TROISIEME COLLOQUE SUR LE

TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1er au 5 juin 1971

SPECTRE D'UNE CLASSE GENERALE DE SIGNAUX.

Robert FORTET

RESUME

Spectre des signaux de la forme : $S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\tau,t)Z(\tau)M(d\tau)$,

où : - $M(d\tau)$ est une répartition aléatoire d'instants sur $\tau\in(-\infty,+\infty)$

- $Z(\tau)$ est une fonction aléatoire de $\tau\in(-\infty,+\infty)$
- $I(\tau,t)$ est une fonction aléatoire de $\{\tau,t\}\in(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$.

Une interprétation est la suivante : $Z(\tau)$ est une fonction à échantillonner ; $M(d\tau)$ est la répartition des instants d'échantillonnage ; $I(\tau,t)$ est une impulsion associée à l'instant τ (qui peut être l'instant d'émission de cette impulsion).

Les 3 aléatoires $I(\tau,t)$,$Z(\tau)$,$M(d\tau)$ sont supposées indépendantes

SUMMARY

Determination of the spectrum of signals of the form :

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\tau,t)Z(\tau)M(d\tau) ,$$

where :

- $M(d\tau)$ is a random distribution of instants $\tau\in(-\infty<\tau<+\infty)$
- $Z(\tau)$ is a random function of $\tau\in(-\infty,+\infty)$;
- $I(\tau,t)$ is a random function of $\tau,t\in(-\infty,+\infty)$.

An interpretation is the following : $Z(\tau)$ is a random function to be sampled ; $M(d\tau)$ is the distribution of the sampling instants; $I(\tau,t)$ is a pulse, associated with the instant τ (which may be the emission instant of that pulse).

The 3 random elements $I(\tau,t)$,$Z(\tau)$,$M(d\tau)$ are assumed to be independant.

SPECTRE D'UNE CLASSE GENERALE DE SIGNAUX

Robert FORTET

SYMBOLES ET NOTATIONS

$\overline{a}$ nombre complexe conjugué du nombre complexe a .

E(X) espérance mathématique de la variable aléatoire (réelle ou complexe) X .

1°) Préambule :

Dans de multiples domaines importants (télécommunications, émissions de particules, etc...) , on a à faire à des signaux aléatoires (les signaux déterministes ne sont pas exclus ; ils sont un cas particulier des signaux aléatoires), dont la structure est du type suivant :

A des instants τ_k $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ aléatoires ou non, on prélève (échantillonnage) la valeur $Z(\tau_k)$ d'une fonction aléatoire $Z(t)$ du temps t ;

à chaque instant τ , est associée une impulsion, c'est à dire une fonction $I(\tau,t)$ du temps t , mais dépendant de l'instant τ , qui a en principe la signification d'être l'instant d'émission de l'impulsion $I(\tau,t)$;

finalement, pour chaque k , est prise en considération (par exemple : est transmise) l'impulsion $I(\tau_k,t)$, mais "pondérée" par $Z(\tau_k)$; on constitue donc ainsi le signal :

$$S(t) = \sum_k Z(\tau_k)\, I(\tau_k,t) \quad . \qquad (1,1)$$

A propos de signaux de ce genre, une des questions que l'on se pose usuellement est celle de déterminer leur spectre.

Nous allons définir une forme générale de signal, dans laquelle (1,1) entre comme cas particulier ; et, pour cette large classe de signaux, nous procéderons à la détermination du spectre ; nous espérons établir des formules explicites, qu'il suffira d'appliquer à chaque cas particulier ; au lieu, dans chaque cas particulier, de recommencer un calcul complet, comme cela se pratique actuellement.

Le présent texte n'expose pas l'étude mathématique rigoureuse et complète ; il vise seulement à donner des moyens de calcul efficaces ; la validité de ces calculs est sujette à certaines conditions, d'ailleurs très larges ; ces conditions, en général, ne seront pas discutées ; en pratique, il est suffisant de vérifier que le résultat final et les résultats intermédiaires ont un sens, pour être assuré de la correction du résultat final.

Il sera fait appel à des notions et à des résultats de la Théorie des Distributions ; mais les distributions qui interviendront seront toujours supposées être soit des fonctions, soit des mesures (complexes, en général).

2°) Mesures aléatoires régulières :

R désignera l'axe des temps (ou : l'espace des nombres réels : c'est la même chose).

Supposons qu'à tout sous-ensemble ω de R, soit associée une variable aléatoire (en général complexe) $M(\omega)$; posons :

$$\sigma(\omega_1,\omega_2) = E\left[M(\omega_1)\,\overline{M(\omega_2)}\right] \quad , \quad \omega_1,\omega_2 \subset R \quad ; \quad (2,1)$$

nous dirons que $M(\omega)$ est une <u>mesure aléatoire régulière</u> (en abrégé : m.a.r.), s'il existe une mesure (en général complexe) $m_2(dt_1,dt_2)$ sur $R \times R$, telle que :

$$\sigma(\omega_1,\omega_2) = \int_{\omega_1}\int_{\omega_2} m_2(dt_1,dt_2) \text{ , pour tous } \omega_1,\omega_2 \subset R \quad ; \quad (2,2)$$

on dira alors que $m_2(dt_1,dt_2)$ est la mesure associée à la m.a.r. $M(\omega)$.

