TROISIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

REMARQUES SUR CERTAINS PROBLEMES DE CONVERGENCE EN THEORIE DU SIGNAL

par D. de Brucq
Chargé de recherches

au CENTRE D'ETUDES THEORIQUES DE LA DETECTION
ET DES COMMUNICATIONS
5 bis, Av. de la Porte de Sèvres
75 - PARIS 15° -

RESUME

On montre que l'échantillonnage de taille h sur la réponse, se réduit souvent pour des raisons physiques à une projection sur un sous-espace E_h de l'espace E de Hilbert des réponses . On compare dans le contexte d'un signal certain dans un bruit gaussien, les dérivées de Radon-Nikodym des mesures associées aux hypothèses bruit seul et bruit plus signal pour les espaces E et E_h. Une condition de convergence est donnée.

SUMMARY

We show that samples of size h on the response often reduce for physical reasonsto projections on subspaces E_h of size h of the Hilbert space E of the responses. Taking a gaussian noise ,signal, we compare the Radon-Nikodym derivatives for the measures of the noise and of the signal plus noise, in the spaces E_h and E . A condition of convergence is given.

Remarques sur certains problèmes de convergence en Théorie du Signal.

Lors du traitement digital de l'information effectué par calculateurs, la réponse reçue est discrétisée. Ce sont des problèmes liés à cette discrétisation que nous comptons examiner. L'observation de la réponse s'écoule d'un instant initial 0 jusqu'à un instant T. La réponse $X(t)$, $t \in [0,T]$ varie d'une observation à l'autre, elle est aléatoire. On introduit un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$ et la réponse pour chaque observation indicée par ω élément de Ω, est notée $X(t,\omega)=x_\omega(t)$. La réponse peut provenir de plusieurs phénomènes différents. Sous l'hypothèse H_0, aucun signal n'est envoyé et nous recevons uniquement du bruit $X(t)=B(t)$. Sous l'hypothèse H_1, un signal $s(t)$ est envoyé et nous recevons $X(t)=B(t)+s(t)$. Le cas de plusieurs signaux se traiterait d'une façon analogue.

Nous supposons pour des raisons d'origine physique que le bruit est un processus gaussien c'est à dire que pour tout $t_1,\ldots,t_h \in [0,T]$, la variable aléatoire h dimensionnelle $(X(t_1),\ldots, X(t_h))$ est gaussienne centrée et de plus que les trajectoires $B(t,\omega), t \in [0,T]$ sont continues. Etant sur un intervalle borné $[0,T]$, le bruit $B(t)$ vérifie l'inégalité :

$$\forall\, \omega \in \Omega \qquad \int_0^T (B(t,\omega))^2\, dt < \infty$$

On démontre [1 p.297] dans ces conditions que

$$E\left[\int_0^T (B(t,\omega))^2 dt\right] < \infty$$

où E représente l'espérance mathématique par rapport à P. Cette inégalité n'est pas vérifiée par le bruit blanc. Nous supposons de plus connue la fonction d'autocorrélation $\Gamma(t,\tau) \overset{def}{=} E[B(t)B(\tau)]$ avec $t,\tau \in [0,T]$ qui est une fonction continue des deux variables.

Remarques sur certains problèmes de convergence en Théorie du Signal.

Le Signal provenant d'appareillages manufacturés est continu et par suite $\int_0^T (s(t))^2\, dt < \infty$. On introduit l'espace $E \overset{def}{=} \mathcal{L}2([0,T],dt)$ des fonctions f mesurables de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$, de carré intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue dt. Le produit sclaire $\int_0^T f(t)g(t)dt$ est noté $\langle f,g \rangle$ où f,g appartiennent à E. Dans ces conditions $\forall\ \omega \in \Omega\ B(t,\omega)+s(t) \in E$. De façon usuelle, nous munissons E de la tribu $\mathcal{B}$, engendrée par les cylindres à base mesurable, c'est dire que $\mathcal{B}$ est la plus petite tribu, telle que, quels que soient p et t_1, - - - $t_p \in \mathbb{R}$, la fonction $f \rightsquigarrow (f(t_1), - - f(t_p))$ est mesurable de $(E,\mathcal{B})$ dans $(\mathbb{R}^p, \mathcal{R}^{\otimes p})$ où $\mathcal{R}^{\otimes p}$ est la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^p$.

