



TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1^{er} au 5 juin 1971

DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE
DATE D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

Pierre-Yves ARQUÈS

Maître de Conférences

Laboratoire Traitement du Signal - Université de RENNES

RESUME

La méthode utilisée par Mme Macchi pour la détection de signaux à date d'arrivée inconnue et l'estimation de cette date est étendue au cas où l'onde signal provient en outre d'une direction inconnue dans un secteur angulaire donné et est reçue sur une base de n capteurs donnée. On détermine, au sens de la théorie statistique de la détection, le détecteur optimal (de présence du signal) et l'estimateur optimal de la date d'arrivée et de la direction. Un mode d'évaluation des performances par courbes "probabilité de détection - taux de fausse alarme" est ensuite esquissé.

SUMMARY



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

1 - GENERALITES

La théorie du filtrage adapté à une ou à n entrées peut se faire par rapport au critère du rapport signal sur bruit de sortie ou au sens de la théorie statistique de la détection par rapport à un critère faisant intervenir le rapport de vraisemblance. Elle correspond à un signal complètement connu, que l'on suppose lié à l'axe des temps et conduit dans les deux cas au même système linéaire optimal sous des hypothèses légèrement différentes, système dont on observe la fonction de sortie [1] (dans la suite, les hypothèses nécessaires seront supposées vérifiées, en particulier la stationnarité du bruit d'entrée). Dans le premier cas le système obtenu est pourvu d'un rapport signal sur bruit de sortie maximal à un instant t_0 choisi par l'observateur. Dans le second cas le système est tel que la détection (optimale) se fait sur la fonction de sortie à un instant t_0 choisi par l'observateur. Les probabilités de détection et de fausse alarme sont donc les probabilités instantanées de détection et de fausse alarme de la fonction de sortie du système à l'instant t_0 .

Les hypothèses à partir desquelles est déduit le filtre adapté ne sont plus vérifiées dans le cas où le signal n'est plus parfaitement connu. Mme Macchi a ainsi récemment montré ou retrouvé ^{entre} [2] autres, les résultats suivants dans le cadre de la théorie statistique de la détection pour ^{un} signal à bande étroite et à phase aléatoire equirépartie dans $[0, 2\pi]$, reçu sur une entrée :

- si le signal est à temps d'arrivée connu, le système de détection optimal est le filtre adapté suivi d'un détecteur d'enveloppe, dont la sortie est à observer à l'instant t_0 ;

- si le signal est affecté d'un retard aléatoire θ appartenant à l'intervalle borné $[0, \theta_M]$, le système de détection optimal est constitué du récepteur précédent suivi d'un organe non linéaire (à caractéristique "fonction de Bessel I_0 ") et d'un intégrateur défini par la loi de l'instant d'arrivée, et la sortie est à observer à



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

l'instant $t_0 + \theta_M$; en outre l'estimateur optimal de l'instant de détection $t_0 + \theta$, par rapport au critère du maximum de vraisemblance a posteriori, est, pour un retard θ équiréparti dans $[0, \theta_M]$ le filtre adapté suivi d'un détecteur d'enveloppe, et l'estimation est la date du maximum de la fonction de sortie ^{entre} t_0 et $t_0 + \theta_M$. Les probabilités de détection et de fausse alarme des deux systèmes de détection sont les probabilités instantanées de fausse alarme et de détection de leur fonction de sortie respectivement en t_0 et $t_0 + \theta_M$.

Les résultats précédents sont relatifs à un système comportant une seule entrée. On va considérer dans la suite de quelle façon ils peuvent être étendus à des systèmes comportant n entrées et à des signaux certains quelconques provenant d'une direction connue ou inconnue dans un secteur angulaire donné. On retrouvera en particulier des résultats obtenus dans [3] par une méthode différente, pour un signal n -dimensionnel à bande étroite, à phase aléatoire (identique pour toutes les composantes), à direction connue.



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

2 - DETECTION ET ESTIMATION D'UN SIGNAL CERTAIN DANS UN SECTEUR
ANGULAIRE

2-1-

Les méthodes développées dans [1,2] peuvent être étendues pour définir des systèmes à n entrées permettant soit la détection de la présence d'un signal réel, certain (à n dimensions), de direction inconnue dans un secteur angulaire donné et affecté d'un retard global θ_G appartenant à $[0, \theta_M]$, soit l'estimation, conditionnelle à la détection, des paramètres inconnus précédents.

L'incertitude de direction va se traduire par des retards inconnus affectant $(n-1)$ des signaux par rapport au $n^{\text{ème}}$, ce que l'on peut traduire par n retards aléatoires θ_K affectant chacun des signaux et se superposant au retard global θ_G . Le signal sur l'entrée K est donc de la forme :

$$S_K(t) = Z_K(t - \theta_G - \theta_K)$$

Les $Z_K(t)$ sont supposés à supports bornés inclus dans $[t_0 - T, t_0]$.

On appelle $S(t)$, $Z(t)$, $s(v)$, $z(v)$ les $(n,1)$ -matrices (colonnes) de $K^{\text{ème}}$ élément respectif $S_K(t)$, $Z_K(t)$, $s_K(v)$ transformée de Fourier de $S_K(t)$ et $z_K(v)$ transformée de Fourier de $Z_K(t)$.

Les domaines des θ_K et les liens existant entre eux dépendent de la disposition géométrique des entrées et du secteur angulaire veillé. Les θ_K et $-\theta_G$ sont définis à une même constante additive près. On suppose :

$$|\theta_K| \leq \theta_0 \ll \theta_M$$

On désigne par \tilde{X} , X et X^\dagger respectivement la transposée, la conjuguée, et l'associée, ou transposée-conjuguée, de la matrice X .



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

On dispose de n tranches de réalisation des n fonctions d'entrée $\{V_{OK}(t), K \in \{1, \dots, n\}\}$, entre les instants $t_0 - T - \theta_0$ et $t_0 + \theta_M + \theta_0$, dont on veut décider si elles proviennent de l'une des 2 hypothèses (seules possibles et mutuellement exclusives)

$$H_0 : V_{OK}(t) = B_K(t)$$

$$K \in \{1, 2, \dots, n\}$$

$$H_1 : V_{OK}(t) = B_K(t) + S_K(t)$$

(De manière analogue à la théorie classique du filtre adapté, t_0 est l'instant où l'observateur désirerait effectuer une éventuelle détection sur un signal $Z(t)$ sans retard, et T la durée d'observation correspondante).

Les $B_K(t)$ sont n fonctions aléatoires réelles, gaussiennes stationnaires dans leur ensemble, centrées ; leur matrice d'intercorrélation $\Gamma(\tau)$ a pour élément (K, ℓ) :

$$\Gamma_{K\ell}(\tau) = E \{B_K(t) B_\ell(t-\tau)\}$$

et leur matrice $\gamma(v)$ de densité spectrale d'intercorrélation a pour élément (K, ℓ) la transformée de Fourier $\gamma_{K\ell}(v)$ de $\Gamma_{K\ell}(\tau)$.

2-2-

On prélève np échantillons ^{sur les n réalisations} à p instants t_i régulièrement répartis dans $[t_0 - T - \theta_0, t_0 + \theta_M + \theta_0]$ avec $t_1 = t_0 - T - \theta_0$ et $t_p = t_0 + \theta_M + \theta_0$. On appelle V, B, S les vecteurs représentés par les $(np, 1)$ -matrices de (Ki) ^{ème} éléments respectifs $V_{OK}(t_i)$, $B_K(t_i)$, $S_K(t_i)$ (éléments ordonnés par variation de i à K constant) et l'on appelle Γ la matrice de corrélation de la variable aléatoire centrée à np dimensions B . La matrice $\Gamma = E\{B \tilde{B}\}$ est constituée de n^2 blocs de type (p, p) , l'élément (i, j) du bloc (K, ℓ) étant $\Gamma_{K\ell}(t_i - t_j)$; elle est supposée toujours régulière.