Restriction diagonale : Considérons l'espace $R \times R$, c'est à dire le plan $\{t_1, t_2\}$, en interprétant les axes Ot_1 et Ot_2 comme orthonormés.

Soit D la "diagonale" $t_2 = t_1$ de $R \times R$.

Soit $m_2(dt_1, dt_2)$ une mesure (complexe) sur $R \times R$; soit δ un sous-ensemble quelconque de D ; δ est donc aussi un sous-ensemble de $R \times R$; à ce titre , $m_2(\delta)$ a une valeur bien définie.

Soit ${}_d m_2(dt_1, dt_2)$ la mesure bi-dimensionnelle sur $R \times R$ définie par :

$${}_d m_2(\omega) = m_2(\omega \cap D) \quad \text{pour} \quad \omega \subset R \times R \quad ;$$

nous noterons ${}_d m_2$ la restriction diagonale d'une mesure m_2 .

Soit $\delta \subset D$, et considérons le sous-ensemble e de l'axe des t_1 , qui est la projection de δ sur cet axe ; e est donc l'ensemble des $t \in R$, tels que : le couple $\{t, t\}$, élément de D , appartient à δ . Symbolisons par π l'opération de projection de D sur l'axe des t_1 ; de sorte que :

$$e = \pi(\delta) \quad ; \qquad (2,3)$$

comme π est une correspondance biunivoque entre les sous-ensembles δ de D et les sous-ensembles e de R , en désignant par π^{-1} la correspondance inverse, (2,3) équivaut à :

$$\delta = \pi^{-1}(e) \quad .$$

Considérons alors la mesure uni-dimensionnelle $\nu(e)$ sur R définie par :

$$\nu(e) = m_2\{\pi^{-1}(e)\} \quad ;$$

nous dirons que $\nu(e)$ est la restriction diagonale projetée de la mesure bi-dimensionnelle m_2 ; d'une façon générale, la restriction diagonale projetée d'une mesure bi-dimensionnelle $m_2(dt_1,dt_2)$ sera notée ${}_pm_2(dt)$.

Exemple (2,1) : Sur R , affectons à des points particuliers quelconques, τ_j $(j = 0, \pm 1, \pm 2,...)$ en nombre fini ou en infinité dénombrable, les masses respectives ρ_j réelles ou complexes : nous constituons ainsi une répartition de masse ou mesure, dont on dit qu'elle est "discrète".

Une mesure $\rho(dt)$ sur R est "continue" si : I désignant un intervalle, on a la propriété que $\rho(I)$ tend vers 0 si la longueur de I tend vers 0 .

Toute mesure $\rho(dt)$ sur R se décompose de façon unique en la somme d'une mesure discrète $\overset{d}{\rho}(dt)$ et d'une mesure continue $\overset{c}{\rho}(dt)$; nous dirons de $\overset{d}{\rho}(dt)$ qu'elle est la composante discrète de $\rho(dt)$.

Soient $\mu(dt)$ et $\nu(dt)$ deux mesures sur R , et $m_2(dt_1,dt_2)$ la mesure sur $R \times R$ définie par :

$$m_2(dt_1,dt_2) = \mu(dt_1)\,\nu(dt_2) \quad ;$$

considérons :

- la composante discrète $\overset{d}{\mu}(dt)$ de $\mu(dt)$; elle est constituée par des masses a_j placées respectivement aux points x_j $(j = 1,2,...)$;

- la composante discrète $\overset{d}{\nu}(dt)$ de $\nu(dt)$; elle est constituée par des masses b_k placées respectivement aux points y_k $(k = 1,2,...)$.

Soit z un point tel que : il existe un j et un k tels que : $z = x_j = y_k$; en ce z plaçons la masse $a_j b_k$; nous constituons ainsi une mesure discrète, que nous désignerons par :

$$\overset{d}{\mu} \oplus \overset{d}{\nu} \quad ;$$

on démontre que :

Lemme (2,1) : La restriction diagonale projetée ${}_p m_2(dt)$ de $m_2(dt_1,dt_2) = \mu(dt_1)\,\nu(dt_2)$, est $\overset{d}{\mu} \oplus \overset{d}{\nu}$.

Remarque (2,1) : Si $\nu = \overline{\mu}$, $\overset{d}{\nu} = \overset{\overline{d}}{\mu}$; alors $\overset{d}{\mu} \oplus \overset{d}{\nu} = \overset{d}{\mu} \oplus \overset{\overline{d}}{\mu}$, est la mesure constituée en attribuant à chaque point x_j la masse $|a_j|^2$.

Revenons à la m.a.r. $M(\omega)$; nous poserons :

$$m_1(\omega) = E[M(\omega)] \quad ; \qquad (2,4)$$

$m_1(dt)$ est une mesure (non-aléatoire) sur R ; $M^c(\omega)=M(\omega)-m_1(\omega)$ est une m.a.r. que nous appellerons : réduite de la m.a.r. $M(\omega)$, et dont la mesure associée $m_2^c(dt_1,dt_2)$ résulte de :

$$m_2(dt_1,dt_2) = m_1(dt_1)\,\overline{m_1(dt_2)} + m_2^c(dt_1,dt_2) \quad ; \qquad (2,5)$$

nous appellerons $m_2^c(dt_1,dt_2)$ la mesure associée réduite de la m.a.r. $M(\omega)$.