L'espace $(E, \mathcal{B})$ peut être muni des deux probabilités images μ_0 et μ_1 de P par la variable aléatoire X sous chacune des deux hypothèses H_0 et H_1, ainsi

$$\forall\ M \in \mathcal{B} \quad \mu_0(M) = P\ [B^{-1}(M)]$$

$$\mu_1(M) = P\ [(B+s)^{-1}(M)]$$

Bien que s continue, soit d'énergie finie, cela n'implique pas (2.p.167) que μ_1 soit absolument continue par rapport à μ_0. Notons par D, quand elle existe, la dérivée de Randon-Nikodym

$$\forall f \in E \quad \frac{d\mu_1}{d\mu_0}(f) \overset{def}{=} D(f)$$

La variable libre est la fonction f élément de E. D est défini presque sûrement par rapport à μ_0. La fonction D va de E dans $\mathbb{R}^+$. Sous l'hypothèse supplémentaire d'existence d'un filtre adapté c'est à dire d'existence d'une solution θ, dans l'espace E, de l'équation intégrale ../

$s(t)=\int_0^T \Gamma(t,\tau)\theta(\tau)d\tau \ \forall\ t\in[0,T]$, la dérivée D prend la forme simple suivante [2 p.172] :

$$\forall f\in E \quad D(f)=\exp\left[\int_0^T \theta(\tau)f(\tau)d\tau - \frac{1}{2}\int_0^T \theta(\tau)s(\tau)d\tau\right]$$

Lors du traitement du signal on est amené, connaissant s et Γ, à calculer θ une fois pour toutes et pour chaque réponse $(x(t);t\in[0,T])$ à calculer D (x) ou $\log D(x) + \frac{1}{2}\int_0^T \theta(\tau)s(\tau)d\tau = \langle \theta, x\rangle \overset{def}{=} \psi(x)$ fonction monotone croissante de D(x).

Une méthode consiste à approcher les intégrales par des sommes finies et à résoudre le système obtenu. Sous une forme simple, divisons l'intervalle $[0,T]$ en h parties égales de longueur $\frac{T}{h}$ et prenons $t_i, i=1,---,h$ au centre des différents intervalles. Le système approché s'écrit :

$$A \begin{cases} s(t_i)=\frac{T}{h}\sum_{i=1}^{h} \Gamma(t_i,t_j)\theta(t_j) \\ \psi(x)=\frac{T}{h}\sum_{j=1}^{h} \theta(t_j)x(t_j) \end{cases}$$

Introduisons dans l'espace F, la famille orthonormée $\{g_i\ ;\ i=1,---,h\}$

où $i = 1,---,h$ $\quad g_i(t)=\begin{cases} 0 & t\notin](i-1)\frac{T}{h}, i\frac{T}{h}] \\ \sqrt{\frac{h}{T}} & t\in](i-1)\frac{T}{h}, i\frac{T}{h}] \end{cases}$

En prenant toutes les combinaisons linéaires finies de ces vecteurs g_i, $i=1,--,h$, nous définissons un sous-espace E_h de Hilbert de E et le projecteur τ_h de E sur E_h. De façon précise $\forall f\in E$ $\tau_h : f \rightsquigarrow \tau_h f = \sum_{i=1}^{h}\langle f, g_i\rangle g_i$.

Remarques sur certains problèmes de convergence en Théorie du Signal.

Le projecteur τ_h est une application linéaire continue de E sur E_h .Comme E_h est isomorphe à $\mathbb{R}^h$, la tribu des boréliens de E_h et la tribu $\mathcal{R}^{\otimes h}$ de $\mathbb{R}^h$ sont isomorphes. Soit $\mathcal{B}_h = \tau_h^{-1}(\mathcal{R}^{\otimes h})$ la sous-tribu de $\mathcal{B}$ des cylindres à base mesurable dans E_h.Nous identifions $\mathcal{B}_h$ et les boréliens de E_h.

