processus gaussien $X(t)$ est entièrement déterminée par les moments du premier et du second ordre :

$$m(t) = E[X(t)]$$

$$\Gamma(s,t) = E[X(s)\ X(t)]$$

2) Les mesures associées à deux processus gaussiens sur $[0,T]$ sont ou équivalentes ou orthogonales [2], [5] et on connait des conditions nécessaires et suffisantes pour être dans l'un ou l'autre cas. Dans le cas de mesures orthogonales il est possible de construire un test permettant de prendre une décision correcte avec une probabilité égale à un. En pratique, ne serait-ce que par l'existence de bruit thermique, on se trouve en fait en présence de mesures équivalentes ; dans ce cas le calcul du rapport de vraisemblance se ramène au calcul de la densité de Radon-Nikodym de l'une d'elles par rapport à l'autre.

Considérons 3 mesures gaussiennes $\lambda_o, \lambda_1, \lambda_{o1}$ caractérisées par :

$$\begin{array}{llll} \lambda_o : & m_o(t) & \Gamma_o(s,t) & \\ \lambda_1 : & m_1(t) & \Gamma_1(s,t) & s,t \in [0,T] \\ \lambda_{o,1} : & m_1(t) & \Gamma_o(s,t) & \end{array}$$

$\lambda_o \sim \lambda_1$ implique, [8], $\lambda_o \sim \lambda_{o1}$ et $\lambda_{o1} \sim \lambda_1$, et d'après la règle (1) :

$$\frac{d\lambda_1}{d\lambda_o} = \frac{d\lambda_1}{d\lambda_{o1}} \times \frac{d\lambda_{o1}}{d\lambda_o}$$

Par conséquent pour calculer le rapport de vraisemblance de 2 mesures gaussiennes équivalentes quelconques il suffit de calculer d'une part le rapport de 2 mesures gaussiennes de même covariance ne différant que par l'espérance mathématique, problème bien connu [3], [10] et d'autre part celui de 2 mesures gaussiennes de même espérance mathématique (et on pourra alors sans restreindre la généralité supposer $m_o(t) = m_1(t) = 0$) de covariances différentes.

III - RAPPORT DE VRAISEMBLANCE DE 2 PROCESSUS GAUSSIENS DIFFERANT PAR LA COVARIANCE :

Dans tout ce qui suit nous supposerons que :

1) le bruit est représenté par un processus réel, gaussien de moyenne nulle, $m_o(t) = 0$, de covariance connue $\mu_o(s,t)$;

2) le mélange bruit et signal est représenté par un processus réel, gaussien de moyenne nulle, $m_1(t) = 0$, de covariance connue $\Gamma_1(s,t)$;

3) nous supposerons de plus que ces 2 processus sont continus en moyenne quadratique, ce qui équivaut à supposer que les covariances $\Gamma_o(s,t)$, $\Gamma_1(s,t)$ sont des fonctions continues de $s,t \in [0,T]$. Ceci implique que, presque-sûrement μ_o et μ_1, ce que nous noterons en abrégé p.s. μ_o et μ_1, l'observation $\{x(t), t \in [0,T]\}$ est de carré sommable et que l'on peut prendre pour espace échantillon l'espace de Hilbert, noté L^2, (séparable et réflexif) des fonctions de carré sommable sur $[0,T]$ et associer aux 2 processus les mesures correspondantes, μ_o et μ_1, qu'ils déterminent sur la σ-algèbre $\mathcal{A}$ des Boréliens de L^2. De plus $\Gamma_i(s,t)$, $(i = 0,1)$, étant continue on peut lui associer l'opérateur linéaire, borné donc continu, symétrique et compact, noté Γ_i, de L^2 dans lui-même qui à tout $f \in L^2$ fait correspondre $\Gamma_i f \in L^2$ définie par :

$$\Gamma_i f(s) = \int_0^T f(t)\, \Gamma_i(s,t)\, dt \qquad s \in [0,T]$$

$\Gamma_i(s,t)$ étant une covariance est une fonction définie positive, c'est à dire que, $\forall f \in L^2$, $\Gamma_i f.f \geq 0$ (1) ;

(1) pour 2 éléments f,g de L^2 nous notons $f.g$ le produit scalaire, c'est à dire $f.g = \int_0^T f(t)\, g(t)\, dt$, et $||f|| = \sqrt{f.f}$ la norme de f.