Exemple (2,2) : Δ étant une durée positive donnée, considérons les instants $\tau_j = j\Delta$ $(j = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots)$; et pour chaque $\omega \subset R$, posons :

$$M(\omega) = \text{nombre des } \tau_j \text{ qui appartiennent à } \omega \quad ;$$

$M(\omega)$, qui en fait n'est pas aléatoire, décrit la répartition sur l'axe de temps, des instants τ_j en progression arithmétique de raison Δ ; cet exemple se rencontre dans tous les problèmes d' échantillonnage périodique.

Avec les notations ci-dessus, $m_1(dt)$ est la mesure sur R obtenue, en plaçant une masse 1 en tous les points $\tau_j = j\Delta$ de R. On a :

$$\left.\begin{aligned} &m_2(dt_1,dt_2) = m_1(dt_1)\,\overline{m_1(dt_2)} \quad , \\ &m_2^c(dt_1,dt_2) = 0 \quad , \\ &{}_p m_2(dt) = m_1(dt) \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (2,6)$$

Exemple (2,3) : Plus généralement, soit $m_1(\omega)$ une mesure non-aléatoire donnée sur R ; en posant :

$$M(\omega) = m_1(\omega) \quad \text{pour tout} \quad \omega \subset R \; , \qquad (2,7)$$

on définit une m.a.r. $M(\omega)$ qui se trouve être non-aléatoire, et pour laquelle :

$$\left.\begin{aligned} &m_2(dt_1,dt_2) = m_1(dt_1)\,\overline{m_1(dt_2)} \quad , \\ &m_2^c(dt_1,dt_2) = 0 \quad , \\ &{}_p m_2(dt) = \overset{d}{m_1} \oplus \overset{\overline{d}}{m_1} \quad . \end{aligned}\right\} \qquad (2,8)$$

Exemple (2,4) d'une répartition de Poisson :Soient $\{\tau_j \; ; \; j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ des points τ_j de R, répartis aléatoirement, en processus de Poisson non-nécessairement homogène ; soit $\rho(\omega)$ l'espérance mathématique du nombre des τ_j qui appartiennent au sous-ensemble $\omega \subset R$; $\rho(\omega)$ est une mesure sur R.

En posant :

$$M(\omega) = \text{nombre des } \tau_j \text{ qui appartiennent à } \omega \subset R \; ,$$

nous définissons une m.a.r. pour laquelle :

$$m_1(dt) = \rho(dt) \quad ; \qquad (2,9)$$

$m_2^c(dt_1,dt_2)$ est identique à sa restriction diagonale ${}_d m_2^c(dt_1,dt_2)$, et :

$$_p m_2^c(dt) = \rho(dt) \quad . \qquad (2,10)$$

Exemple (2,5) : Une généralisation de l'Exemple (2,4) des répartitions de Poisson est la suivante :

Une m.a.r. $M(\omega)$ est à éléments orthogonaux, si

$$E\left(M(\omega_1)\,\overline{M(\omega_2)}\right) = 0$$

chaque fois que les ensembles ω_1 et ω_2 sont disjoints ; une m.a. à éléments orthogonaux est nécessairement une m.a.r. ; $m_2(dt_1,dt_2)$ est identique à sa restriction diagonale ${}_d m_2(dt_1,dt_2)$; et si l'on pose :

$$\mu(\omega) = E(|M(\omega)|^2) \quad , \qquad (2,11)$$

on a :

$$_p m_2(dt) = \mu(dt) \quad . \qquad (2,12)$$

Une m.a. $M(\omega)$ est quasi à éléments orthogonaux, si sa réduite $M^c(\omega)$ est à éléments orthogonaux ; alors $M(\omega)$ est une m.a.r. ; en posant :

$$\mu(\omega) = E(|M^c(\omega)|^2) \quad , \qquad (2,13)$$

on a :

$$m_2(dt_1,dt_2) = m_1(dt_1)\,\overline{m_1(dt_2)} + {}_d m_2^c(dt_1,dt_2) \quad ;$$

$$_p m_2^c(dt) = \mu(dt) \quad ,$$

$$_p m_2(dt) = \overset{d}{m_1} \oplus \overset{\overline{d}}{m_1} + \mu(dt) \quad .$$

3°) Une classe générale de signaux :

A chaque couple $\{\tau,t\}$ de deux instants τ et t, est associée une variable aléatoire (en général complexe) $I(\tau,t)$; posons :

$$\gamma(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2) = E\left[I(\tau_1,t_1)\,\overline{I(\tau_2,t_2)}\right] . \qquad (3,1)$$

Soit $M(\omega)$ une m.a.r. , de mesure associée $m_2(dt_1,dt_2)$; étudions le "signal" $S(t)$, c'est à dire la fonction aléatoire $S(t)$, définie par :

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(\tau,t)\, M(d\tau) . \qquad (3,2)$$