La détection optimale de la présence des signaux $S_K(t)$ dans les bruits $B_K(t)$ est faite par comparaison du rapport de vraisemblance de V_0 à un seuil μ_c .



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

Le rapport de vraisemblance attaché à V_o est [1,2,4] :

$$\begin{aligned} \Lambda(V_o) &= E_{\theta_G, \{\theta_K\}} \left\{ e^{-\frac{1}{2} (\tilde{V}_o - S) \Gamma^{-1} (V_o - S) + \frac{1}{2} \tilde{V}_o \Gamma^{-1} V_o} \right\} \\ &= E_{\theta_G, \{\theta_K\}} \left\{ e^{\tilde{V}_o \Gamma^{-1} S - \frac{1}{2} S \Gamma^{-1} S} \right\} \end{aligned}$$

L'estimateur optimal de la valeur des retards $\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n$, peut être obtenu à partir du critère du maximum de vraisemblance a posteriori par généralisation de la méthode utilisée dans [2].

Elle consiste à choisir comme meilleures estimations des paramètres $\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n$, les valeurs de ces paramètres dont la probabilité conditionnelle à l'observation est maximale, c'est-à-dire les valeurs de $\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n$ pour lesquelles est maximale la valeur :

$$p(\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n | V_o)$$

soit encore :

$$p(\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n) p(V_o | \theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n)$$

soit encore :

$$p(\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n) e^{-\frac{1}{2} (\tilde{V}_o - S) \Gamma^{-1} (V_o - S)}$$

soit encore :

$$p(\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n) e^{\tilde{V}_o \Gamma^{-1} S - \frac{1}{2} S \Gamma^{-1} S}$$

On définit la $(np, 1)$ -matrice H , de (K_i) ^{ème} élément $H_K(t_o - t_i)$ par l'équation matricielle

$$S = \frac{T + \theta_M + 2\theta_o}{P} \Gamma H$$

On a donc :

$$\tilde{V}_o \Gamma^{-1} S - \frac{1}{2} S \Gamma^{-1} S = \frac{T + \theta_M + 2\theta_o}{P} (\tilde{V}_o H - \frac{1}{2} S H)$$

Ces deux équations matricielles représentent les $(np + 1)$ équations scalaires :

$$S_K(t_i) = \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^p \Gamma_{K\ell}(t_i - t_j) H_\ell(t_o - t_j) \frac{T + \theta_M + 2\theta_o}{P} \quad \begin{cases} i \in \{1, 2, \dots, p\} \\ K \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

$$\tilde{V}_0 \Gamma^{-1} S - \frac{1}{2} \tilde{S} \Gamma^{-1} S = \sum_{K=1}^n \sum_{i=1}^p \left[v_{OK}(t_i) H_K(t_o - t_i) - \frac{1}{2} s_K(t_i) H_K(t_o - t_i) \right] \frac{T + \theta_M + 2\theta_o}{p}$$

2-3-

En supposant les différentes fonctions telles que les intégrales de Riemann existent, on a par passage à la limite pour p infini :

$$Z_K(t - \theta_G - \theta_K) = \sum_{\ell=1}^n \int_{t_o - T - \theta_o}^{t_o + \theta_M + \theta_o} \Gamma_{K\ell}(t-u) H_\ell(t_o - u) du$$

pour $\left\{ \begin{array}{l} t \in [t_o - T - \theta_o, t_o + \theta_M + \theta_o] \\ K \in \{1, 2, \dots, n\} \end{array} \right.$

$$\Lambda(V_o) = E_{\theta_G, \{\theta_K\}} \left\{ e^{[V_2(t_o + \theta_G; \theta_1, \dots, \theta_n) - \frac{1}{2} \rho(\theta_1, \dots, \theta_n)]} \right\}$$

Estimation $\{\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n\}$ maximalise

$$p(\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n) e^{[V_2(t_o + \theta_G; \theta_1, \dots, \theta_n) - \frac{1}{2} \rho(\theta_1, \dots, \theta_n)]}$$

$$V_2(t_o + \theta_G; \theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{K=1}^n \int_{t_o - T - \theta_o}^{t_o + \theta_M + \theta_o} v_{OK}(u) H_K(t_o - u) du$$

$$\rho(\theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{K=1}^n \int_{t_o - T - \theta_o}^{t_o + \theta_M + \theta_o} s_K(u) H_K(t_o - u) du$$

2-4-

Si le temps de corrélation du bruit d'entrée est faible devant T , c'est-à-dire ^{si} $\Gamma(\tau)$ est une matrice fonction de τ à support borné petit devant T , ce que l'on supposera désormais, les intégrales des équations précédentes peuvent être remplacées (à l'"effet de bord" près) par des intégrales des mêmes fonctions entre $-\infty$ et $+\infty$, c'est-à-dire sur \mathbb{R} entier.



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

Les n quantités $H_\ell(t)$ constituent une matrice ligne $H(t)$ de réponses percussionnelles de filtrage ; on appelle $h(v)$ la matrice ligne des gains correspondante, ayant pour élément $(1, \ell)$ la transformée de Fourier $h_\ell(v)$ de $H_\ell(t)$.

Les n équations définissant H sont alors équivalentes, par transformation de Fourier, aux n équations :

$$z_K(v) e^{-2\pi i v (\theta_G + \theta_K)} = \sum_{\ell=1}^n \gamma_{K\ell}(v) h_\ell^*(v) e^{-2\pi i v t_0} \quad K \in \{1, 2, \dots, n\}$$

On désigne par $D_\theta(v)$ la (n, n) -matrice diagonale ayant pour élément (K, K) la quantité $e^{-2\pi i v \theta_K}$. La $(1, n)$ -matrice ligne $H(t)$ de filtrage est donc définie par :

$$H(t) \Leftrightarrow h(v) = e^{-2\pi i v (t_0 - \theta_G)} z^\dagger(v) D_\theta^\dagger(v) \gamma^{-1}(v)$$

On a de même (théorème de Parseval avec

$$H(t_0 - t) \Leftrightarrow e^{-2\pi i v t_0} h^*(v) \quad \text{et} \quad S(t) \Leftrightarrow e^{-2\pi i v \theta_G} D_\theta(v) z(v) :$$

$$\begin{aligned} \rho(\theta_1, \dots, \theta_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} H(t_0 - u) S(u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i v (t_0 - \theta_G)} h(v) D_\theta(v) z(v) dv \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} z^\dagger(v) D_\theta^\dagger(v) \gamma^{-1}(v) D_\theta(v) z(v) dv \end{aligned}$$

La quantité ρ est donc ^[1] le rapport signal sur bruit maximal que l'on obtient, à l'instant t_0 , en sortie du filtre adapté à n entrées pour le signal n dimensionnel $S(t - \theta_G)$. Cette quantité est indépendante de θ_G mais dépend en général des θ_K . Le cas où ρ est invariant avec les θ_K possibles correspond à une structure de bruit particulière, telle que le rapport signal sur bruit maximal (ou encore la puissance moyenne du bruit), en sortie du filtre adapté soit indépendant de la direction du signal traitée.