4) Nous supposerons que Γ_i , $(i = 0,1)$ est strictement positif, c'est à dire que $\Gamma_i f.f = 0$ si et seulement si f est l'élément nul de L^2 , c'est à dire si $f(t) = 0$ presque-partout sur $[0,T]$. Cette dernière hypothèse permet de définir les opérateurs Γ_i^{-1} , opérateur inverse de Γ_i , $\Gamma_i^{-1/2}$, inverse de $\Gamma_i^{1/2}$, sur des ensembles denses dans L^2 ; notons que ces opérateurs sont linéaires et symétriques mais ne sont pas bornés.

Par contre nous ne faisons aucune hypothèse de stationnarité sur le bruit ou le mélange bruit et signal, nous ne supposons pas non plus que le bruit est additif et indépendant du signal.

Sous ces hypothèses ROOT [14] a montré que si l'un ou l'autre des opérateurs $\Gamma_1^{1/2}\,\Gamma_o^{-1/2}$, $\Gamma_o^{1/2}\,\Gamma_1^{-1/2}$ est non-borné, alors $\mu_o \perp \mu_1$, cas que nous écartons. Supposons donc que $\Gamma_1^{1/2}\,\Gamma_o^{-1/2}$ est borné, alors, puisqu'il est défini sur un ensemble dense dans L^2 , on peut le prolonger par continuité à l'espace tout entier, soit A son extension bornée à L^2 , et désignons par A^* son adjoint, c'est à dire l'opérateur linéaire, borné, défini sur L^2 et vérifiant :

$$A\, f.g = f.A^*\, g \qquad \forall\, f,g \in L^2 \quad .$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que (1) $\mu_o \sim \mu_1$ est qu'il existe une suite de nombres $\{\lambda_n\}$ vérifiant :

$$\sum_n (1-\lambda_n)^2 < +\infty$$

et une suite orthonormée $\{f_n\}$ de fonctions de L^2 , telles que, P_n désignant l'opérateur projection orthogonale sur f_n , on ait :

$$A^*\, A = \sum_n \lambda_n\, P_n \quad .$$

---

(1) par la notation abrégée $\sum_n$ nous entendons la somme de la série, c'est à dire $\sum_{n=1}^{\infty}$.

Les λ_n sont donc les valeurs propres non nulles et les f_n les fonctions propres, orthonormées, correspondantes de l'opérateur $A^* A$, c'est à dire :

$$A^* A f_n = \lambda_n f_n \qquad n = 1,2,\ldots$$

Supposons $\mu_o \sim \mu_1$ et soit $\mathcal{D}(\Gamma_o^{-1/2})$ le domaine, dense dans L^2, sur lequel $\Gamma_o^{-1/2}$ est défini ; pour chaque n il existe une suite $\{f_{nj}\}$ telle que :

$$f_{nj} \in \mathcal{D}(\Gamma_o^{-1/2}) \qquad j = 1,2,\ldots$$

et que $f_{nj} \to f_n$ (au sens de la convergence forte dans L^2, c'est à dire $||f_{nj} - f_n|| \to 0$) lorsque $j \to +\infty$.

$\{x(t), t \in [0,T]\}$ désignant toujours l'observation faite, posons :

$$\theta_{nj}(x) = \int_0^T x(t) \left(\Gamma_o^{-1/2} f_{nj}\right)(t)\, dt \qquad (3)$$

cette intégrale est bien définie puisque c'est le produit scalaire, $x.\Gamma_o^{-1/2} f_{nj}$, de 2 éléments de L^2.

Pour chaque n, les θ_{nj} convergent en moyenne quadratique à la fois par rapport à μ_o et par rapport à μ_1 vers une limite θ_n et, $X(t)$ étant un processus gaussien, les $\theta_n(X)$ sont des variables aléatoires gaussiennes satisfaisant à(1) :

$$E_o\left(\theta_n(X)\right) = E_1\left(\theta_n(X)\right) = 0 \qquad n = 1,2,\ldots$$

$$\left| \begin{array}{l} E_o\left(\theta_n\, \theta_m\right) = \delta_{n,m} \\ E_1\left(\theta_n\, \theta_m\right) = \lambda_n\, \delta_{n,m} \end{array} \right. \qquad n,m = 1,2,\ldots$$

(1) E_i $(i = 0,1)$ désigne l'espérance mathématique sous l'hypothèse H_i, donc calculée avec la mesure μ_i.

avec $\delta_{n,m} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq m \\ 1 & \text{si} \quad n = m \end{cases}$

ce sont donc des variables aléatoires indépendantes tant sous l'hypothèse H_o que sous l'hypothèse H_1 .