Désignons par $\Gamma(t_1,t_2)$ la covariance de $S(t)$, c'est à dire que :

$$\Gamma(t_1,t_2) = E\left[S(t_1)\ ,\ \overline{S(t_2)}\right] ;$$

on a :

$$\Gamma(t_1,t_2) = E\left[\int_{-\infty}^{+\infty} I(\tau_1,t_1)\, M(d\tau_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{I(\tau_2,t_2)}\ \overline{M(d\tau_2)}\right.$$

$$= E\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} I(\tau_1,t_1)\,\overline{I(\tau_2,t_2)}\, M(d\tau_1)\,\overline{M(d\tau_2)}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} E\left[I(\tau_1,t_1)\,\overline{I(\tau_2,t_2)}\, M(d\tau_1)\,\overline{M(d\tau_2)}\right] . \qquad (3,3)$$

Faisons l'hypothèse suivante, que nous conserverons définitivement :

Hypothèse (2,1) : La famille des variables aléatoires $I(\tau,t)$ $\left(\{\tau,t\}\in R\times R\right)$ est indépendante de la m.a.r. $M(\omega)$.

Alors (3,3) et (2,1) donnent :

$$\Gamma(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2) m_2(d\tau_1,d\tau_2) \quad . \quad (3,4)$$

Il est utile de formuler quelques variantes de (3,4).

Posons :

$$h_1(\tau,t) = E[I(\tau,t)] \quad , \quad (3,5)$$

$$I(\tau,t) = h_1(\tau,t) + I^c(\tau,t) \quad , \quad (3,6)$$

$$h_2^c(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2) = E[I^c(\tau_1,t_1)\overline{I^c(\tau_2,t_2)}] \quad , \quad (3,7)$$

de sorte que :

$$\gamma(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2) = h_1(\tau_1,t_1)\,\overline{h_1(\tau_2,t_2)} + h_2^c(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2) \quad ; \quad (3,8)$$

avec (2,4) , (3,4) peut s'écrire :

$$\Gamma(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau,t_1)\; m_1(d\tau) \;.\; \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h_1(\tau,t_2)}\;\overline{m}_1(d\tau)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_2^c(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2)\; m_1(d\tau_1)\;\overline{m}_1(d\tau_2)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1,t_1)\;\overline{h_1(\tau_2,t_2)}\; m_2^c(d\tau_1,d\tau_2)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_2^c(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2)\; m_2^c(d\tau_1,d\tau_2) \quad . \quad (3,9)$$

<u>Cas particulier où $M(\omega)$ est quasi à éléments orthogonaux :</u> Dans le cas particulier où $M(\omega)$ est quasi à éléments orthogonaux, avec les notations de l'Exemple (2,5), (3,9) s'écrit :

$$\Gamma(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau,t_1)\; m_1(d\tau) \;.\; \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h_1(\tau,t_2)}\;\overline{m_1(d\tau)}$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_2^c(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2)\, m_1(d\tau_1)\, \overline{m_1(d\tau_2)}$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau,t_1)\, \overline{h_1(\tau,t_2)}\, \mu(d\tau)$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} h_2^c(t_1,t_2;\tau,\tau)\, \mu(d\tau) \quad . \qquad (3,10)$$

Cas particulier des impulsions indépendantes : Sans hypothèses spéciales sur la m.a.r. $M(\omega)$, supposons que, pour $\tau_2 \neq \tau_1$, $I(\tau_1,t_1)$ et $I(\tau_2,t_2)$ soient indépendantes ; alors :

$$h_2(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2) = 0 \quad \text{si} \quad \tau_2 \neq \tau_1 \quad ;$$

(3,9) se réduit à :

$$\Gamma(t_1,t_2) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau,t_1)\, m_1(d\tau)\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h_1(\tau,t_2)}\, \overline{m_1(d\tau)}\right)$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty} h_2^c(t_1,t_2;\tau,\tau)\{(\overset{d}{m_1} \oplus \overset{\overline{d}}{m_1})(d\tau) + {}_p m_2^c(d\tau)\}$$

$$+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(\tau_1,t_1)\, \overline{h_1(\tau_2,t_2)}\, m_2^c(d\tau_1,d\tau_2) \quad . \qquad (3,11)$$

Exemple (3,1) : Supposons plus particulièrement que :

1°) $h_1(\tau,t) = h_1(t-\tau)$ ne dépend que de la différence $(t-\tau)$;

2°) $h_2^c(t_1,t_2;\tau,\tau) = h_2^c(t_1-\tau;t_2-\tau)$ ne dépend que des différences $(t_1-\tau)$ et $(t_2-\tau)$;

alors (3,11) s'écrit :

$$\Gamma(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t_1-\tau)\, m_1(d\tau) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h_1(t_2-\tau)}\ \overline{m_1(d\tau)}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h_2^c(t_1-\tau\,;t_2-\tau)\ \left((m_1^d \oplus \overline{m_1^d})\,(d\tau) + {}_p m_2^c(d\tau)\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t_1-\tau_1)\ \overline{h_1(t_2-\tau_2)}\ m_2^c(d\tau_1,d\tau_2) \qquad (3,12)$$

Si en outre la m.a.r. $M(\omega)$ est quasi à éléments orthogonaux, (3,10) et (3,12) donnent :

$$\Gamma(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t_1-\tau)\, m_1(d\tau) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{h_1(t_2-\tau)}\ \overline{m_1(d\tau)}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} h_2^c(t_1-\tau\,;t_2-\tau)\ \left((m_1^d \oplus \overline{m_1^d})\,(d\tau) + \mu(d\tau)\right)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t_1-\tau)\ \overline{h_1(t_2-\tau)}\ \mu(d\tau)\ . \qquad (3,13)$$

4°) Rappel de propriétés :

Nous aurons besoin des notations et propriétés suivantes :

1°) Une masse 1 placée à l'abscisse 0 d'un axe $x'0\,x$, est une "distribution de Dirac" sur $x'0\,x$ que nous noterons : $\delta(x)\,dx$; une masse 1 placée à l'abscisse x_o, est la distribution de Dirac en x_o ; nous la noterons naturellement : $\delta(x-x_o)dx$.

