



TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

Nice 1^{er} au 5 juin 1971

EFFETS DES DÉCALAGES STOCHASTIQUES SUR LA RÉCEPTION DES
SIGNAUX CONTAMINÉS PAR LE BRUIT.

P. SZULKIN

RESUME

On étudie les effets des décalages stochastiques dus aux différentes sources des retards qui peuvent avoir lieu dans les systèmes de transmission.

On démontre que dans certains cas ces effets peuvent être considérés comme un simple déplacement de la phase, tandis que dans d'autres cas, et en particulier dans les radars ou les sonars, cela conduit à des véritables sources de bruit supplémentaire.

SUMMARY

Examines the effect of stochastic delays, resulting from various sources, which may take place in transmission systems. Points out that in some cases this effect may be considered as a mere phase shift, whereas in other cases - and in particular with regard to radar or sonar - it leads to real sources of a supplementary noise.



SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

Introduction

Les systèmes modernes de télécommunication et de détection font un grand usage de signaux et de filtres caractérisés par des valeurs importantes de la TW (tempo-largeur de bande). En conséquence, il est naturel que l'étude des effets du bruit additif sur le fonctionnement de tels systèmes ait fait l'objet de recherches poussées. Mais il y a lieu d'étudier une autre source possible de perturbations: les retards stochastiques.

Les sources de retards stochastiques sont nombreuses. Limitons-nous à citer les principales:

- 1) Milieu de transmission
- 2) Stockage intermédiaire des données
- 3) Mouvement relatif entre l'émetteur et le récepteur
- 4) Phénomènes aléatoires dans l'équipement

Si le milieu de transmission n'est pas homogène, le signal transmis subit des retards stochastiques. Pour les systèmes à bande étroite (radar), ces retards sont généralement équivalents aux déplacements de la phase. Mais il faut souvent tenir compte des retards aléatoires dans le sens le plus strict. C'est, par exemple, le cas dans certains systèmes sonar.

Le problème du stockage intermédiaire des données est aussi important car on l'utilise avec profit dans plusieurs systèmes modernes. Ainsi, toute nonuniformité d'enregistrement produit des retards aléatoires. Comme, en général, l'enregistrement s'effectue pour des vidéosignaux, la source n'est plus équivalente à un changement de la phase.

Dans certains cas, une partie du système est en mouvement relatif par rapport à une autre partie (navire, avion, missile, satellite, etc...). Pour de tels systèmes, les mouvements aléatoires par rapport à la trajectoire idéale produisent aussi des retards stochastiques.



SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

Enfin, les phénomènes aléatoires dans l'équipement (par ex. instabilité de l'oscillateur local) peuvent aussi être une source de retards stochastiques.

La présence des retards stochastiques peut se manifester de diverses façons, soit en renforçant l'effet de bruit, soit en représentant une limitation propre.

Dans l'étude des effets des retards stochastiques, il faut distinguer deux cas importants:

- 1) le signal traité est un processus aléatoire, ce qui exige que l'on résolve le problème d'optimisation statistique.
- 2) le signal est une fonction déterminée et il faut alors étudier les effets pour la fonction d'ambigüité et le rapport signal-bruit.



SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

Analyse générale

Soient $f(t)$ et $x(t)$ les processus aléatoires qui représentent respectivement le signal et le retard stochastique. Le processus à étudier est alors de la forme:

$$g(t) = f(t + x(t)) \quad (1)$$

On suppose que $f(t)$ est complexe stationnaire (dans le sens large) et que $x(t)$ est stationnaire, réel, indépendant de $f(t)$.

Introduisons la fonction de corrélation de $g(t)$:

$$R_g(\tau) = E(g(t+\tau) \bar{g}(t)) \quad (2)$$

On peut aussi écrire:

$$R_g(\tau) = E_x E_f \{ f(t+\tau+x(t+\tau)) \bar{f}(t+x(t)) \}$$

$$R_g(\tau) = E_x R_f(\tau + x(t+\tau) - x(t))$$

et finalement:

$$R_g(\tau) = \int R_f(\tau + u) p_x(u, \tau) du \quad (3)$$

où p_x est la fonction de densité des probabilités de:

$$\hat{x}(t, \tau) = x(t+\tau) - x(t)$$

p_x ne dépend pas de t car x est stationnaire. Ainsi, $R_g(\tau)$ est liée à la fonction de corrélation de f ainsi qu'à la densité des probabilités de $\hat{x}(\tau)$ où $\hat{x}(\tau) = x(\tau) - x(0)$.