Sous l'hypothèse H_o, la fonction $\omega \rightsquigarrow \tau_h\, B(\cdot,\omega)$ composée des fonctions $\omega \rightsquigarrow B(\cdot,\omega)$ et τ_h, introduit dans $(E_h, \mathcal{B}_h)$ une mesure $\mu_{o,h}$ qui satisfait à la propriété suivante :

$$\forall M \in \mathcal{B}_h \quad \mu_{o,h}(M)=\mu_o(\tau_h^{-1}(M)) \text{ soit } \mu_{o,h} = \tau_h\ (\mu_o)$$

De même posons $\mu_{1,h} = \tau_h(\mu_1)$image, sous l'hypothèse H_1, de la probabilité P , par le processus $X = B+s$.

Nous pouvons reprendre la théorie générale pour l'espace de Hilbert E_h.Le bruit τ_h B a pour fonction d'autocorrélation

$$\Gamma_h(t,\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E\big((\tau_h\ B)(t)(\tau_h\ B)(\tau)\big) = E\Big[\sum_i g_i(t)\langle B,g_i\rangle \sum_j g_j(\tau)\langle B,g_j\rangle\Big]$$

$$= \sum_{i,j} g_i(t)g_j(\tau) \int_o^T \int_o^T \Gamma(u,v)g_i(u)g_j(v)du\ dv$$

Appelons $\Gamma_{i,j} = \int_o^T\int_o^T \Gamma(u,v)g_i(u)g_j(v)\ du\ dv$

Si nous introduisons les opérateurs Γ :
$f \rightsquigarrow \int_o^T \Gamma(t,\tau)f(\tau)d\tau$ et $\Gamma_h : f \rightsquigarrow \int_o^T \Gamma_h(t,\tau)f(\tau)d\tau$
de E dans E, il vient $\Gamma_h = \tau_h\ \Gamma\, \tau_h$

Soit D_h, la dérivée de Randon-Nikodym définie sur E presque sûrement par rapport à la mesure $\mu_{o,h}$ l'expression $\dfrac{d\mu_{1,h}}{d\mu_{o,h}} = D_h$. Sous réserve d'existence de D, nous allons démontrer l'existence de D_h.La relation de défi-
../

nition de D est la suivante :

$$\forall M \in \mathcal{B} \quad \mu_1(M) = \int_M D(f) d\mu_0(f)$$

L'espérance mathématique conditionnelle $E^{\mathcal{B}_h}(D)$ de D par rapport à la sous-tribu $\mathcal{B}_h$ de $\mathcal{B}$ est une fonction de E dans $\mathbb{R}^+$, mesurable par rapport à $\mathcal{B}_h$ et vérifiant

$$\forall M \in \mathcal{B}_h \quad \mu_1(M) = \int_M E^{\mathcal{B}_h}(D)(f) \, d\mu_0(f)$$

Les mesures intervenant dans cette expression sont les restrictions de μ_1 et de μ_0 à $\mathcal{B}'_h$. En raison de l'identification des cylindres de $\mathcal{B}_h$ avec les boréliens de E_h, il y a identification également entre les restrictions de μ_0 et μ_1 à $\mathcal{B}_h$ avec $\tau_h \mu_0$ et $\tau_h \mu_1$ respectivement. Par suite,

$$\forall M \in \mathcal{B}_h \quad \tau_h \mu_1(M) = \int_M E^{\mathcal{B}_h}(D)(f) d \, \tau_h \mu_0(f) \text{ et}$$

$$D_h(f) \underset{\mu_{0,h} \, p.s}{=} E^{\mathcal{B}_h}(D)$$

En supposant l'existence d'une solution θ_h de l'équation intégrale

$\tau_h s = (\tau_h \Gamma \tau_h) \theta_h$, la dérivée D_h vérifie la relation $\log D_h(f) - \frac{1}{2} \langle \theta_h, s_h \rangle = \langle \theta_h, f \rangle$

Ecrivons de façon explicite, l'équation intégrale :

$$\sum_i \langle s, g_i \rangle g_i(t) = \sum_{i,j} g_i(t) \Gamma_{i,j} \langle g_j, \theta_h \rangle$$

qui se réduit à l'équation matricielle : ../..

$$\forall\ i \in 1, --, h \qquad \langle s, g_i \rangle = \sum_j \Gamma_{i,j} \langle g_j, \theta_h \rangle$$