La transformée de Fourier de la distribution $\delta(x-x_o)dx$ est une fonction, à savoir la fonction :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\nu x}\, \delta(x-x_o)\, dx = e^{-2\pi i\nu x_o} \quad . \qquad (4,1)$$

2°) Considérons sur l'axe des x, les points d'abscisses :

$$x_j = j\Delta + x_o \quad , \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2,\ldots) \quad , \qquad (4,2)$$

où $\Delta > 0$ est donné quelconque et où x_o est donné quelconque ; plaçons une masse 1 en chacun des points x_j ; nous constituons ainsi une répartition de masse ou distribution, que nous appellerons la distribution $P(x_o;\Delta;dx)$. On peut dire que :

$$P(x_o;\Delta,dx) = \sum_j \delta(x-x_j)\, dx \quad . \qquad (4,3)$$

Il est connu que :

<u>Lemme (4,1)</u> : La transformée de Fourier $\tilde{P}(0;\Delta;dx)$ est $\frac{1}{\Delta}\, P(0;\frac{1}{\Delta};d\nu)$.

<u>Covariance harmonique du signal</u> $S(t)$: On appelle <u>covariance harmonique</u> du signal $S(t)$, la transformée de Fourier $\tilde{\Gamma}(d\nu_1,d\nu_2)$ de sa covariance $\Gamma(t_1,t_2)$; de sorte que :

$$\Gamma(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2)}\, \tilde{\Gamma}(d\nu_1,d\nu_2) \quad ;$$

en général, $\tilde{\Gamma}(d\nu_1,d\nu_2)$ est une mesure (complexe).

Nous allons déterminer cette covariance harmonique.

Supposons que, pour chaque couple $\{\tau_1,\tau_2\}$, $\gamma(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2)$ admette la représentation de Fourier 2-dimensionnelle en $\{t_1,t_2\}$:

$$\gamma(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(\nu_1 t_1 - \nu_2 t_2)}\, \tilde{\gamma}_2(d\nu_1,d\nu_2;\tau_1,\tau_2) , \qquad (4,5)$$

où, pour chaque couple $\{\tau_1,\tau_2\}$, $\tilde\gamma_2(d\nu_1,d\nu_2;\tau_1,\tau_2)$ est en $\{d\nu_1,d\nu_2\}$ une mesure ou, plus généralement, une distribution.

Alors (3,4), (4,5), et (4,4) donnent :

$$\tilde\Gamma(d\nu_1,d\nu_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde\gamma_2(d\nu_1,d\nu_2;\tau_1,\tau_2)\ m_2(d\tau_1,d\tau_2) \quad . \qquad (4,6)$$

Introduisons :

1°) la transformée de Fourier $\tilde m_2(d\alpha_1,d\alpha_2)$ de $m_2(d\tau_1,d\tau_2)$; c'est en principe une distribution ; dans les cas usuels, c'est une mesure ; symboliquement :

$$\tilde m_2(d\tau_1,d\tau_2) = \int\int e^{-2\pi i(\alpha_1\tau_1-\alpha_2\tau_2)}\ m_2(d\alpha_1,d\alpha_2) \quad ; \qquad (4,7)$$

2°) la transformée de Fourier inverse en $\{\tau_1,\tau_2\}$ de $\tilde\gamma_2(d\nu_1,d\nu_2;\tau_1,\tau_2)$, soit $\tilde\gamma_4(d\nu_1,d\nu_2;\alpha_1,\alpha_2)$, dont nous supposons qu'elle est, en $\{\alpha_1,\alpha_2\}$, une fonction ; de sorte que :

$$\tilde\gamma_2(d\nu_1,d\nu_2;\tau_1,\tau_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\alpha_1\tau_1-\alpha_2\tau_2)}\ \tilde\gamma_4(d\nu_1,d\nu_2;\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2 \qquad (4,8)$$

alors (4,6) s'écrit :

$$\tilde\Gamma(d\nu_1,d\nu_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde\gamma_4(d\nu_1,d\nu_2;\alpha_1,\alpha_2)\ \tilde m_2(d\alpha_1,d\alpha_2) \quad . \qquad (4,9)$$