En utilisant un théorème de KAKUTANI sur les produits infinis de mesures on peut alors démontrer [14] que la dérivée de Radon-Nikodym de μ_o par rapport à μ_1 est :

$$\frac{d\mu_o}{d\mu_1}(x) = \exp .\{\frac{1}{2} \sum_n [(\frac{1}{\lambda_n} - 1)\, \theta_n^2(x) + \log \lambda_n]\} \quad (4)$$

La règle (1) de composition des dérivées de Radon-Nikodym donne immédiatement :

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_o}(x) = \frac{1}{\frac{d\mu_o}{d\mu_1}(x)} \quad .$$

Si on suppose de plus que :

$$\sum_n \left|\frac{1}{\lambda_n} - 1\right| < + \infty$$

alors la série $\sum_n (\frac{1}{\lambda_n} - 1)\, \theta_n^2$ converge presque sûrement μ_o et μ_1 et (4) peut s'écrire :

$$\text{Log}\, \frac{d\mu_o}{d\mu_1}(x) = \frac{1}{2} \log (\prod_n \lambda_n) + \frac{1}{2} \sum_n (\frac{1}{\lambda_n} - 1)\, \theta_n^2(x) \quad (5)$$

Le terme $\frac{1}{2} \log(\prod_n \lambda_n)$ ne dépendant pas de l'observation x , il en résulte que la fonctionnelle :

$$g(x) = \sum_n (\frac{1}{\lambda_n} - 1)\, \theta_n^2(x) \qquad (6)$$

est un résumé exhaustif pour le choix entre H_o et H_1 . Le test qui, pour une probabilité de fausse alarme donnée, minimise la probabilité de non-détection, consiste alors à décider H_o ou H_1

selon que $g(x)$ est supérieur ou non à un certain seuil.

Si en outre la série :

$$\sum_n \left|\frac{1}{\lambda_n} - 1\right| \left(\int_0^T \left| \left(\Gamma_o^{-1/2} f_{nj}\right)(t) \right| dt \right)^2$$

converge uniformément pour $j = 1,2,\ldots$ vers une limite $B_j < B$, alors ce test est stable (15) en ce sens que si les lois du bruit et du mélange bruit et signal ne sont pas exactement μ_i $(i = 0,1)$ mais des mesures μ_i^k, alors si $\forall k$ $\mu_i^k \sim \mu_i$ et si la suite $\{\mu_i^k\}$ converge vers μ_i (au sens usuel de la convergence faible des mesures) alors la fonction de répartition de la variable aléatoire $g(X)$ induite par μ_i^k converge vers celle induite par μ_i.

Une difficulté d'application de ces résultats généraux provient du fait que les $\theta_n(x)$ ne sont pas définis explicitement.

Dans le cas particulier où toutes les fonctions propres f_n de l'opérateur $A^* A$ appartiennent à $\mathcal{D}(\Gamma_o^{-1/2})$ posons :

$$h_n = \Gamma_o^{-1/2} f_n \qquad n = 1,2,\ldots$$

alors :

$$\theta_n(x) = \int_0^T x(t)\, h_n(t)\, dt$$

De plus les λ_n et les h_n sont solution (11),(12) de l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma_1 h = \lambda \Gamma_o h \quad .$$

L'étude de cette équation est faite par BAKER (1) dans sa Thèse.

RAO et VARADAJAN (13) ont montré que la fonctionnelle $g(x)$ est une forme quadratique si et seulement si :

1) $\Gamma_1(L^2) = \Gamma_o(L^2)$

2) $(\Gamma_1^{-1} - \Gamma_o^{-1})\,\Gamma_o^{1/2}$ a une extension bornée M à L^2 avec : trace $M^* M < +\infty$.