Soit $M_{\hat{x}}(\eta, \tau)$ la fonction caractéristique de $\hat{x}(t)$, c'est-à-dire

$$M_{\hat{x}}(\eta, \tau) = E(e^{i\eta \hat{x}(\tau)})$$

et soit $S_f(\omega)$ le spectre de puissance de f .

On en déduit facilement:

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int S_f(\eta) M_{\hat{x}}(\eta, \tau) e^{i\eta \tau} d\eta \quad (4)$$

Notons que $M_{\hat{x}}$ est liée à la seconde fonction caractéristique de x par:

$$M_{\hat{x}}(\eta, \tau) = E(e^{i\eta x(\tau)} e^{-i\eta x(0)}) = M_{x(\tau), x(0)}(\eta, -\eta) \quad (5)$$

Le spectre de $g(t)$ est $\mathcal{F}(R_g(\tau))$ et on a:

$$S_g(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int S_f(\eta) Q_{\hat{x}}(\eta, \omega - \eta) d\eta \quad (6)$$

où

$$Q_{\hat{x}}(\eta, \omega) = \int M_{\hat{x}}(\eta, \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau$$

On peut démontrer à partir de la définition de $g(t)$ que

$$R_g(0) = R_f(0)$$



SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

d'où il résulte:

$$\int S_g(\omega) d\omega = \int S_f(\omega) d\omega \quad (7)$$

Si W_f est la largeur de bande, on a:

$$W_f^2 = \frac{\int \omega^2 S_f(\omega) d\omega}{\int S_f(\omega) d\omega} \quad (8)$$

Comme d'autre part:

$$W_g^2 = \left[- \frac{R_g''(\tau)}{R_g(\tau)} \right]_{\tau=0}$$

il suffit d'y substituer

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int S_f(\eta) E\{e^{i\eta x(\tau) - x(0) + \tau}\} d\eta \quad (9)$$

et d'effectuer la différentiation sous le signe d'intégration (on suppose que $E(x'') = 0$ ou $\int \eta S_f(\eta) d\eta = 0$, ce qui est toujours le cas si f est réelle).

On obtient:

$$W_g^2 = W_f^2 \{E[(1 + x')^2]\} \quad (10)$$

et si $E(x') = 0$

$$\begin{aligned} W_g^2 &= W_f^2 [1 + E(x'^2)] \\ W_g^2 &= W_f^2 (1 + \sigma_{x'}^2) \end{aligned} \quad (11)$$

Avec de simples restrictions on a $E(x') = \frac{d}{dt} E(x)$; la condition $E(x') = 0$ est donc en général satisfaite pour x stationnaire. Il en résulte que le retard stochastique stationnaire augmente toujours la largeur de la bande du processus aléatoire.

Passons maintenant à l'étude de certains cas particuliers. Le plus souvent, la description statistique complète de $x(t)$ est inconnue; par contre on connaît certaines de ses caractéristiques.

Exemples:

- $x(t)$ peut avoir une grande ou une petite variance (σ_x est grande ou petite par rapport à $\frac{1}{W_f}$)
- la bande de $x(t)$ peut être grande ou petite par rapport à W_f .
- $x(t)$ a la distribution normale (de Gauss).



SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

- $f(t)$ a une bande étroite par rapport à sa fréquence centrale.

- Retards stochastiques à faible variance.

On suppose:

$$\sigma_x^2 \ll \frac{1}{W_f}$$

On peut alors approximer $M_{\hat{x}}$ de la façon suivante:

$$M_{\hat{x}}(\gamma, \tau) = E\{e^{i\gamma[x(\tau) - x(0)]}\} = E\left\{\sum_k \frac{(i\gamma)^k [x(\tau) - x(0)]^k}{k!}\right\}$$

$$M_{\hat{x}}(\gamma, \tau) \approx 1 - \gamma^2 \sigma_x^2 + \gamma^2 R_x(\tau) \quad (12)$$

car $\gamma^2 \sigma_x^2 \ll 1$ par hypothèse.