Dans E_h, la solution θ_h existe si $(\Gamma_{i,j})$ est inversible et dans le cas contraire, si le vecteur $(\langle s, g_i \rangle)$ se trouve dans l'espace image de E_h par $(\Gamma_{i,j})$. Remarquons que $\Gamma_{i,j}$ ainsi que les produits scalaires sont des intégrales par rapport à t; en approchant ces intégrales de la manière suivante :

$$\langle s,\ g_i \rangle = \int_0^T s(\tau) g_i(\tau) d\tau \text{ par } s(t_i) \sqrt{\frac{T}{h}}$$

$$\text{et} \quad \Gamma_{i,j} = \int_0^T\!\!\int_0^T \Gamma(u, v) g_i(u) g_j(v) du\, dv \text{ par } \Gamma(t_i, t_j) \frac{T}{h}$$

les équations approchées A sont les équations dans E_h donnant D_h.

D'un point de vue plus concret, les instruments physiques ne permettent pas d'obtenir en un point t, la valeur exacte de la fonction f . Les appareillages en fournissent une valeur approchée. En admettant que ceux-ci sont des filtres linéaires, la valeur retenue est

$$\int_0^T f(t) l_i(t) dt \text{ voisin de } f(t_i)$$

pour une fonction l_i convenable. Nous reconnaissons le produit scalaire $\langle f,\ l_i \rangle$ et la fonction f est remplacée par sa projection

$$f_h \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{h} \langle f, l_i \rangle l_i \text{ sur l'espace vectoriel } E_h$$

engendré par les $l_i, i=1, --, h$.

Par conséquent, les problèmes d'échantillonnage peuvent être présentés à l'aide de la théorie des projecteurs dans un espace de Hilbert, la dimension h de l'espace vectoriel E_h étant choisie en fonction de l'ordinateur utilisé. Quel espace E_h faut-il choisir ? L'estimation effectuée à l'aide de l'espace E_h s'approche-t-elle de l'estimation idéal ?

Comme l'opérateur Γ_h de E_h dans E_h est symétrique, introduisons une base $e_1^h, - - -, e_h^h$ de vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1^h, - - -, \lambda_h^h$, certaines de ces valeurs propres pouvant être nulles. Sous l'hypothèse H_o, le processus aléatoire $\tau_h B$ s'écrit

$\tau_h B = \sum_{i=1}^{h} X_i \; e_i^h$ où $X_i = \langle B, e_i^h \rangle$ sont des variables aléatoires normales centrées vérifiant

$$E(X_i \; X_j) = \lambda_i^h \, \delta_{i,j} \quad \text{où } \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

et sous l'hypothèse H_1, le processus aléatoire $\tau_h(B+s)$ s'écrit $\tau_h(B+s) = \sum_{i=1}^{h} (X_i + s_i^h) \; e_i^h$ avec $s_i^h = \langle s, e_i^h \rangle$. Dans ces conditions, chaque coordonnée se comporte indépendamment des autres avec des lois

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i^h}} \exp - \frac{x^2}{2 \lambda_i^h} \quad \text{sous l'hypothèse } H_o$$

et $$\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_i^h}} \exp - \frac{(x - s_i^h)^2}{2 \lambda_i^h} \quad \text{sous l'hypothèse } H_1$$

Par conséquent $\log. D_h(f) = \sum_{i=1}^{h} \frac{s_i^h \langle f, e_i^h \rangle}{\lambda_i^h} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{h} \frac{s_i^{h2}}{\lambda_i^h}$

$$= \langle \Gamma_h^{-1} s, f \rangle - \frac{1}{2} \langle \Gamma_h^{-1} s, s \rangle$$

$$= \langle \theta_h, f \rangle - \frac{1}{2} \langle \theta_h, s \rangle$$

Si nous utilisons le test de Neyman-Pearson, nous comparons $\phi_h(x) = \langle \theta_h, x \rangle$ à un seuil α dépendant de la probabilité de fausse alarme choisie

$$\left(p_{o,1} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_h} \exp -\left(\frac{x^2}{2\sigma_h^2}\right) dx = \int_{\frac{\alpha}{\sigma_h}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{x^2}{2} dx \right.$$

ainsi $\frac{\alpha}{\sigma_h}$ est fixé ; σ_h^2 est la variance de $\langle \theta_h, X \rangle$ indifèremment sous l'hypothèse H_o ou H_1 et vaut $\langle \theta_h, s \rangle$