Dans ce cas la fermeture de $\Gamma_1^{-1} - \Gamma_o^{-1}$ existe, est un opérateur symétrique, fermé, K , tel que [1] :

$$\mu_o(\mathcal{D}(K)) = \mu_1(\mathcal{D}(K)) = 1$$

et on a :

$$\log \frac{d\mu_o}{d\mu_1}(x) = \frac{1}{2}\log|S| + \frac{1}{2}(Kx.x) \qquad (7)$$

où S est un opérateur symétrique borné vérifiant l'équation :

$$\Gamma_1 = \Gamma_o^{1/2}\, S\, \Gamma_o^{1/2}$$

et tel que trace $(S-I)^2 < \infty$.

Forme intégrale du résumé exhaustif.

Sous les hypothèses 1), 2), 3) et 4) faites au début de ce § III nous allons donner une nouvelle expression du rapport de vraisemblance $\frac{d\mu_1}{d\mu_o}(x)$.

Les opérateurs Γ_i , $(i = 0,1)$, étant symétriques, compacts et strictement positifs sur L^2 , admettent une infinité dénombrable de valeurs propres positives, que l'on peut numéroter par valeurs non-croissantes, qui convergent vers zéro et des fonctions propres correspondantes qui constituent une base orthonormée dans L^2 .

Soit : $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots$, ψ_1 , ψ_2 , ... les valeurs propres et fonctions propres orthonormées correspondantes de Γ_o $(\Gamma_o\, \psi_j = \lambda_j\, \psi_j)$;

(1) $\mathcal{D}(K)$ désigne le sous-ensemble de L^2 sur lequel K est défini.

: $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots$, ϕ_1 , ϕ_2 , ... celles de Γ_1 .

Les covariances $\Gamma_o(s,t)$, $\Gamma_1(s,t)$ étant par hypothèse continues, les fonctions propres $\Psi_j(t)$, $\phi_j(t)$ $(j = 1,2,\dots)$ sont des fonctions continues sur $[0,T]$. Posons :

$$u_{jk} = \int_0^T \phi_j(t)\, \Psi_k(t)\, dt \qquad j,k = 1,2,\dots$$

on pourra écrire :

$$\left.\begin{aligned} \Psi_k &= \sum_j u_{jk}\, \phi_j \\ \phi_j &= \sum_k u_{jk}\, \Psi_k \end{aligned}\right\} \text{ au sens de la convergence dans } L^2$$

d'où, par exemple : $\sum_j |u_{jk}|^2 = \sum_k |u_{jk}|^2 = 1$

$$\sum_\ell u_{j\ell}\, u_{k\ell} = \sum_\ell u_{\ell j}\, u_{\ell k} = \delta_{j,k} .$$

Posons :

$$\xi_j(X) = \int_0^T X(t)\, \Psi_j(t)\, dt$$

Sous l'hypothèse H_o les ξ_j sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes :

$$\left.\begin{aligned} E_o\, \xi_j &= 0 \\ E_o\, \xi_j\, \xi_k &= \alpha_j\, \delta_{j,k} \end{aligned}\right. \qquad j,k = 1,2,\dots$$

et pour n donné quelconque $(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ est une variable gaussienne n-dimensionnelle de densité :

$$P_o(\xi_1,\dots,\xi_n) = (2\Pi)^{-n/2}\, |Q_o^{(n)}|^{-1/2} \exp\{-\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} ((Q_o^{(n)})^{-1})_{jk}\, \xi_j \xi_k\}$$

où $Q_o^{(n)}$ est la matrice $n\times n$ d'éléments :

$$(Q_o^{(n)})_{jk} = \alpha_j\, \delta_{j,k} \qquad j,k = 1,2,\dots$$

et où $|Q_o^{(n)}|$ désigne le déterminant de la matrice.

Sous l'hypothèse H_1 les ξ_j sont encore des variables gaussiennes et $E_1\,\xi_j = 0 \quad j = 1,2,\ldots$ mais ce ne sont plus des variables aléatoires indépendantes. Pour déterminer la loi de $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ sous l'hypothèse H_1, posons :

$$\eta_j(X) = \int_0^T X(t)\,\phi_j(t)\,dt$$

sous l'hypothèse H_1 les η_j sont des variables aléatoires gaussiennes indépendantes :

$$E_1\,\eta_j = 0$$

$$E_1\,\eta_j\,\eta_k = \beta_j\,\delta_{j,k} .$$

Posons :

$$\xi_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} u_{kj}\,\eta_k \qquad j = 1,2,\ldots,n .$$

KADOTA [7] montre que $\xi_j^{(m)}$ tend μ_o et μ_1 presque-sûrement vers ξ_j lorsque $m \to +\infty$.