En beaucoup de cas, au lieu de la formule (4,9) dérivée de (3,4) , il vaudra mieux utiliser une formule dérivée de (3,9). Introduisons les notations et définitions suivantes :

$$h_1(\tau,t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(\nu t-\alpha\tau)}\ \tilde h_1(d\nu;\alpha)\ d\alpha \quad , \qquad (4,10)$$

$$h_2^c(t_1,t_2;\tau_1,\tau_2) = \iiiint_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(\nu_1 t_1-\alpha_1\tau_1)-2\pi i(\nu_2 t-\alpha_2\tau_2)}$$

$$\tilde{h}_2^c(d\nu_1,d\nu_2;\alpha_1,\alpha_2)\ d\alpha_1,\ d\alpha_2 \quad ; \qquad (4,11)$$

et symboliquement :

$$\tilde{m}_1(d\alpha) = \int e^{-2\pi i\alpha\tau}\ m_1(d\tau) \qquad (4,12)$$

$$\tilde{m}_2^c(d\alpha_1,d\alpha_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i(\alpha_1\tau_1-\alpha_2\tau_2)}\ m_2^c(d\tau_1,d\tau_2) \ , \quad (4,13)$$

c'est à dire que $\tilde{m}_1(d\alpha)$, $\tilde{m}_2^c(d\alpha_1,d\alpha_2)$ sont les distributions transformées de Fourier des distributions $m_1(d\tau)$, $m_2^c(d\tau_1,d\tau_2)$.

Il vient alors :

$$\tilde{\Gamma}(d\nu_1,d\nu_2) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_1(d\nu_1;\alpha_1)\ \tilde{m}_1(d\alpha_1)\right)\ \overline{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_1(d\nu_2;\alpha_2)\ \tilde{m}_1(d\alpha_2)\right)}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_2^c(d\nu_1,d\nu_2;\alpha_1,\alpha_2)\ \tilde{m}_1(d\alpha_1)\ \overline{\tilde{m}_1(d\alpha_2)}$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_1(d\nu_1;\alpha_1)\ \overline{\tilde{h}_1(d\nu_2;\alpha_2)}\ \tilde{m}_2^c(d\alpha_1,d\alpha_2)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_2^c(d\nu_1,d\nu_2;\alpha_1,\alpha_2)\ \tilde{m}_2^c(d\alpha_1,d\alpha_2) \quad . \qquad (4,14)$$

<u>Spectre du signal</u> $S(t)$: On appelle <u>spectre</u> du signal $S(t)$, la restriction diagonale projetée ${}_p\tilde{\Gamma}(d\nu)$ de $\tilde{\Gamma}(d\nu_1,d\nu_2)$.

5°) Exemple (5,1) des impulsions indépendantes :

Supposons les impulsions indépendantes, et plus particulièrement supposons satisfaites les hypothèses 1°) et 2°) de l'Exemple (3,1) . On peut appliquer (4,14) à ce cas particulier ; mais par cette voie, les conditions de validité du calcul ne ressortent pas de façon évidente ; nous allons plutôt calculer directement à partir de (3,12) , en faisant des hypothèses qui seront spécifiées.

Nous conservons les définitions (4,12) et (4,13) ; introduisons la transformée de Fourier $\tilde{n}(d\alpha)$ de $\{m_1^d \oplus m_1^d(d\tau) + {}_p m_2^c(d\tau)\}$, c'est à dire que, symboliquement :

$$\tilde{n}(d\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\alpha\tau} \{m_1^d \oplus m_1^{\bar{d}} (d\tau) + {}_p m_2^c(d\tau)\} \quad (5,1)$$

Posons :

$$h_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\nu x} \tilde{h}_1(\nu)\, d\nu \quad , \quad (5,2)$$

$$h_2^c(x;y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(\nu_1 x - \nu_2 y)} \tilde{h}_2^c(\nu_1,\nu_2)\, d\nu_1\, d\nu_2 \quad ; \quad (5,3)$$

et supposons que :

1°) $\tilde{h}_1(\nu)$, $\tilde{h}_2^c(\nu_1,\nu_2)$ sont des fonctions ;

2°) $\tilde{m}_1(d\alpha)$, $\tilde{n}(d\alpha)$, $\tilde{m}_2^c(d\alpha_1,d\alpha_2)$ sont des distributions.

Cherchonx la transformée de Fourier de :

$$\lambda(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(t-\tau)\, m_1(d\tau) \quad , \quad (5,4)$$

étant entendu que cette transformée de Fourier est en général une distribution $\tilde{\lambda}(d\nu)$.

Soit $f(t)$ une fonction de t, admettant pour transformée de Fourier inverse une fonction $\tilde{f}(\nu)$; on a par définition:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \lambda(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\ \tilde{\lambda}(d\nu) \quad ;$$

d'après (4,18) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ \lambda(t)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ h_1(t-\tau) m_1(d\tau)\ dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ h_1(t-\tau)\ dt\right)\ m_1(d\tau)$$

d'après (4,16) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ h_1(t-\tau)\ dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\ e^{-2\pi i\nu\tau}\ \tilde{h}_1(\nu)\ d\nu \quad ,$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\ \tilde{\lambda}(d\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\ \tilde{h}_1(\nu)\ e^{-2\pi i\nu\tau}\ d\nu\right)\ m_1(d\tau) \quad ; \qquad (5,5)$$

posons :

$$g(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\ \tilde{h}_1(\nu)\ e^{-2\pi i\nu\tau}\ d\nu \ ,$$