Les filtrages $h_K(v)$ sont de la forme :



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

$$h_K(v) = e^{-2\pi i v(t_0 - \theta_G)} \sum_{\ell=1}^n e^{2\pi i v \theta_\ell} z_\ell^*(v) \left[\gamma^{-1}(v) \right]_{\ell K}$$

$h_K(v)$ et $H_K(t)$ sont donc des sommes de n termes dépendant chacun de θ_G et d'un seul θ_K :

$$h_K(v) = \sum_{\ell=1}^n e^{2\pi i v(\theta_G + \theta_\ell)} r_{\ell K}(v)$$

$$H_K(t) = \sum_{\ell=1}^n R_{\ell K}(t + \theta_G + \theta_\ell)$$

avec

$$R_{\ell K}(t) \Leftrightarrow r_{\ell K}(v) = e^{-2\pi i v t} z_\ell^*(v) \left[\gamma^{-1}(v) \right]_{\ell K}$$

filtrages indépendants des retards aléatoires.

On a donc :

$$V_2(t_0 + \theta_G; \theta_1, \dots, \theta_n) = \sum_{\ell=1}^n V_{1\ell}(t_0 + \theta_G + \theta_\ell)$$

$$V_{1\ell}(t_0 + \theta_G + \theta_\ell) = \sum_{K=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} V_{OK}(u) R_{\ell K}(t_0 + \theta_G + \theta_\ell - u) du$$

2-5-

En définitive, avec les hypothèses posées, on peut énoncer les résultats suivants :

Le détecteur optimal pour la détection de la présence du signal $S(t)$ résulte de la comparaison de la quantité

$$V_3 = E_{\theta_G, \{\theta_K\}} \left\{ e^{\sum_{\ell=1}^n V_{1\ell}(t_0 + \theta_G + \theta_\ell)} - \frac{1}{2} \rho(\theta_1, \dots, \theta_n) \right\}$$

à un seuil μ_c déterminé par le critère d'optimisation choisi. Si ρ est indépendant de la direction il résulte de la comparaison de

$$V'_3 = E_{\theta_G, \{\theta_K\}} \left\{ e^{\sum_{\ell=1}^n V_{1\ell}(t_0 + \theta_G + \theta_\ell)} \right\}, \text{ à un seuil } \mu = \mu_c e^{\frac{\rho}{2}}$$



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

L'estimateur optimal des paramètres $\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n$ résulte de la recherche sur $[t_o - \theta_o, t_o + \theta_M + \theta_o]$ de l'ensemble $\{\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n\}$ maximalisant la quantité :

$$V_4 = p(\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n) e^{\sum_{\ell=1}^n V_{1\ell}(t_o + \theta_G + \theta_\ell) - \frac{1}{2} \rho(\theta_1, \dots, \theta_n)}$$

soit encore

$$\text{Log } V_4 = \text{Log } p(\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n) + \sum_{\ell=1}^n V_{1\ell}(t_o + \theta_G + \theta_\ell) - \frac{1}{2} \rho(\theta_1, \dots, \theta_n)$$

Si ρ est indépendant de la direction, il résulte de la recherche de l'ensemble maximalisant V_4 ou $\text{Log } V_4$ obtenus en supprimant le terme en ρ dans V_4 ou $\text{Log } V_4$.

Si les signaux proviennent d'une direction connue (les θ_K sont connus), on retrouve des résultats analogues à ceux de [2] et de [3].

Le détecteur compare au seuil μ :

$$E_{\theta_G} \{ e^{V_2(t_o + \theta_G ; \theta_1, \dots, \theta_n)} \} = \int_0^{\theta_M} p(\theta_G) e^{V_2(t_o + \theta_G ; \theta_1, \dots, \theta_n)} d\theta_G$$

L'estimateur recherche sur $[t_o, t_o + \theta_M]$ la valeur de θ_G maximalisant :

$$p(\theta_G) e^{V_2(t_o + \theta_G ; \theta_1, \dots, \theta_n)}$$

soit encore, si θ_G est équiréparti dans $[0, \theta_M]$:

$$V_2(t_o + \theta_G ; \theta_1, \dots, \theta_n) .$$

3 - CAS DE SIGNAUX A BANDE ETROITE ET A PHASE ALEATOIRE

3-1-

Si les signaux $Z_K(t)$ sont à bande étroite autour de la même fréquence centrale ν_Z ; chacun d'eux affecté en outre d'une phase aléatoire ϕ_K équirépartie dans $[0, 2\pi]$, on peut reprendre les résultats précédents en considérant chaque θ_K comme la somme de deux retards aléatoires θ_{eK} et $\frac{\phi_K}{2\pi\nu_Z}$ tels que $\{\theta_K, \{\theta_{eK}\}\}$ et $\{\phi_K\}$ sont indépendants. On suppose en outre ρ indépendant de la direction c'est-à-dire de $\{\theta_K\}$.

Les quantités :

$$V_{1l}(t + \frac{\phi_l}{2\pi\nu_Z}) = \sum_{K=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} V_{OK}(\hat{u}) R_{lK}(t + \frac{\phi_l}{2\pi\nu_Z} - u) du$$

sont à bande étroite autour de la fréquence ν_Z , de la forme

$$V_{1l}(t + \frac{\phi_l}{2\pi\nu_Z}) = E_{1l}(t) \cos(2\pi\nu_Z t + \phi_{1l} + \phi_l)$$

où $E_{1l}(t)$ est l'enveloppe de $V_{1l}(t + \frac{\phi_l}{2\pi\nu_Z})$ et ϕ_{1l} une phase dépendant des V_{OK} et des R_{lK} ; E_{1l} et ϕ_{1l} sont indépendants des ϕ_l .

De la même façon si tous les ϕ_l sont identiques à une phase ϕ :

$$V_2(t + \frac{\phi}{2\pi\nu_Z}; \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}) = \sum_{K=1}^n \sum_{l=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} V_{OK}(u) R_{lK}(t + \frac{\phi}{2\pi\nu_Z} + \theta_{el} - u) du$$

est à bande étroite autour de la fréquence ν_Z , de la forme

$$V_2(t + \frac{\phi}{2\pi\nu_Z}; \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}) = E_2(t; \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}) \cos(2\pi\nu_Z t + \phi_2 + \phi)$$

(enveloppe E_2 et phase ϕ_2 indépendantes de ϕ).

On appelle I_0 la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre zéro [5] :



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-x \cos \phi} d\phi$$

On en déduit alors :

$$E_{\phi_l} \left\{ e^{V_{1l} \left(t + \frac{\phi_l}{2\pi\nu_Z} \right)} \right\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_{1l}(t) \cos(2\pi\nu_Z t + \phi_{1l} + \phi_l) d\phi_l$$

$$= I_0(E_{1l}(t))$$

$$E_{\phi} \left\{ e^{V_2 \left(t + \frac{\phi}{2\pi\nu_Z} ; \theta_{e1}, \dots, \theta_{en} \right)} \right\} = I_0(E_2(t ; \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}))$$

3-2-

Le détecteur optimal de la présence de S(t) résulte de la comparaison au seuil

$$= \mu_c e^{\rho/2}$$

de la quantité :

$$V'_3 = E_{\theta_G, \{\theta_{eK}\}, \{\phi_l\}} \left\{ \prod_{l=1}^n e^{V_{1l} \left(t_0 + \theta_G + \theta_{el} + \frac{\phi_l}{2\pi\nu_Z} \right)} \right\}$$