La fonction caractéristique $\phi^{(m)}(v_1,\ldots,v_n)$ de $(\xi_1^{(m)},\ldots,\xi_n^{(m)})$ est :

$$\phi^{(m)}(v_1,\ldots,v_n) = \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} v_j\,v_k\,\beta_\ell\,u_{\ell j}\,u_{\ell k}\}$$

$$\text{et}\quad \lim_{m\to\infty}\phi^{(m)}(v_1,\ldots,v_n) = \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(Q_1^{(n)})_{jk}\,v_j\,v_k\} .$$

Sous l'hypothèse H_1, $(\xi_1,\ldots,\xi_n)$ est donc une variable gaussienne n-dimensionnelle de densité :

$$p_1(\xi_1,\ldots,\xi_n) = (2\Pi)^{-n/2}|Q_1^{(n)}|^{-1/2}\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n}((Q_1^{(n)})^{-1})_{jk}\,\xi_j\xi_k\}$$

où $Q_1^{(n)}$ est la matrice $n{\times}n$ d'éléments :

$$\left(Q_1^{(n)}\right)_{jk} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \beta_\ell \, u_{\ell j} \, u_{\ell k}$$

nous poserons : $\sum_\ell \beta_\ell \, u_{\ell j} \, u_{\ell k} = a_{jk}$.

Lorsque $\mu_o \sim \mu_1$ le rapport de vraisemblance :

$$\ell_n = \frac{P_1(\xi_1,\ldots,\xi_n)}{P_o(\xi_1,\ldots,\xi_n)}$$

tend presque-sûrement (μ_o et μ_1), lorsque $n \to \infty$, vers la densité de Radon-Nikodym $\frac{d\mu_1}{d\mu_o}$ (4) .

On a donc :

$$\frac{d\mu_1}{d\mu_o}(x) = \lim_{n\to\infty}\left\{\left|Q_o^{(n)}\left(Q_1^{(n)}\right)^{-1}\right|^{1/2} \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{n} \left((Q_o^{(n)})^{-1} - (Q_1^{(n)})^{-1}\right)_{jk} \xi_j(x)\, \xi_k(x)\right\}\right\} .$$

KADOTA a montré (7) que $\mu_o \sim \mu_1$ si et seulement si :

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{trace}\left((Q_o^{(n)})^{-1} Q_1^{(n)} - 2I + Q_o^{(n)}(Q_1^{(n)})^{-1}\right) < \infty$$

si on suppose de plus que :

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{trace}\left((Q_o^{(n)})^{-1} Q_1^{(n)} - I\right) < \infty$$

et $\hfill (8)$

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{trace}\left(Q_o^{(n)}(Q_1^{(n)})^{-1} - I\right) < \infty$$

alors $\left|Q_o^{(n)}(Q_1^{(n)})^{-1}\right|$ a une limite pour $n \to \infty$, il en résulte que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left((Q_o^{(n)})^{-1} - (Q_1^{(n)})^{-1}\right)_{jk} \xi_j(x)\, \xi_k(x) < +\infty \qquad (9)$$

presque-sûrement μ_o et μ_1 , et on peut écrire :

$$\log \frac{d\mu_1}{d\mu_o}(x) = \frac{1}{2} \log \lim_{n\to\infty} |Q_o^{(n)} (Q_1^{(n)})^{-1}|^{1/2}$$

$$+ \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{j,k=1}^{n} \big((Q_o^{(n)})^{-1} - (Q_1^{(n)})^{-1}\big)_{jk}\, \xi_j(x)\xi_k(x)\Big) \quad (10)$$

qu'il est intéressant de rapprocher des expressions (5) et (7).