$$\tilde{g}(\nu) = \tilde{f}(\nu)\ \tilde{h}_1(\nu) \quad ,$$

de sorte que $\tilde{g}(\nu)$ est la transformée de Fourier inverse de $g(\tau)$; (4,19) s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\ \tilde{\lambda}(d\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\ m_1(d\tau) \quad ;$$

mais par définition de la transformée de Fourier d'une distribution:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau)\ m_1(d\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\nu)\ \tilde{m}_1(d\nu) \quad ;$$

d'où :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\ \tilde{\lambda}(d\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\nu)\ \left[\tilde{h}_1(\nu)\ \tilde{m}_1(d\nu)\right] \quad ; \qquad (5,6)$$

dans (4,20) , $\tilde{f}(\nu)$ est arbitraire ; on en tire :

$$\tilde{\lambda}(d\nu) = \tilde{h}_1(\nu)\ \tilde{m}_1(d\nu) \quad ;$$

de sorte que la transformée de Fourier du premier terme du second membre de (3,13) est :

$$\tilde{h}_1(\nu_1)\ \overline{\tilde{h}_1(\nu_2)}\ \tilde{m}_1(d\nu_1)\ \overline{\tilde{m}_1(d\nu_2)} \quad . \qquad (5,7)$$

On raisonne de la même façon (mais à 2 dimensions au lieu d'une) pour déterminer les transformées de Fourier du deuxième et du troisième terme du second membre de (3,12).

<u>Notation</u> : Introduisons la notation suivante : si $m(dx)$ est une distribution sur $x'Ox$, $m(dx-a)$ désignera la translatée, par la translation d'amplitude a , de la distribution m ; de sorte qu'identiquement en f :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ m(dx-a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+a)\ m(dx) \quad . \qquad (5,8)$$

La notation sera étendue aux distributions multidimensionnelles.

Ceci dit, on trouve pour la transformée de Fourier $\tilde{\Gamma}(d\nu_1,d\nu_2)$ de $\tilde{\Gamma}(t_1,t_2)$:

$$\tilde{\Gamma}(d\nu_1,d\nu_2) = \tilde{h}_1(\nu)\ \overline{\tilde{h}_1(\nu_2)}\ \tilde{m}_1(d\nu_1)\ \overline{\tilde{m}_1(d\nu_2)}$$
$$+ \tilde{h}_2^c(\nu_1,\nu_2)\ \tilde{n}(d\nu_1-\nu_2)\ d\nu_2$$

$$+ \dot{h}_1(\nu_1)\ \dot{h}_1(\nu_2)\ \tilde{m}_2^c(d\nu_1, d\nu_2) \qquad (5,9)$$

Remarque (5,1) : Pour manier commodément la distribution $\tilde{n}(d\nu_1 - d\nu_2)\ d\nu_2$, on peut l'interpréter de la façon suivante : dans le plan $O\nu_1\nu_2$, traçons les axes Ox , Oy définis par :

- Ox est la droite $\nu_1 = -\nu_2$, orientée dans le sens des ν_1 croissants ;
- Oy est la droite $\nu_1 = \nu_2$, orientée dans le sens des ν_1 croissants ;

Supposons que la distribution $\tilde{n}(d\nu_1)$ est en fait une mesure, d'ailleurs portée par $O\nu_1$; désignons par ${}_x\tilde{n}(dx)$ sa projection sur Ox (cf. §2) ; alors, la distribution bidimensionnelle sur $O\nu_1\nu_2$ définie par $\tilde{n}(d\nu_1 - \nu_2)\ d\nu_2$, est la même que la distribution bidimensionnelle sur Oxy définie par : $\frac{1}{\sqrt{2}}\ {}_x\tilde{n}(dx)\ dy$ (qui est une mesure).

Spectre : En supposant que $\tilde{m}_1(d\nu)$, $m_2^c(d\nu_1, d\nu_2)$, $\tilde{n}(d\nu)$ sont des mesures, selon (5,9) , et en tenant compte de la Remarque (5,1), on voit que :

$$\begin{aligned} {}_p\tilde{\Gamma}(d\nu) &= |h_1(\nu)|^2 (\tilde{m}_1^d \circledast \overline{\tilde{m}_1^d})\ (d\nu) \\ &+ \sigma_0^2\ \tilde{h}_2^c(\nu,\nu)\ d\nu \\ &+ |h_1(\nu)|^2\ {}_p\tilde{m}_2^c(d\nu) \quad ; \qquad (5,10) \end{aligned}$$

dans (5,10) σ_0^2 a la signification suivante : σ_0^2 désigne la masse en $\nu = 0$, que comporte la distribution $\tilde{n}(d\nu)$.

Dans (5,10) , le premier terme est toujours un spectre discontinu (de raies) ; le deuxième est toujours un spectre continu (à densité spectrale).