. Si les ϕ_l sont indépendants entre eux :

$$V'_3 = E_{\theta_G, \{\theta_{eK}\}} \left\{ \prod_{l=1}^n I_0 \left[E_{1l} \left(t_0 + \theta_G + \theta_{el} \right) \right] \right\}$$

. Si tous les ϕ_l sont identiques à une même phase aléatoire ϕ :

$$V'_3 = E_{\theta_G, \{\theta_{eK}\}} \left\{ I_0 \left[E_2 \left(t_0 + \theta_G ; \theta_{e1}, \dots, \theta_{en} \right) \right] \right\}$$

Si les signaux $S_K(t)$ proviennent d'une direction connue (les θ_{eK} sont connus), on retrouve les résultats de [3] :

retard global θ_G inconnu et phases ϕ_l aléatoires et indépendantes :

$$V'_3 = \int_0^{\theta_M} P(\theta_G) \prod_{l=1}^n \left(I_0 \left[E_{1l} \left(t_0 + \theta_G + \theta_{el} \right) \right] \right) d\theta_G$$

DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

retard global θ_G inconnu et phases ϕ_ℓ aléatoires et identiques :

$$V_3' = \int_0^{\theta_M} p(\theta_G) I_0 \left[E_2(t_0 + \theta_G ; \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}) \right] d\theta_G$$

3-3-

L'estimateur optimal des paramètres $\theta_G, \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}$,
résulte de la recherche de l'ensemble $\{\theta_G, \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}\}$ maximalisant

$$V_4' = p(\theta_G, \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}) E_{\{\phi_\ell\}} \left\{ e^{\sum_{\ell=1}^n V_{1\ell}(t_0 + \theta_G + \theta_{e\ell} + \phi_\ell)} \right\}$$

. Si les ϕ_ℓ sont indépendants entre eux :

- direction inconnue

$$V_4' = p(\theta_G, \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}) \prod_{\ell=1}^n I_0 \left[E_{1\ell}(t_0 + \theta_G + \theta_{e\ell}) \right]$$

- direction connue ($\{\theta_{e\ell}\}$ connus)

$$V_4' = p(\theta_G) \prod_{\ell=1}^n I_0 \left[E_{1\ell}(t_0 + \theta_G + \theta_{e\ell}) \right]$$

. Si les ϕ_ℓ sont identiques à une même phase aléatoire ϕ :

- direction inconnue

$$V_4' = p(\theta_G, \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}) I_0 \left[E_2(t_0 + \theta_G ; \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}) \right]$$

- direction connue ($\{\theta_{e\ell}\}$ connus)

$$V_4' = p(\theta_G) I_0 \left[E_2(t_0 + \theta_G ; \theta_{e1}, \dots, \theta_{en}) \right]$$

soit encore si θ_G est équiréparti dans $[0, \theta_M]$:

$$V_4' = E_2(t_0 + \theta_G ; \theta_{e1}, \dots, \theta_{en})$$

DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

4 - STRUCTURE DES DETECTEURS ET ESTIMATEURS OPTIMAUX

Les détecteurs et estimateurs optimaux peuvent être aisément décrits dans le cas où le nombre P de directions possibles pour le signal est fini, ce que l'on suppose dans la suite. Si l'ensemble des directions possibles forme un secteur angulaire, on peut se ramener à ce cas par partage du secteur à veiller en P voies c'est-à-dire par discrétisation de cet ensemble de directions ; les directions du signal sont alors définies au demi-angle de voie près, ce qui correspond à une incertitude sur les θ_K . Les différentes causes d'incertitude interviennent pour définir les liaisons et les lois de probabilité de θ_G et de l'ensemble $\{\theta_K\}$ c'est-à-dire en bande étroite des $\{\theta_{eK}\}$ et $\{\phi_K\}$. On suppose en outre que les quantités aléatoires θ_G et $\{\theta_K\}$ ou θ_G et $\{\theta_{eK}\}$ sont indépendantes entre elles. En particulier dans le cas d'un signal à bande étroite :

- une phase aléatoire identique pour tous les signaux correspond à une même incertitude pour chaque θ_K , ou encore à une incertitude sur le retard global θ_G (par exemple indétermination de phase à l'émission) ;

- un partage de secteur angulaire à veiller peut être effectué en choisissant les angles des voies de façon à ce que l'incertitude de direction (donc des θ_K) corresponde à des indéterminations sur les phases ϕ_K des signaux (liées par certaines relations dues à la "géométrie" du problème) ;

- des signaux résultant de la combinaison d'un nombre aléatoire de contributions élémentaires d'amplitudes aléatoires et de phases différentes (cible non ponctuelle, à distance finie, non uniformément réfléchissante, et base de réception de dimensions suffisantes) peuvent être approximés, sous certaines conditions, par des signaux à phases aléatoires indépendantes.

4-1- MATRICE DE FILTRAGE P-DIRECTIONNELLE (figure 1)

On appellera "matrice de filtrage P-directionnelle" une (n, Pn) -matrice de filtrage, qui, attaquée par les V_{OK} , construit les



DÉTECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

$V_{1\ell}(t)$ pour P ensembles $\{\theta_\ell\}$ différents. Cette matrice est constituée de n^2 filtres de gains complexes $[\gamma^{-1}(v)]_{\ell K}$ pour $\ell, K \in \{1, 2, \dots, n\}$. Les filtres d'une même colonne K sont attaqués par V_{OK} ; les sorties des filtres d'une même ligne ℓ sont additionnées. La sortie du $\ell^{\text{ème}}$ additionneur attaque un filtre de gain complexe $z_\ell^*(v)$ suivi en parallèle de P lignes à retard de gain complexe $e^{-2\pi i v(t - \tau_{\ell p})}$, avec $p \in \{1, 2, \dots, P\}$ (figure 1).

Si l'on donne aux P ensembles $\{\tau_{\ell p} ; \ell \in \{1, \dots, n\}\}$ les valeurs de P ensembles $\{\theta_\ell ; \ell \in \{1, \dots, n\}\}$, la matrice précédente suivie de P additionneurs faisant chacun la somme des n sorties correspondant à un même ℓ , constitue le "filtre adapté à n entrées avec système à préformation de P voies" correspondant à l'un des P signaux $\{Z_\ell(t - \theta_\ell) ; \ell \in \{1, 2, \dots, n\}\}$.

4-2- CAS GENERAL (figure 2)

Le détecteur optimal est constitué par la succession de

- une (n, Pn) -matrice de filtrage P -directionnelle et P additionneurs constituant le n -filtrage adapté avec préformation de P voies ; chaque voie est pondérée additivement par la quantité $-\frac{1}{2} \rho(\theta_1, \dots, \theta_n)$ lui correspondant ;
 - n opérateurs à caractéristique exponentielle agissant chacun sur une voie ;
 - un additionneur-pondérateur faisant la somme des P voies pondérées chacune par leur probabilité a priori $p(\theta_1, \dots, \theta_n)$;
 - un intégrateur de durée θ_M , de fonction de pondération $p(\theta_G)$.
- La détection est effectuée en $t_o + \theta_M$. (figure 2)

L'estimateur optimal est constitué du n -filtrage adapté avec préformation de P voies et pondération additive des $-\rho/2$, suivi, si les $\theta_G, \{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ ne sont pas équiréparties, par une pondération additive déduite de $\text{Log } p(\theta_G, \theta_1, \dots, \theta_n)$. Les estimations de $t_o + \theta_G$ et de $\{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ sont respectivement la date sur $[t_o, t_o + \theta_M]$