La probabibilité de non détection devient égale à

$$p_{1,o} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma_h} \exp - \frac{(x-\sigma_h^2)^2}{2\ \sigma_h^2} dx$$

Pour une réponse x, nous calculons $\phi_h(x) = \langle \theta_h, x \rangle$ que nous comparons au seuil α. Si $\phi_h(x) \leqslant \alpha$ nous acceptons H_o, dans le cas contraire nous acceptons H_1. Le sous-espace vectoriel E_h choisi intervient donc par σ_h. Le test de Neyman-Pearson est d'autant meilleur que σ_h est plus grand. On démontrerait un résultat analogue si le test de Bayes associé à une fonction de coût avait été utilisé.

Le nombre $\sigma_h^2 = \langle \theta_h , s \rangle$ a une signification physique bien précise puisque d'une part

$$\int_{E_h} \log \cdot \frac{d\mu_{1,h}}{d\mu_{o,h}} \, d\mu_{1,h} = \frac{1}{2} \langle \theta_h , s_h \rangle \text{ est l'information}$$

mutuelle entre les deux mesures $\mu_{1,h}$ et $\mu_{o,h}$ et, d'autre part, pour la réponse X passant dans le filtre linéaire adapté défini par θ_h, le rapport signal sur bruit est précisément égal à

$$\frac{|\langle \theta_{h,s} \rangle|^2}{\text{var.}(\langle \theta_h B \rangle)} = \langle \theta_h , s \rangle$$

En définitive le choix de E_h doit être fait de façon à maximiser l'information relative entre $\mu_{o,h}$ et $\mu_{1,h}$. Remarquons pour le cas trivial $h = 1$ que la fonction g est parfaitement déterminée. Si $\theta_1(t) = \langle \theta_1 , g \rangle g(t)$ l'équation intégrale se limite à

$$\langle s, g \rangle = \int_0^T \int_0^T \Gamma(u,v) g(u) g(v) du\, dv \, \langle g, \theta_1 \rangle .$$ Par conséquent, il s'agit de trouver g de E pour maximiser

$$\frac{|\langle s, g \rangle|^2}{\int_0^T \int_0^T \Gamma(u,v) g(u) g(v) du\, dv}$$

dont la solution [3 p. 122] est le filtre adapté $\theta(t)$ vérifiant $s(t) = \int_0^T \Gamma(t,\tau)\theta(\tau)d\tau$, l'existence de θ a été supposée antérieurement. Dans le cas de h fonction g_i, d'autres considérations interviennent en particulier lorsque plusieurs signaux s peuvent être envoyés. Une solution approchée du maximum est cherchée alors dans une sous-famille d'espaces vectoriels E_h par exemple, .../..

pour chaque $i = 1, --, h$, la fonction g_i peut être choisie nulle en dehors de l'intervalle $M_i =](i-1)\frac{T}{h}, i\frac{T}{h}]$. Nous pouvons choisir g_i égal au filtre adapté pour cet intervalle M_i associé à la fonction d'autocorrélation $\Gamma(t,\tau)$ restreinte à t,τ dans M_i. C'est la solution exacte du problème de maximisation lorsque la corrélation entre deux intervalles M_i, M_j $i \neq j$ est nulle. Ainsi remplacer la fonction $(f(t), t \in [0,T])$ par l'ensemble des valeurs de f aux points t_i, $i = 1 - h$ est en général très éloigné de l'optimum.