$|Q_o^{(n)} (Q_1^{(n)})^{-1}|$ ne dépendant pas de l'observation, nous allons étudier le terme :

$$W_n(x) = \sum_{j,k=1}^{n} \big((Q_o^{(n)})^{-1} - (Q_1^{(n)})^{-1}\big)_{jk}\, \xi_j(x)\xi_k(x) \quad (11)$$

et montrer que, sous certaines conditions, le résumé exhaustif :

$$W(x) = \lim_{n \to \infty} W_n(x) \quad (12)$$

peut s'exprimer par une intégrale du type :

$$\int_0^T \int_0^T x(s)\, h(s,t) x(t)\, ds\, dt$$

Posons : $h_{jk}^{(n)} = \big((Q_o^{(n)})^{-1} - (Q_1^{(n)})^{-1}\big)_{jk}$

et désignons par $H^{(n)}$ la matrice d'éléments $h_{jk}^{(n)}$. On a par définition :

$$H^{(n)} = (Q_o^{(n)})^{-1} - (Q_1^{(n)})^{-1}$$

d'où :

$$Q_o^{(n)}\, H^{(n)}\, Q_1^{(n)} = Q_1^{(n)} - Q_o^{(n)} .$$

Rappelons que :

$$\big(Q_o^{(n)}\big)_{jk} = \alpha_j\, \delta_{j,k}$$

$$\big(Q_1^{(n)}\big)_{jk} = a_{jk} = \sum_{\ell=1}^{\infty} \beta_\ell\, u_{\ell j}\, u_{\ell k}$$

il en résulte que pour chaque j , $(j = 1,2,\ldots,n)$, les $h_{jk}^{(n)}$ vérifient les n équations :

$$\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_j \, h_{j\ell}^{(n)} \, a_{\ell k} = a_{jk} - \lambda_j \, \delta_{j,k} \qquad k = 1,2,\ldots,n \qquad (13)$$

Pour chaque j , $(j = 1,2,\ldots)$ considérons le système infini d'équations :

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} \lambda_j \, h_{j\ell} \, a_{\ell k} = a_{jk} - \lambda_j \, \delta_{j,k} \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (14)$$

Si pour chaque $j = 1,2,\ldots$ il existe une solution $(h_{j1},h_{j2},\ldots)$ de (14) et si :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{jk}^{2} < \infty \qquad (15)$$

alors l'équation :

$$\int_0^T \int_0^T \Gamma_o(s,u) h(u,v) \Gamma_1(v,t) du\, dv = \Gamma_1(s,t) - \Gamma_o(s,t) \qquad (16)$$

a une solution $h(s,t)$ de carré intégrable avec :

$$h(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{jk} \, \Psi_j(s) \, \Psi_k(t) \qquad (17)$$

(la convergence étant en moyenne quadratique).

Inversement, si une fonction de carré intégrable, $h(s,t)$, est solution de l'équation (16), le système (14) a une solution unique satisfaisant à (15), ce sont les h_{jk} définis par:

$$h_{jk} = \int_0^T \int_0^T h(s,t) \, \Psi_j(s) \, \Psi_k(t) \, ds\, dt \quad .$$

D'autre part si (14) a une solution $(h_{j1},h_{j2},\ldots)$, $(j=1,2,\ldots)$ telle que $\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{jk}^{2} < \infty$

si $$\sum_{k=1}^{\infty} |\delta_{j,k} - a_{jk}| < 1 \qquad (18)$$

et si il existe une constante $C_j > 0$, indépendante de k , telle que :

$$|a_{jk} - \lambda_j \delta_{j,k}| \leq \lambda_j C_j (1 - \sum_{\ell=1}^{\infty} |\delta_{k,\ell} - a_{k,\ell}|)$$
$$k = 1,2,\ldots \qquad (19)$$

alors $(h_{j1},h_{j2},\ldots)$ $(j = 1,2,\ldots)$ est unique et pour chaque j , $(j = 1,2,\ldots)$

$$h_{jk} = \lim_{n\to\infty} h_{jk}^{(n)} \qquad k = 1,2,\ldots \qquad (20)$$

où $(h_{j1}^{(n)},\ldots,h_{j,n}^{(n)})$, $(j=1,2,\ldots,n)$ est la solution de (13).

Pour $j,k = 1,2,\ldots,n$ prenons $h_{jk}^{(n)}$ solution de (13) et pour $j,k = (n+1),(n+2),\ldots$ posons $h_{jk}^{(n)} = 0$.