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

et le jeu de valeurs $\{\tau_{lp}\}$ de la voie correspondant à la valeur maximale de sortie. (figure 2)

Dans le cas bruit à ρ invariant avec la direction, les détecteurs et estimateurs optimaux sont obtenus en supprimant la pondération additive en $-\frac{1}{2} \rho(\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Le cas direction connue se déduit du précédent en prenant $P = 1$ et en supprimant donc les pondérations en $-\frac{\rho}{2}$ et $p(\theta_1, \dots, \theta_n)$. Le détecteur optimal est donc constitué, l'ensemble $\{\theta_g\}$ étant connu, par le filtre adapté à n entrées au signal $S(t+\theta_g)$, suivi d'une exponentiation, puis d'un intégrateur de durée θ_M de fonction de pondération $p(\theta_g)$. L'estimateur optimal est constitué par le filtre adapté à n entrées à $S(t+\theta_g)$, suivi, si θ_g n'est pas équiréparti sur $[0, \theta_M]$, d'une pondération additive déduite de $\text{Log } p(\theta_g)$; l'estimation de $t_o + \theta_g$ est la date d'obtention de la valeur maximale de sortie sur $[t_o, t_o + \theta_M]$.

4-3- SIGNAL A BANDE ETROITE ET A PHASES ALEATOIRES IDENTIQUES, BRUIT A ρ INVARIANT AVEC LA DIRECTION (figure 3)

Les détecteurs et estimateurs optimaux sont construits comme les systèmes précédents à direction connue ou inconnue, à phases connues (§4-2), en supprimant la pondération par les quantités $-\frac{1}{2} \rho(\theta_1, \dots, \theta_n)$, en faisant suivre les P sorties de la préformation de P voies, de P détecteurs linéaires d'enveloppe et en remplaçant les opérateurs à caractéristique exponentielle par des opérateurs de caractéristique la fonction de Bessel I_0 . Les quantités $p(\theta_1, \dots, \theta_n)$ sont remplacées par les $p(\theta_{e1}, \dots, \theta_{en})$ correspondantes (figure 3).

4-4- SIGNAL A BANDE ETROITE ET A PHASES ALEATOIRES INDEPENDANTES ENTRE ELLES, BRUIT A ρ INVARIANT AVEC LA DIRECTION (figure 4)

Le détecteur optimal est constitué par la suite de



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

- une (n, Pn) -matrice de filtrage P-directionnelle ;
 - Pn détecteurs d'enveloppe agissant chacun sur une sortie de la matrice ;
 - Pn opérateurs non linéaires, de caractéristique la fonction de Bessel I_0 , agissant sur les sorties de détecteur ;
 - P multiplieurs à n entrées réalisant chacun le produit des n sorties d'opérateurs " I_0 " correspondant à un même ℓ ;
 - un additionneur-pondérateur faisant la somme des P voies pondérées chacune par leur probabilité a priori $p(\theta_{e1}, \dots, \theta_{en})$;
 - un intégrateur de durée θ_M , de fonction de pondération $p(\theta_G)$.
- La détection est effectuée en $t_0 + \theta_M$. (figure 4)

L'estimateur optimal est constitué par la succession des 4 premiers étages du détecteur précédent, suivi, si les $\theta_G, \{\theta_{e1}, \dots, \theta_{en}\}$ ne sont pas équirépartis, par une pondération additive déduite de $\text{Log } p(\theta_G, \theta_{e1}, \dots, \theta_{en})$. Les estimations de $t_0 + \theta_G$ et de $\{\theta_{e1}, \dots, \theta_{en}\}$ sont respectivement la date sur $[t_0, t_0 + \theta_M]$ et le jeu de valeurs $\{\tau_{\ell p}\}$ de la voie correspondant à la valeur maximale de sortie. (figure 4)

Le cas direction connue se déduit du précédent en prenant $P = 1$.



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

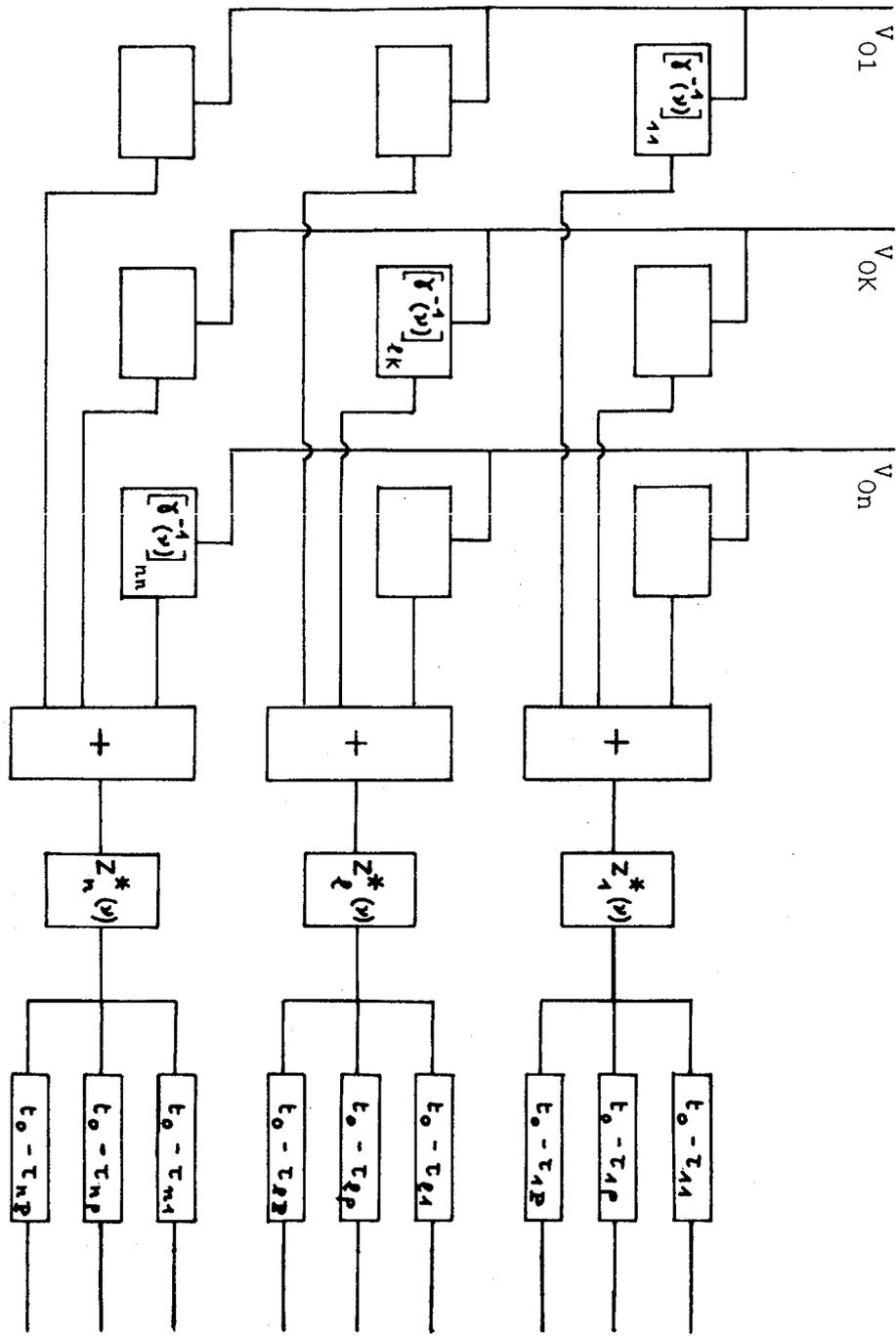


FIGURE 1 - MATRICE DE FILTRAGE P-DIRECTIONNELLE .

DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

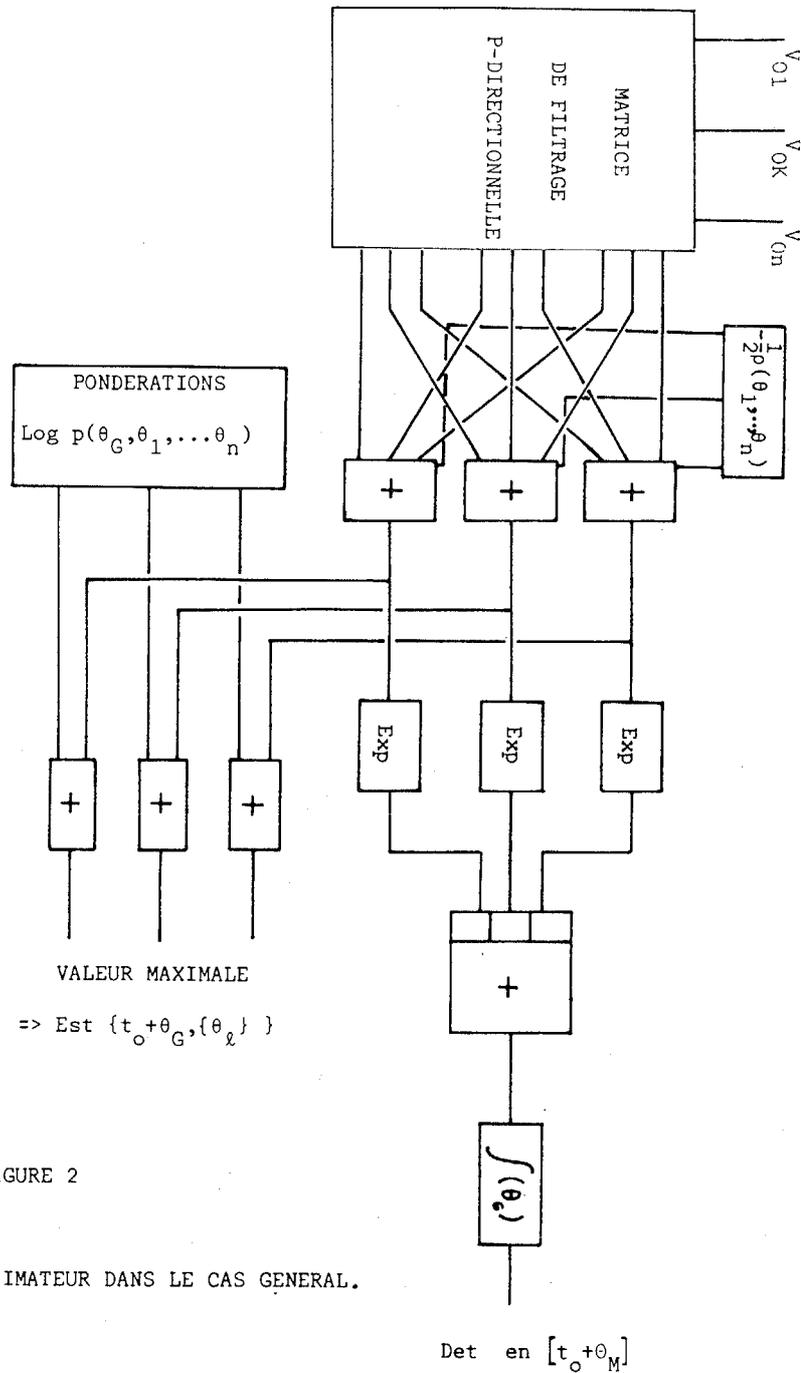


FIGURE 2

DETECTEUR - ESTIMATEUR DANS LE CAS GENERAL.



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUS.

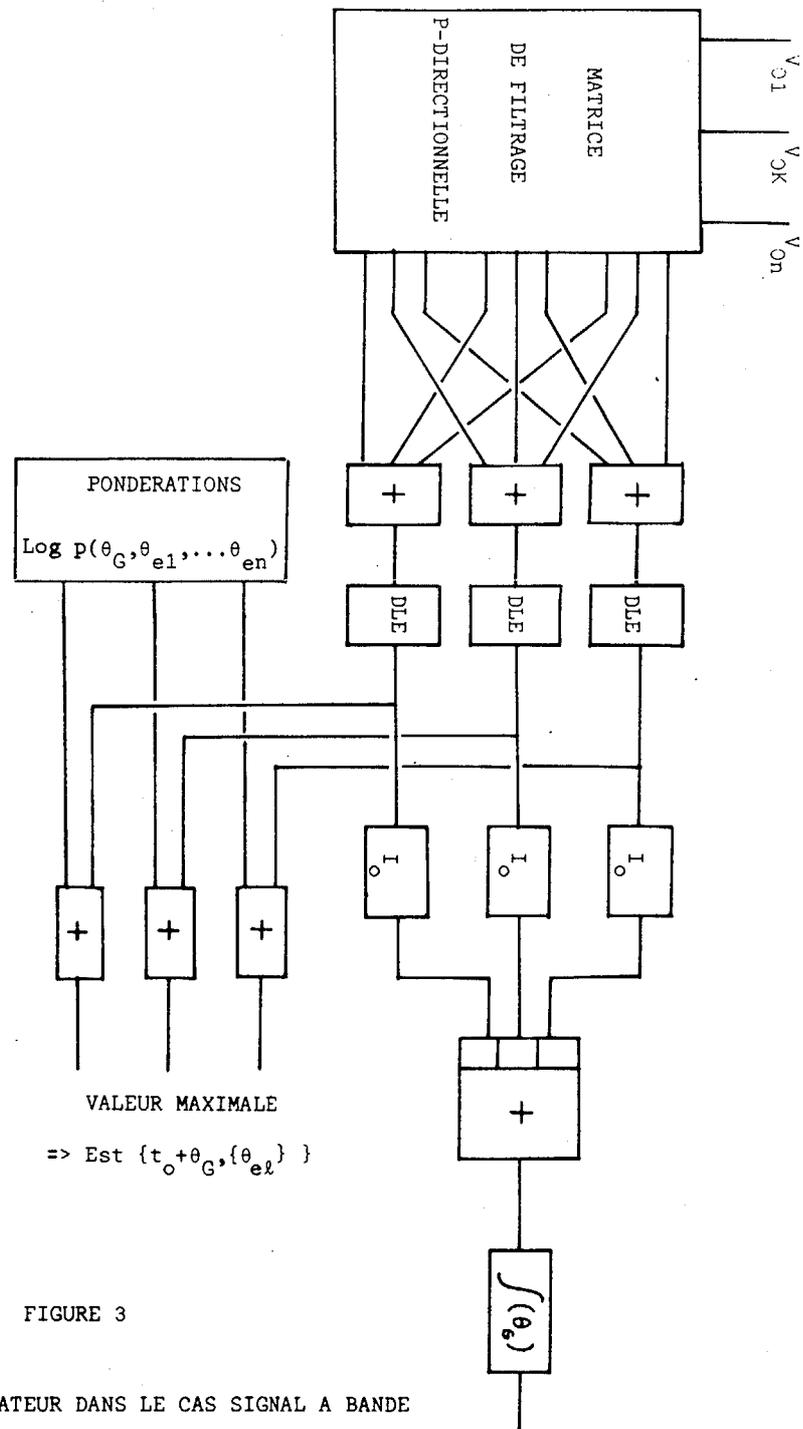


FIGURE 3

DETECTEUR - ESTIMATEUR DANS LE CAS SIGNAL A BANDE ETROITE, A PHASES ALEATOIRES IDENTIQUES, BRUIT A ρ INVARIANT.