Donc:

$$R_g(\tau) \approx R_f(\tau) - [\sigma_x^2 - R_x(\tau)] \frac{1}{2\pi} \int \gamma^2 S_f(\gamma) e^{i\gamma\tau} d\gamma$$

et finalement:

$$R_g(\tau) = R_f(\tau) - [\sigma_x^2 - R_x(\tau)] R_{f'}(\tau) \quad (13)$$

Etant donnée la faible variance de $x(t)$, on peut essayer d'utiliser le développement de $g(t)$ en série de Taylor:

$$g(t) = f(t + x(t)) \approx f(t) + f'(t)x(t) + \frac{1}{2}f''(t)x^2(t) + \dots \quad (14)$$

et en déduire la fonction de corrélation $R_g(\tau)$. (On retient les trois premiers termes de la série).

En se rappelant que:

$$S_{f'}(\omega) = \omega^2 S_f(\omega)$$

le spectre de $g(t)$ devient:

$$S_g(\omega) = S_f(\omega) - \sigma_x^2 S_{f'}(\omega) + \frac{1}{2\pi} [S_x(\omega) \approx S_{f'}(\omega)] \quad (15)$$

- Retards stochastiques à grande variance.

On suppose maintenant que $\sigma_x^2 \gg \frac{1}{W_f}$. La variance de \hat{x} est:

$$\sigma_{\hat{x}}^2 = 2[\sigma_x^2 - R_x(\tau)]$$

fonction à croissance monotone de σ_x^2 , pour toute valeur de τ sauf $\tau = 0$. D'après l'équation (3), on a:

$$R_g(\tau) = \int R_f(\tau + u) p_{\hat{x}}(u, \tau) du = \int \sigma_x R_f(\tau + \sigma_x v) p_{\hat{x}}(\sigma_x v, \tau) dv \quad (16)$$

La croissance de σ_x^2 entraîne celle de $\sigma_{\hat{x}}^2$ sauf pour $\tau = 0$.

SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

La fonction $\delta_x R_f(\tau + \delta_x v)$ se comporte comme une fonction de Dirac lorsque δ_x est grande mais la fonction p_x ne devient pas étroite; la largeur pour p_x est en effet toujours égale à 1. Les conditions qui doivent être satisfaites pour pouvoir traiter R_f comme une fonction de Dirac dans le cas limite sont en général vérifiées par les fonctions de corrélation courantes.

Dans ces conditions, on obtient:

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= S_f(0) p_x(\tau, \tau) & \tau \neq 0 \\ R_g(\tau) &= R_f(0) & \tau = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Cette expression de $R_g(\tau)$ est la forme limite pour $\delta_x^2 \rightarrow \infty$. Pour de petites valeurs de τ , δ_x peut être faible même si δ_x est grande, de sorte que l'expression (17) est en général une bonne approximation pour des grandes valeurs de τ . Au voisinage de $\tau = 0$, on a approximativement:

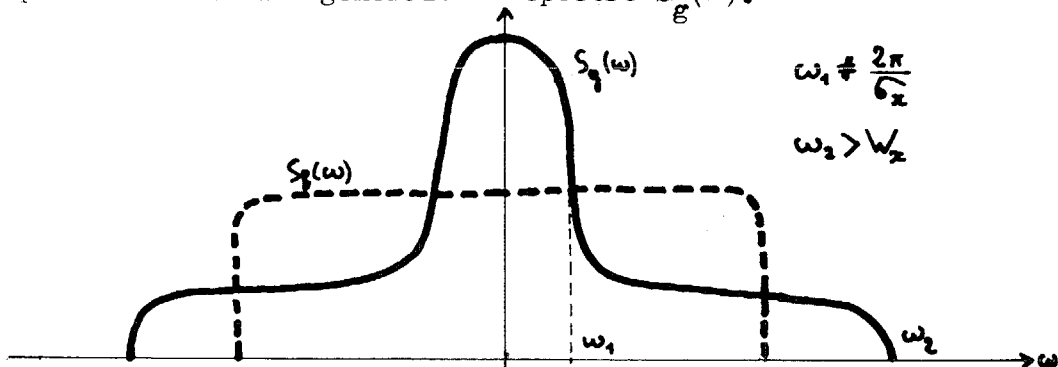
$$R_g(\tau) \approx S_g(0) p_x(\tau, \tau)$$

Le spectre de $g(t)$ est composé de deux parties. Le comportement de $R_g(\tau)$ au voisinage de $\tau = 0$ conduit au spectre à bande large et à niveau faible. La largeur de bande de cette partie de spectre est déterminée par la bande de $x(t)$ et sa variance. Elle est, en effet, déterminée par la valeur de τ qui correspond à

$$\delta_x^2 = 2\delta_x^2 [1 - R(\tau)] > \frac{1}{W_f}$$

et elle est au moins aussi grande que la largeur de bande de $x(t)$.