Ayant choisi une suite de sous-espaces vectoriels E_h, la suite d'estimateurs $\phi_h(x)$ converge-t-elle vers $\langle \theta, x \rangle$, quand il existe. Rappelons que θ_h solution de l'équation $\tau_h \Gamma \tau_h \theta_h = s$ est lié à D_h par la formule

$\forall f \in E \quad \log \; D_h(f) = \langle \theta_h, f \rangle - \frac{1}{2} \langle \theta_h, s \rangle$ et

$$\int \log D_h \, d\mu_{1,h} = \frac{1}{2} \langle \theta_h, s \rangle$$

Nous supposons que la suite des projecteurs τ_h tend fortement vers l'identité c'est à dire que la suite $\{g_1, ---, g_h, --- \}$ de fonctions choisies est complète dans E alors [4 p.140] les tribus $\mathcal{B}_h$ croissantes convergent vers $\mathcal{B}$ soit $\mathcal{B} = \sigma(\bigcup_h \mathcal{B}_h)$. La martingale $D_h = E^{\mathcal{B}_h}(D)$ converge [5 p.136] presque sûrement et dans L_1. Comme $\mathcal{B} = \sigma(\bigcup_h \mathcal{B}_h)$, la limite est précisémment D. Sauf sur un ../

Remarques sur certains problèmes de convergence en Théorie du Signal.

---

ensemble de mesure μ_o nulle, $D_h(f)$ converge vers $D(f)$.
De façon directe, l'existence de D implique que D_h est une martingale et par conséquent que $\log D_h$ est une sous-martingale [5 p.137]; celle-ci converge μ_o presque sûrement. La suite des informations mutuelles $\frac{1}{2}\langle\theta_h, s_h\rangle$ est croissante et converge vers $\int \log D \, d\mu_o$ (éventuellement infinie).

L'existence de θ élément de E comme solution de $s = \Gamma\theta$ implique entre autre [6 p.171] que μ_1 est absolument continue par rapport à μ_o et que l'information mutuelle $\int \log D \, d\mu_1 = \frac{1}{2}\langle\theta, s\rangle$ est finie. La suite $\langle\theta_h, s_h\rangle$ converge vers $\langle\theta, s\rangle$ et $\psi_h(f) = \log D_h(f) + \frac{1}{2}\langle\theta_h, s\rangle$ converge vers $\langle\theta, f\rangle = \log D(f) + \frac{1}{2}\langle\theta, s\rangle$ pour μ_o presque toutes valeurs de $f \in E$. Par modification sur un ensemble de mesure μ_o nulle, $\psi_h(f)$ converge vers $\langle\theta, f\rangle$ pour tout f de E et la suite θ_h est bornée dans E.

Réciproquement, supposons la suite θ_h bornée dans E alors la suite $\langle\theta_h, s_h\rangle$ est bornée par $\sup \|\theta_h\| \, \|s\|$ et $\int \log D \, d\mu_1$ est finie. La sous-martingale $\log D_h$ converge μ_o presque sûrement et la suite croissante $\frac{1}{2}\langle\theta_h, s_h\rangle$ converge vers $\int \log D \, d\mu_1$ finie. Par conséquent $\langle\theta_h, f\rangle$ converge μ_o presque sûrement vers un opérateur linéaire $\langle\theta, f\rangle$. Par modification sur un ensemble de mesure μ_o nulle, la convergence a lieu dans E de sorte que [7 p.121], $\|\theta\| < \infty$.

../..

Remarques sur certains problèmes de convergence
en Théorie du Signal.

Le filtre adapté $\theta \in E$ existe si et seulement si la suite θ_h est bornée, c'est à dire si

$$\sup_h \int_0^T |\theta_h(t)|^2 dt < \infty$$

B I B L I O G R A P H I E

[1] T.T.KADOTA - Non singular detection and likelihood ratio for randon signals in white gaussian noise.

I.E.E.E. Trans.on Inf.Theory vol.IT 16 n°3 May 1970.

[2] BALAKRISHNAN Communication Theory Inter-University Electronics Series Mac-Graw Hill 1968.

[3] HELSTROM Statistical-Theory of Signal Detection Pergamon-Press 1968.

[4] B.H.BHARUCHA et T.T. KADOTA - Representation of continuous parameter processes - Trans. on Inf.Theory vol.IT.16 n°2 March 1970.

[5] NEVEU Bases mathématiques du calcul des probabilités - Masson 1964.

[6] NEVEU Processus aléatoires gaussiens Les Presses de l'Université de Montréal 1968 -

[7] YOSIDA Functional Analysis Springer Verlag 1965.