Det en $[t_0 + \theta_M]$

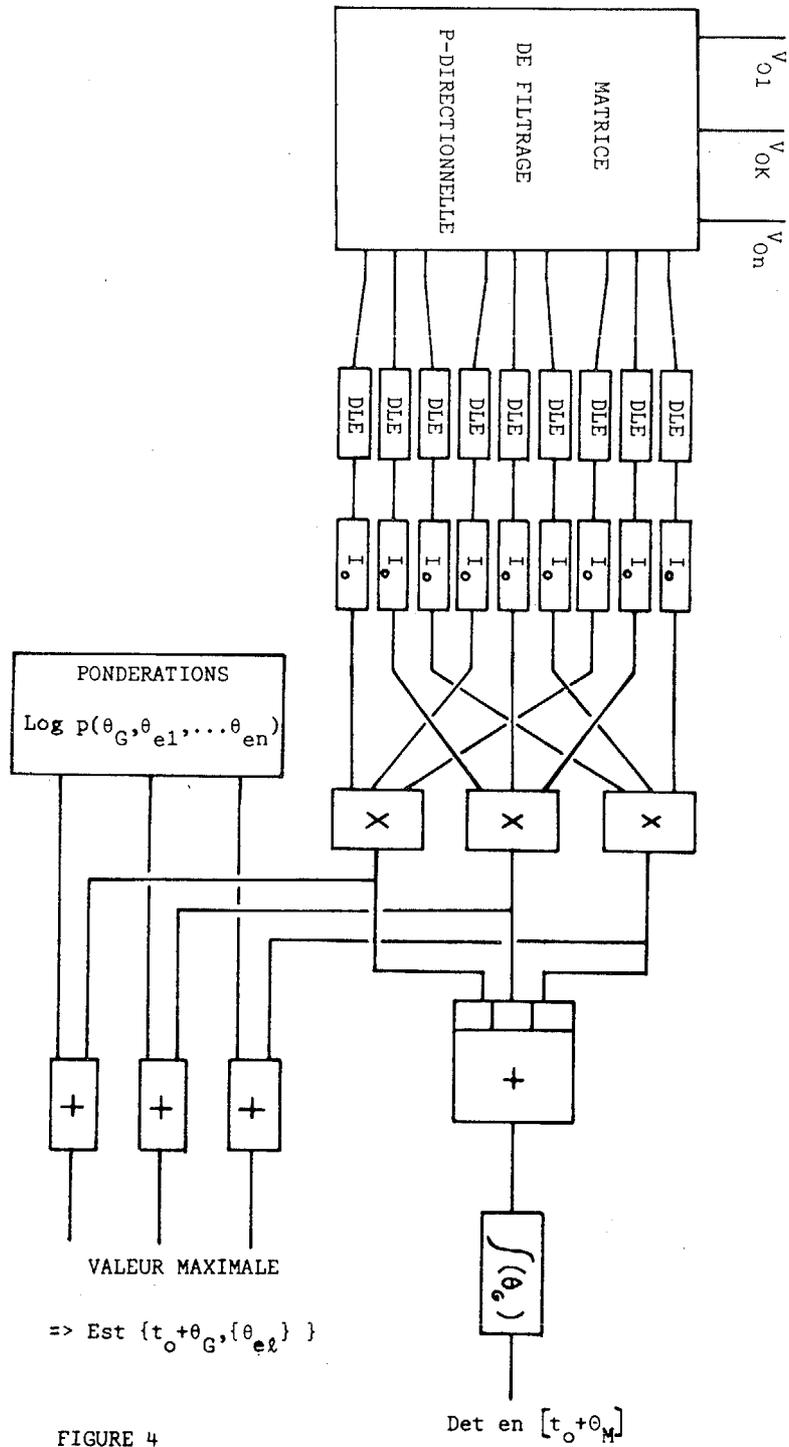


FIGURE 4

DETECTEUR - ESTIMATEUR DANS LE CAS SIGNAL A BANDE
 ETROITE, A PHASES ALEATOIRES INDEPENDANTES,
 BRUIT A ρ INVARIANT.



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

5 - EVALUATION DES PERFORMANCES EN "TAUX DE FAUSSE ALARME - PROBABILITE DE DETECTION"

Dans la pratique, la détection sur n entrées, dans un bruit stationnaire, d'un signal certain n -dimensionnel à direction connue, affecté d'un retard inconnu θ_G et d'un coefficient d'affaiblissement inconnu a , est effectuée à l'aide du filtre adapté à n entrées au signal n -dimensionnel de retard nul, dont on observe constamment la sortie à partir de l'instant t_0 . Si le signal est, en outre, à bande étroite, et peut donc être supposé à phase inconnue, identique pour les n composantes, et equirépartie dans $[0, 2\pi]$, on garde le même mode opératoire en faisant suivre le filtre adapté d'un détecteur d'enveloppe (linéaire ou quadratique).

La méthode précédente est utilisée dans la veille d'un secteur angulaire donné en testant en parallèle P fractions $\frac{1}{P}$ du secteur, par préformation des voies, c'est-à-dire en répétant simultanément P fois la méthode précédente, dans P directions différentes et en veillant P sorties.

Cette attitude ne peut être jugée par le critère du rapport signal sur bruit : la méthode ne détériore pas le rapport signal sur bruit maximal en raison des deux paramètres arbitraires apparaissant dans l'équation du filtre adapté, mais ce critère ne tient pas compte de la notion de fausse alarme introduite.

Si les retards θ_G possibles appartiennent à un intervalle borné $[0, \theta_M]$ et y sont supposés équirépartis, et si un seul signal est possible, ceci revient à effectuer simultanément (à l'aide d'un système qui, sous certaines hypothèses, est l'estimateur optimal de θ_G et de la direction au sens de la théorie statistique) :

- la détection en constatant si le seuil choisi a été dépassé sur l'intervalle $[t_0, t_0 + \theta_M]$ sur l'une au moins des P voies,

- l'estimation de la date de détection en repérant la date du dépassement maximal de ce seuil sur $[t_0, t_0 + \theta_M]$ (conditionnellement à la détection).



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

- l'estimation de la direction en repérant la voie sur laquelle a eu lieu le dépassement maximal de ce seuil sur $[t_0, t_0 + \theta_M]$ (conditionnellement à la détection).

La probabilité de détection β et la probabilité de fausse alarme α de ce système sont les probabilités pour que le seuil de sortie soit franchi par la fonction de sortie, au moins une fois sur un intervalle d'amplitude θ_M , sur l'une au moins des P voies, respectivement en présence et en absence d'un signal à l'entrée. On appelle β_D et α_D les quantités correspondantes pour une voie, $\alpha_D(t)$ et $\beta_D(t)$ les probabilités instantanées de fausse alarme, et de détection pour le signal à retard nul, à l'instant t de la fonction de sortie sur une voie [6,7] et τ_D le nombre moyen de dépassements du seuil de sortie en absence de signal sur une voie. Sur chaque voie le système est adapté au signal attendu ; la probabilité pour que le seuil de sortie soit franchi sur la voie, où le signal est effectivement présent, en provenance de la direction correspondante, à cet instant, est donc peu différente de la probabilité pour que la valeur de la fonction de sortie soit supérieure à ce seuil à l'instant du maximum effectif du signal de sortie.