Les valeurs plus grandes de τ conduisent à un spectre à bande étroite dont la largeur est de l'ordre de $\frac{1}{\delta_x}$. La figure 1 représente l'allure générale du spectre $S_g(\omega)$.





SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

- Retards stochastiques de basse fréquence.

Dans ce cas, on suppose que l'on peut approximer

$$\hat{x}(\tau) = x(\tau) - x(0)$$

par $x'(0)$ pour n'importe quelle valeur de τ . La fonction de corrélation devient alors:

$$R_g(\tau) = E\{R_f[\tau(1+x')]\} = \int R_f[\tau(1+x')] p(x') dx' \quad (18)$$

On développe R_f en série de Taylor en ne retenant que le premier terme non nul:

$$R_g(\tau) \approx R_f(\tau) + E(x'^2) \frac{\tau^2}{2} R_f''(\tau) \quad (19)$$

- Retards stochastiques à bande large.

On suppose que le spectre de $x(t)$ est beaucoup plus large que celui de $f(t)$.

Si en particulier $R_x(\tau) = 0$ pour $\tau > \tau_0$ où $\tau_0 \ll$ "largeur" de $R_f(\tau)$, alors, pour $\tau > \tau_0$:

$$M_{\hat{x}}(\eta, \tau) = E\left\{e^{i\eta[x(\tau) - x(0)]}\right\} = |M_x(\eta)|^2 \quad (20)$$

$R_g(\tau)$ devient:

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{\tau} S_f(\eta) M_{\hat{x}}(\eta, \tau) e^{i\eta\tau} d\eta + \int_{|\eta| > \tau} S_f(\eta) |M_x(\eta)|^2 e^{i\eta\tau} d\eta \quad (21)$$

qui peut aussi s'écrire:

$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_f(\eta) |M_x(\eta)|^2 e^{i\eta\tau} d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau}^{+\tau} S_f(\eta) [M_{\hat{x}}(\eta, \tau) - |M_x(\eta)|^2] e^{i\eta\tau} d\eta \quad (22)$$

$$R_g(\tau) = R_{g1} + R_{g2}$$

à quoi on fait correspondre le spectre:

$$S_g(\omega) = S_f(\omega) |M_x(\omega)|^2 + S_{g2}(\omega) \quad (23)$$

Si τ_0 est très petit, on est tenté d'approximer $S_g(\omega)$ par $S_f(\omega) |M_x(\omega)|^2$; mais ceci est en contradiction avec le fait que

$$E\{|g|^2\} = E\{|f|^2\} \quad (24)$$

C'est également contraire à l'hypothèse suivant laquelle le spectre de g est plus large que celui de f .

Nous allons montrer que le spectre S_{g2} a une faible valeur quel que soit ω (sans que $\int S_{g2}$ soit nécessairement petit).



R_{g^2} a donc un spectre à large bande et à niveau faible. Posons:

$$R_{g^2}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int S_f(\eta) \left[M_x(\eta, \tau) - |M_x(\eta)|^2 e^{i\eta\tau} \right] d\eta \quad (25)$$

(ce qui fait disparaître l'hypothèse $R_x(\tau) = 0$ pour $|\tau| > \tau_0$)

On peut alors définir la bande W_2 de S_{g^2} par:

$$W_2 = \left[-\frac{R_{g^2}''(\tau)}{R_{g^2}(\tau)} \right]_{(\tau=0)}$$

d'où:

$$W_2 = \frac{\sigma_x^2 \int \eta^2 S_f(\eta) d\eta + \int \eta^2 S_f(\eta) [1 - |M_x(\eta)|^2] d\eta}{\int S_f(\eta) [1 - |M_x(\eta)|^2] d\eta} \quad (27)$$

Lorsque la largeur de la bande de $x(t)$ augmente, toutes les quantités de (27) restent inchangées sauf σ_x^2 .