<u>Exemple (5,2) où</u> $M(\omega)$ <u>est quasi à éléments orthogonaux</u> : Dans ce cas particulier, conservons les définitions et notations (4,10), (4,11), (4,12) ; partons de (3,10) dont nous conservons les notations ; introduisons la transformée de Fourier $\tilde{\mu}(d\alpha)$ de $\mu(d\tau)$, c'est à dire que symboliquement :

$$\tilde{\mu}(d\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\alpha\tau}\,\mu(d\tau) \quad ; \qquad (5,11)$$

on trouve par les mêmes méthodes que précédemment :

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(d\nu_1,d\nu_2) = {} & \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_1(d\nu_1;\alpha_1)\,\tilde{m}_1(d\alpha_1)\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\tilde{h}_1(d\nu_2;\alpha_2)\,\tilde{m}_1(d\alpha_2)}\right) \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_2^c(d\nu_1,d\nu_2;\alpha_1,\alpha_2)\,\tilde{m}_1(d\alpha_1)\,\overline{\tilde{m}_1(d\alpha_2)} \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_1(d\nu_1;\alpha_1)\,\overline{\tilde{h}_1(d\nu_2;\alpha_2)}\,\tilde{\mu}(d\alpha_1-\alpha_2)\,d\alpha_2 \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}_2^c(d\nu_1,d\nu_2;\alpha_1,\alpha_2)\,\tilde{\mu}(d\alpha_1-\alpha_2)\,d\alpha_2 \quad .\end{aligned}$$

<u>6°) Cas où la mesure</u> $M(\omega)$ <u>admet une densité</u> :

Nous disons que la m.a.r. $M(\omega)$ admet une densité (aléatoire) , si elle est de la forme suivante :

$$M(dt) = Z(t) \,.\, N(dt) \quad , \qquad (6,1)$$

où :

1°) $Z(t)$ est une fonction aléatoire numérique du second ordre de t , dont nous désignerons la covariance par :

$$\rho_2(t_1,t_2) = E\left[Z(t_1)\,\overline{Z(t_2)}\right] \quad ; \qquad (6,2)$$

2°) $N(dt)$ est une m.a.r. ; nous désignerons par

$n_2(dt_1,dt_2)$ la mesure qui lui est associée.

Nous supposerons que la fonction aléatoire $Z(t)$, et la m.a.r. $N(dt)$, sont indépendantes.

Alors on a :

$$m_2(dt_1,dt_2) = \rho_2(t_1,t_2)\, n_2(dt_1,dt_2) \quad . \qquad (6,3)$$

Supposons que :

$$\rho_2(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(\nu_1 t_1-\nu_2 t_2)}\, \tilde{\rho}_2(d\nu_1,d\nu_2) \;, \qquad (6,4)$$

où $\tilde{\rho}_2(d\nu_1,d\nu_2)$ est une distribution, plus précisément une mesure; il vient :

$$\tilde{m}_2(d\nu_1,d\nu_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \tilde{n}_2(d\nu_1+\alpha_1,d\nu_2+\alpha_2)\tilde{\rho}_2(d\alpha_1,d\alpha_2), \qquad (6,5)$$

où $\tilde{n}_2(d\nu_1,d\nu_2)$ est la transformée de Fourier de $n_2(dt_1,dt_2)$

Posons :

$$\rho_1(t) = E\{Z(t)\} \quad , \qquad (6,6)$$

$$\rho_2(t_1,t_2) = \rho_1(t_1)\,\overline{\rho_1(t_2)} + \rho_2^c(t_1,t_2) \quad , \qquad (6,7)$$

$$n_1(dt) = E\{N(dt)\} \quad , \qquad (6,8)$$

$$n_2(dt_1,dt_2) = n_1(dt_1)\overline{n_1(dt_2)}+n_2^c(dt_1,dt_2) \quad . \qquad (6,9)$$

Il vient (avec les notations des §§ précédents) :

$$m_1(dt) = \rho_1(t)\, n_1(dt)$$

$$\begin{aligned} m_2^c(dt_1,dt_2) &= \rho_1(t_1)\overline{\rho_1(t_2)}n_2^c(dt_1,dt_2) \\ &+ \rho_2^c(t_1,t_2)n_1(dt_1)\overline{n_1(dt_2)} \\ &+ \rho_2^c(t_1,t_2)n_2^c(dt_1,dt_2) \quad . \qquad (6,10) \end{aligned}$$

Introduisons les transformées de FOurier :

$$\left.\begin{array}{llll} \tilde{\rho}_1(d\nu) & , \text{ de } & \rho_1(t) & , \\ \tilde{\rho}_2^c(d\nu_1,d\nu_2) & \text{ de } & \rho_2^c(t_1,t_2) & , \\ \tilde{n}_1(d\nu) & , \text{ de } & n_1(dt) & , \\ \tilde{n}_2^c(d\nu_1,d\nu_2) & \text{ de } & n_2^c(dt_1,dt_2) & ; \end{array}\right\} \quad (6,11)$$

on a :

$$\tilde{m}_1(d\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{n}_1(d\nu+\alpha)\, \tilde{\rho}_1(d\alpha) \quad ; \qquad (6,12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{m}_2^c(d\nu_1,d\nu_2) = & \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{n}_2^c(d\nu_1+\alpha_1,d\nu_2+\alpha_2)\tilde{\rho}_1(d\alpha_1)\overline{\tilde{\rho}_1(d\alpha_2)} \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{n}_2^c(d\nu_1+\alpha_1,d\nu_2+\alpha_2)\tilde{\rho}_2^c(d\alpha_1,d\alpha_2) \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{n}_1(d\nu_1+\alpha_1)\overline{\tilde{n}_1(d\nu_2+\alpha_2)}\tilde{\rho}_2^c(d\alpha_1,d\alpha_2) . \end{aligned}$$

(6,13)