Avec les hypothèses ou approximations suivantes :

- θ_G est équiréparti dans $[0, \theta_M]$,
- le signal est équiréparti sur les P voies,
- θ_M est très inférieur à la distance moyenne de 2 dépassements du seuil sur une voie en absence de signal et très supérieur à la durée moyenne d'un dépassement,
- la probabilité de fausse alarme est très faible devant la probabilité de détection,
- les bruits de sortie des voies sont de mêmes propriétés statistiques et indépendants,
- les détections dues à des fausses alarmes sont négligeables,
- les dépassements de seuil sur une voie forment un processus assimilable à un processus de Poisson de densité τ_D (faible),



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

on a :

$$\beta \approx \beta_D \approx \beta_D(t_0)$$

$$\alpha \approx 1 - (1 - \alpha_D)^P \approx 1 - e^{-P\theta_M \tau_D} \approx P\theta_M \tau_D$$

Si les retards ne peuvent être restreints à un intervalle borné suffisamment faible, on est conduit à une observation continue longue ou même "indéfinie" à partir de t_0 . Les notions de probabilité de fausse alarme et de détection au sens précédent perdent une partie de leur intérêt pratique, la fausse alarme devenant importante et la prise en compte de détections par fausses alarmes devant être évitée. On peut donc prendre comme probabilité de détection la probabilité pour que le seuil de sortie soit franchi par la fonction de sortie d'une voie en présence effective de signal sur cette voie, l'instant du maximum et la localisation de la voie étant choisis comme estimations de l'instant de détection $t_0 + \theta_G$ et de la direction du signal. Il est nécessaire de définir ce que l'on appelle présence du signal : on peut par exemple choisir comme probabilité de détection la probabilité pour que la valeur de la fonction de sortie soit supérieure à celle du seuil à l'instant $t_0 + \theta_G$. En fait, compte tenu de ce que le système est adapté au signal, la probabilité de détection sera de même que précédemment peu différente de la probabilité instantanée de détection de la fonction de sortie sur la voie occupée par le signal à l'instant $t_0 + \theta_G$ du maximum du signal de sortie. La probabilité de fausse alarme quant à elle peut être remplacée par une notion telle que le taux moyen de fausse alarme, c'est-à-dire le nombre moyen de dépassements du seuil de sortie en absence de signal, par unité de temps. On obtient des courbes "C.O.R. modifiées" exprimant la probabilité de détection $\beta = \beta(t_0)$ en fonction du taux de fausse alarme τ .

5-2-

On considère un bruit $B_A(t)$ gaussien, stationnaire, centré, de densité spectrale $\gamma_A(\nu)$ et de variance σ_A^2 , éventuellement additionné à un signal certain $S_A(t)$ de valeur maximale S_M en t_A .



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

On compare l'ensemble à un seuil de hauteur μ . On sait que [6]

- sa probabilité instantanée de détection en t_A est :

$$\beta_A(t_A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_A} \int_{\mu}^{+\infty} e^{-\frac{(x - S_M)^2}{2 \sigma_A^2}} dx,$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Delta \left(\frac{\mu - S_M}{\sqrt{2} \sigma_A} \right), \quad \text{avec } \Delta(x) = \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du ;$$

- son taux moyen de fausse alarme est :

$$\tau_A = \frac{4\pi}{\sigma_A} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \gamma_A(v) dv \right) e^{-\frac{\mu^2}{2 \sigma_A^2}}.$$

On a donc :

$$\beta_A(t_A) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Delta \left(\left[-\text{Log} \frac{\sigma_A \tau_A}{4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 \gamma_A(v) dv} \right]^{1/2} - \frac{S_M}{\sqrt{2} \sigma_A} \right).$$

L'ensemble précédent dans lequel on suppose en outre $\gamma_A(v)$ à bande étroite, et symétrique autour de v_S et $-v_S$, constitue la fonction d'entrée d'un détecteur linéaire d'enveloppe de gain K_E . On compare la sortie au seuil μ . On sait que [4] :

- sa probabilité instantanée de détection est :

$$\beta_E(t_A) = \int_{\mu - K_E S_M}^{+\infty} \frac{x}{K_E^2 \sigma_A^2} e^{-\frac{x^2}{2 K_E^2 \sigma_A^2}} dx \quad \text{pour } \mu \geq K_E S_M,$$

$$= 1 \quad \text{pour } \mu \leq K_E S_M,$$

$$\beta_E(t_A) = e^{-\frac{(\mu - K_E S_M)^2}{2 K_E^2 \sigma_A^2}} \quad \mu \geq K_E S_M,$$

$$= 1 \quad \mu \leq K_E S_M ;$$



DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

- son taux moyen de fausse alarme est :

$$\tau_E = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sigma_A^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_A(v) (v-v_s)^2 dv \right)^{1/2} \frac{\mu}{K_E} e^{-\mu^2/2 K_E^2 \sigma_A^2}.$$

On a donc :

$$\tau_E = \frac{2\sqrt{\pi}}{\sigma_A} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_A(v) (v-v_s)^2 dv \right]^{1/2} \left[(-\text{Log } \beta(t_A))^{1/2} + \frac{S_M}{\sqrt{2} \sigma_A} \right] e^{-\left[(-\text{Log } \beta(t_A))^{1/2} + \frac{S_M}{\sqrt{2} \sigma_A} \right]^2}$$

Si $B_A(t)$ et $S_A(t)$ sont le bruit et le signal de sortie du filtre adapté à n entrées ^{au} $(n,1)$ -signal $S(t) = Z(t-\theta_G)$, dans le bruit de densité spectrale $\gamma_B(v)$, ce filtrage (matrice ligne) a pour équation [1]:

$$h_A(v) = K_A e^{-2\pi i v t} s^+(v) \gamma_B^{-1}(v),$$

et on a :

$$\gamma_A(v) = K_A^2 z^+(v) \gamma_B^{-1}(v) z(v)$$

$$\sigma_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_A(v) dv$$

$$S_M = \frac{\sigma_A^2}{K_A}$$

Les différents résultats précédents permettent de tracer les courbes "C.O.R. modifiées" à la sortie de systèmes du type n -filtrage adapté à préformation de voies et éventuellement suivi de détections linéaires d'enveloppe.

DETECTION, ESTIMATION ET PERFORMANCES DE SIGNAUX CERTAINS DE DATE
D'ARRIVEE ET DE DIRECTION INCONNUES.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARQUES P.-Y. : Filtrage adapté et détection optimale de signaux certains - Séminaire sur le Traitement du Signal - Nice Septembre 1970 - A paraître.
- [2] MACCHI O. : Détection optimale d'un signal de temps d'arrivée inconnu et estimation de ce temps. Annales des Télécommunications. T. 25, N° 7-8, Juillet-Août 1970.
- [3] MACCHI C. , MACCHI O. : Détection optimale auto-adaptative d'un signal vectoriel de temps d'arrivée inconnu. Annales des Télécommunications. A paraître.
- [4] MIDDLETON D. : An Introduction to Statistical Communication Theory - Mc Graw Hill, New York 1960.
- [5] ANGOT A. : Compléments de Mathématiques - Editions de la Revue d'Optique - Paris, 1965.
- [6] BLANC LAPIERRE A. : Modèles statistiques pour l'étude des phénomènes de fluctuations, Masson et Cie, Paris, 1963.