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int S_x(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi} \int \eta^2 S_x(\eta) d\eta = \frac{R_x(0)}{2\pi} W_x^2 \quad (28)$$

où W_x est la bande de $x(t)$.

Ainsi $W_x \rightarrow \infty \Rightarrow W_2 \rightarrow \infty$ mais $\int S_2(\eta) d\eta$ reste constante.

Lorsque W_x croît, l'aire fixe de $S_2(\omega)$ est donc répartie sur un plus grand intervalle de fréquences. Ce résultat n'implique pas que $S_2(\omega) \rightarrow 0$ quel que soit ω mais il contribue à éclaircir le problème. Si on réintroduit l'hypothèse $R_x(\tau) = 0$ pour $|\tau| > \tau_0$ et si on fait tendre W_x vers $+\infty$, alors $\tau_0 \rightarrow 0$ (on suppose que le spectre de $x(t)$ est de la forme $\alpha S_x(\alpha\omega)$ et on fait tendre α vers 0, ce qui laisse la fonction caractéristique $M_x(\eta)$ fixe quand $\alpha \rightarrow 0$).

$$\begin{aligned} \Rightarrow M_x(\eta, \tau) &\rightarrow |M_x(\eta)|^2 & \forall \tau \neq 0 \\ \Rightarrow R_2(\tau) &\rightarrow 0 & \forall \tau \neq 0 \\ \Rightarrow S_2(\omega) &\rightarrow 0 & \forall \omega \end{aligned}$$

$\int S_2(\omega) d\omega$ reste constant car:

$$\frac{1}{2\pi} \int S_2(\omega) d\omega = R_f(0) - \frac{1}{2\pi} \int S_f(\eta) |M_x(\eta)|^2 d\eta$$

Si le processus $g(t)$ est transmis par un filtre dont la bande est celle de $f(t)$, on peut généralement approximer le



SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

spectre de $g(t)$ par $S_f(\omega) |M_x(\omega)|^2$. Par contre, si $g(t)$ est échantillonné et transmis par un filtre passe-bas, cette approximation n'est plus justifiée.

- Retards à distribution normale.

On suppose que $x(t)$ est à distribution normale :

$$M_{\hat{x}}(\eta, \tau) = \exp \left[-\eta^2 \hat{\sigma}_x^2 + \eta^2 R_x(\tau) \right] \quad (29)$$

Commençons par l'étude des petites variances. Comme la bande de f limite les valeurs importantes de η dans le calcul de R_g , supposons que $\hat{\sigma}_x$ est petite par rapport à $\frac{1}{W_f}$. On obtient alors :

$$\exp(\eta^2 R_x) \approx 1 + \eta^2 R_x(\tau) \quad (30)$$

d'où :

$$M_{\hat{x}}(\eta, \tau) \approx |M_x(\eta)|^2 [1 + \eta^2 R_x(\tau)] \quad (31)$$

et :

$$R_g(\tau) \approx \frac{1}{2\pi} \int e^{i\eta\tau} |M_x(\eta)|^2 S_f(\eta) d\eta + R_x(\tau) \frac{1}{2\pi} \int e^{i\eta\tau} |M_x(\eta)|^2 S_f(\eta) \eta^2 d\eta \quad (32)$$

auquel correspondra le spectre :

$$S_g(\omega) = S_f(\omega) |M(\omega)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int S_x(\omega-\lambda) S_f(\lambda) \lambda^2 |M(\lambda)|^2 d\lambda \quad (33)$$

En revenant au cas des retards à bande large, on a, sous l'hypothèse de distribution normale :

$$S_2(\omega) \leq (\text{Max } S_x) \frac{1}{2\pi} \int S_f(\lambda) \lambda^2 |M(\lambda)|^2 d\lambda \quad (34)$$

qui tend vers 0 quand la valeur maximale du spectre $S_x \rightarrow 0$.

Si la variance de x n'est pas nécessairement petite, on a :

$$M_{\hat{x}} = |M_x|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{2k} R_x^k(\tau)}{k!} \quad (35)$$

et

$$S_g = |M|^2 S_f + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k+1} [\omega^{2k} |M_x|^2 S_f^k]}{k!} = [S_x \dots S_x]_{k \text{ fois}} \quad (36)$$

- Retard des fonctions à bande étroite.