Alors (9) et (12) peuvent s'écrire respectivement :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{jk}^{(n)} \xi_j(x) \xi_k(x) < \infty \quad \text{p.s.} \quad \mu_o \text{ et } \mu_1 \qquad (2?)$$

et

$$W(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{jk}^{(n)} \xi_j(x) \xi_k(x) \qquad (22)$$

Donc si l'équation (16) :

$$\int_0^T \int_0^T \Gamma_o(s,u)\, h(u,v) \Gamma_1(v,t)\, du\, dv = \Gamma_1(s,t) - \Gamma_o(s,t)$$

a une solution $h(s,t)$ de carré intégrable et si de plus les conditions (8) (18) et (19) sont satisfaites

$$W(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} h_{jk} \xi_j(x) \xi_k(x) \quad \text{p.s.} \quad \mu_o \text{ et } \mu_1$$

d'autre part de (17) on déduit :

$$\int_0^T\int_0^T x(s)\ h(s,t)\ x(t)\ dt = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} h_{jk}\ \xi_j(x)\ \xi_k(x) / \rho.s.\ \mu_o \text{ et } \mu_1$$

par conséquent :

$$W(x) = \int_0^T\int_0^T x(s)\ h(s,t)\ x(t) ds\ dt\ / \rho.s.\ \mu_o \text{ et } \mu_1\ .$$

$W(s)$ est un résumé exhaustif pour le choix entre H_o et H_1 et le test qui, pour une probabilité de fausse alarme donnée, minimise la probabilité de non détection consiste alors à décider H_1 ou H_o selon que $W(x)$ dépasse ou non un certain seuil.

KADOTA [7] a montré que, sous l'hypothèse que l'équation (16) a une solution de carré intégrable, les conditions (8),(18) et (19) sont impliquées par les suivantes :

1) $a_{jj} < 1 \qquad j = 1,2,\ldots$

2) $a_{jj} > \sum_{k=1,k\neq j}^{\infty} |a_{jk}| \qquad j = 1,2,\ldots$

3) il existe une constante $C > 0$, indépendante de $j,k = 1,2,\ldots$ telle que :

$$\left|\frac{a_{jk}}{\lambda_j} - \delta_{j,k}\right| \leqq C\ (a_{jk} - \sum_{\ell=1,\ell\neq k}^{\infty} |a_{k\ell}|)$$

BIBLIOGRAPHIE

(1) BAKER : Simultaneous Reduction of Covariance Operators and the noise in noise problem of communication theory.
Ph. D. University of Calif. Los Angeles 1967.

(2) J. FELDMAN : Equivalence and Perpendicularity of gaussian Processes.
Pacific J. Math. 8 n°4 1958.

(3) R. FORTET et E. MOURIER : Les fonctions aléatoires comme éléments aléatoires dans un espace de Banach.
Journal de Math. Pures et Appliq. Tome 38 - 1959.

(4) U. GRENANDER : Stochastic Processes and Statistical Inference.
Arkiv För Mat. Band 1 n°17 1950.

(5) J. HAJEK : Sur une propriété des distributions normales d'un processus stochastique arbitraire.
Journal Math. Tchec. T.8 (83) 1958).

(6) P. HALMOS : Measure Theory.
Van Nostrand cie 1950.

(7) T.T. KADOTA : Optimum Reception of Binary gaussian Signals.
The Bell. Syst. Tech. Journal vol. XLIII nov. 1954.

(8) T.T. KADOTA : Optimum Reception of Binary Sure and Gaussian Signals.
The Bell. Syst. Tech. Journal vol XLIV n°8 oct. 1965.

(9) E. LEHMANN : Testing Statistical Hypotheses.
Wiley 1959.

(10) E. MOURIER : Détection d'un signal non aléatoire connu en présence de bruit Laplacien de moyenne nulle de covariance continue connue.
C.N.E.T. Etude n°614 C.M.E.

(11) E. MOURIER : Diagonalisation Simultanée de deux covariances.
Rapport G.R.E.T.S.I. n° 1968/4.

(12) E. MOURIER : Problèmes de détection et de réception de signaux déformés par le milieu et mélangés à du bruit.
Colloq. OTAN - Marine Italienne. Lerici 1967.

.../...

(13) RAO et VARADARAJAN : Discrimination of Gaussian Processes.
Sankhya Série A - 25 - 1963.

(14) W. ROOT : Singular Gaussian Measures in Detection Theory.
Proceedings on Time Series - Ed. Rosenblatt, Wiley 1952.

(15) W. ROOT : Stability in Signal Detection Problems.
Proceedings of Symposium in Appl. Math. Vol. XVI 1964