Les signaux à bande étroite centrée autour d'une HF porteuse subissent en général des retards que l'on peut considérer comme de simples écarts de phase.



SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

Soit $f(t)$ une fonction à bande étroite de fréquence centrale ω_0 . Sans nuire à la généralité du raisonnement, on suppose que f occupe seulement une bande de fréquences positives (c'est-à-dire que f est complexe).

Si $f_v(t)$ désigne le signal de modulation, on peut écrire:

$$f(t) = f_v(t) e^{i\omega_0 t} \quad (37)$$

Avec le retard $x(t)$:

$$g(t) = f[t + x(t)] = f_v[t + x(t)] e^{i\omega_0 t} e^{i\omega_0 x(t)} \quad (38)$$

On pose: $\omega_0 x(t) = \alpha(t)$. D'où:

$$g(t) = f_v\left[t + \frac{\alpha(t)}{\omega_0}\right] e^{i\omega_0 t} e^{i\alpha(t)} \quad (39)$$

Par exemple, supposons que x correspond aux variations de la "distance électrique" entre l'émetteur et un récepteur cohérent. Si α prend des valeurs de l'ordre de π , la performance du système peut être gravement dégradée à cause du facteur $e^{i\alpha}$, tandis qu'en même temps $\omega_0 \gg \omega_v$ (largeur de bande de la modulation f_v). La présence de $\alpha(t)/\omega_0$ dans f_v est alors négligeable. Par contre, la présence du facteur $e^{i\alpha(t)}$ peut influencer profondément la performance du système. On peut écrire:

$$g(t) = f_v(t) e^{i\omega_0 t} e^{i\alpha(t)} \quad (40)$$

qui change plusieurs aspects de l'analyse car on arrive, en général, à des résultats plus simples que ceux obtenus pour les retards stochastiques. Ainsi par exemple au lieu de:

$$R_g(\tau) = \int S_f(\eta) M_x(\eta, \tau) e^{i\eta\tau} d\eta \quad (41)$$

on a:

$$R_g(\tau) = R_f(\tau) M_x(\omega_0, \tau) \quad (42)$$

En ce qui concerne la précision de l'approximation, il est facile de voir que:

$$E \left\{ \left| f_v\left[t + \frac{\alpha(t)}{\omega_0}\right] e^{i\omega_0 t} e^{i\alpha(t)} - f_v(t) e^{i\omega_0 t} e^{i\alpha(t)} \right|^2 \right\} = R_{f_v}(0) - \int_{-\frac{1}{\omega_0}}^{\frac{1}{\omega_0}} p(u) du$$

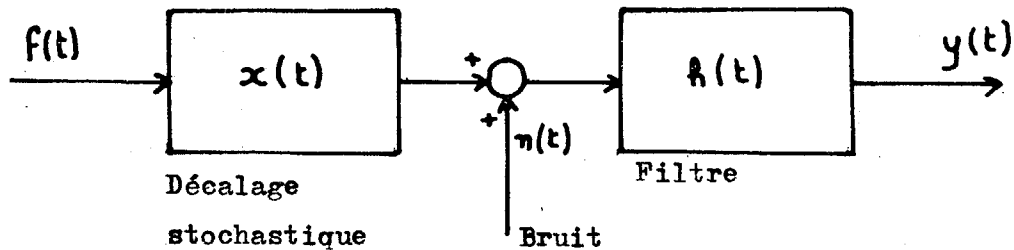
tend vers 0 quand $\omega_0 \rightarrow \infty$. (43)



SZULKIN — DECALAGES STOCHASTIQUES

Optimisation du filtrage en présence
de retards stochastiques

Nous allons étudier le problème de l'optimisation du filtrage d'un signal soumis à un décalage stochastique en présence de bruit. On suppose qu'il s'agit d'un filtre linéaire fixe et on choisit comme critère d'optimisation l'erreur quadratique moyenne.



Pour simplifier l'analyse, on n'impose aucune contrainte de réalisation physique.

A la réception, l'erreur est :

$$e(t) = y(t) - f(t) \quad (44)$$

Le problème consiste à déterminer $h(t)$ de sorte que $E\{|e|^2\}$ soit minimal. Par hypothèse, $f(t)$ est un processus aléatoire stationnaire.

Comme :

$$E\{|e|^2\} = R_e(0) = \int \frac{1}{2\pi} S_e(\omega) d\omega \quad (45)$$

il faudra déterminer $H(\omega)$ pour que (45) soit minimale.

$$R_e(\tau) = R_y(\tau) + R_f(\tau) - R_{yf}(\tau) - R_{fy}(\tau) \quad (46)$$

où

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int |H(\omega)|^2 [S_n(\omega) + S_g(\omega)] e^{i\omega\tau} d\omega \quad (47)$$

L'expression de $S_g(\omega)$ a déjà été déterminée.

On a également :

$$\begin{aligned} R_{yf} &= E\{y(t+\tau)\bar{f}(t)\} = E\{f[t+\tau+x(t+\tau)-\beta] h(\beta) \bar{f}(t) d\beta\} \\ &= \int E_x[R_f(\tau+x-\beta)] h(\beta) d\beta = R_f(\tau) \otimes p_x(-\tau) \otimes h(\tau) \end{aligned} \quad (48)$$



SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

D'où:

$$S_{yf} = \mathcal{F}[R_{yf}(\tau)] = S_f(\omega) \overline{M_x}(\omega) H(\omega) \quad (49)$$

et finalement:

$$\begin{aligned} R_e(0) &= \frac{1}{2\pi} \int \left[|H|^2 (S_g + S_n) + S_f - S_f \overline{M_x} H - S_f M_x \overline{H} \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int \left[(S_g + S_n) \left| H - \frac{S_f M_x}{S_g + S_n} \right|^2 + S_f - \frac{|S_f M_x|^2}{S_g + S_n} \right] d\omega \end{aligned} \quad (50)$$

On en déduit la fonction de transfert du filtre optimum:

$$H(\omega) = \frac{S_f M_x}{S_g + S_n} \quad (51)$$

à laquelle correspond l'erreur quadratique moyenne:

$$R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int \left[S_f(\omega) - \frac{|\overline{M_x}(\omega) S_f(\omega)|^2}{S_g(\omega) + S_n(\omega)} \right] d\omega \quad (52)$$

avec:
$$R_g(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int S_f(\omega) M_x(\omega, \tau) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (53)$$

et:
$$S_g(\omega) = \mathcal{F}[R_g(\tau)]$$

-Décalages stochastiques à variance faible.

Dans le cas où $\sigma_x \ll \frac{1}{\omega_f}$, l'erreur quadratique moyenne devient

$$R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int S_f(\omega) \left[1 - \frac{S_f(1 - \omega^2 \sigma_x^2)^2}{S_f(1 - \omega^2 \sigma_x^2) + \frac{1}{2\pi} (S_x \omega^2 S_f) + S_n} \right] d\omega \quad (54)$$

Mais $\omega^2 \sigma_x^2 \ll 1$ et:

$$R_e(0) \approx \frac{1}{2\pi} \int S_f \left[\frac{\omega^2 \sigma_x^2 S_f + \frac{1}{2\pi} (S_x \omega^2 S_f) + S_n}{S_f + S_n} \right] d\omega \quad (55)$$

On peut souvent négliger le terme $\frac{1}{2} (S_x \omega^2 S_f)$. Même si ce n'est pas le cas, on peut écrire:

$$R_e(0) \geq \frac{1}{2\pi} \int S_f \left[\frac{\omega^2 \sigma_x^2 S_f + S_n}{S_f + S_n} \right] d\omega \quad (56)$$



SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

On peut aussi envisager le cas limite où $\frac{S_f}{S_n} \rightarrow \infty$ ($\forall \omega$), alors:

$$R_e(0) \geq \frac{1}{2\pi} \int \sigma_x^2 \omega^2 S_f(\omega) d\omega \quad (57)$$

Il en résulte que, même si le bruit est négligeable, il subsiste une erreur quadratique moyenne résiduelle. En introduisant la largeur de bande W_f , on déduit de (57) la relation suivante:

$$\frac{R_e(0)}{R_f(0)} \geq \sigma_x^2 W_f^2 \quad (58)$$

- Décalages stochastiques à grande variance.

Ils conduisent à des erreurs quadratiques moyennes considérables. La fonction caractéristique $M_x(\omega)$ est étroite. Pour les fréquences supérieures à $\frac{1}{\sigma_x}$, on obtient de très grandes erreurs dues au terme $|M_x|^2$ dans σ_x (52)

- Décalages stochastiques à basse fréquence.

Dans ce cas:

$$R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int S_f(\omega) \left[1 - \frac{S_f(\omega) |M_x(\omega)|^2}{S_f(\omega) + S_o(\omega) + S_n(\omega)} \right] d\omega \quad (59)$$

où:

$$S_o(\omega) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2} E(x'^2) \tau^2 R_f''(\tau) \right]$$

Le terme $S_o(\omega) \neq E(x'^2)$ joue un rôle important dans l'estimation de la distance et de l'effet Doppler.

- Décalages stochastiques à bande large.

Pour les décalages HF, on peut écrire l'erreur quadratique moyenne sous la forme:

$$R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int S_f \left[1 - \frac{S_f |M_x|^2}{S_f |M_x|^2 + S_2 + S_n} \right] d\omega \quad (60)$$

On a vu auparavant que $S_2(\omega)$ est en général négligeable:

$$R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int S_f \left[1 - \frac{S_f}{S_f + \frac{S_n}{|M_x|^2}} \right] d\omega \quad (61)$$



SZULKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

Comme $|M_x| \ll 1$, l'effet d'un décalage stochastique HF est équivalent à l'accroissement de bruit (de S_n à $S_n/|M_x|^2$). Si $S_2(\omega)$ n'est pas négligeable, l'effet de bruit croît de S_n à $(S_n + S_2)/|M_x|^2$.

- Décalages à distribution normale.

On va supposer que $x(t)$ a une distribution normale et qu'il est à variation lente (à bande étroite). $S_g(\omega)$ est alors approximativement égal à $S_f(\omega)$.

On suppose ici que:

$$S_o(\omega) = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2} E(x'^2) \tau^2 R_f''(\tau) \right] \ll S_n(\omega).$$

Dans la cas contraire, il faudrait considérer $S_n + S_o = S_{ne}$ (spectre de bruit équivalent).

L'erreur quadratique moyenne devient:

$$R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int S_f(\omega) \left[1 - \frac{S_f(\omega) |M_x(\omega)|^2}{S_f(\omega) + S_n(\omega)} \right] d\omega \quad (62)$$

où $|M_x(\omega)|^2 = e^{-\sigma_x^2 \omega^2}$

Pour mieux comprendre l'effet du décalage stochastique, supposons que:

$$\begin{aligned} S_f(\omega) &= S_f(0) && \text{pour } |\omega| < W_f \\ S_f(\omega) &= 0 && \text{pour } |\omega| > W_f \end{aligned} \quad (63)$$

et que $S_n(\omega)$ est constant. Alors:

$$\begin{aligned} R_e(0) &= \frac{W_f S_f(0)}{\pi} - \frac{S_f^2(0)}{S_f(0) + S_n(0)} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-W_f}^{W_f} e^{-\sigma_x^2 \omega^2} d\omega \right] \\ &= S_f(0) \left\{ \frac{W_f}{\pi} - \frac{S_f(0)}{S_f(0) + S_n(0)} \left[\frac{\alpha(\sqrt{2} \sigma_x W_f)}{2 \sigma_x \sqrt{\pi}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (64)$$

où $\alpha(x) = \text{erf}(x) - \text{erf}(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^{+x} e^{-u^2/2} du$ (65)

Posons $q = \sqrt{2} \sigma_x W_f$ (66)

ce qui permet d'écrire (64) sous la forme:



SZUEKIN - DECALAGES STOCHASTIQUES

$$R_e(0) = R_f(0) \left\{ 1 - \frac{R_f(0)}{R_f(0) + R_n(0)} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{q(q)}{q} \right] \right\} \quad (67)$$

En l'absence de décalage stochastique, le rapport $\frac{R_f}{R_n}$ est la mesure du rapport signal-bruit, et (67) mesure la détérioration de ce rapport due au décalage.

Par exemple:

$\frac{R_f}{R_n} = 1000 \quad q = 0,2$ donnent la même erreur quadratique moyenne que

$$\frac{R_f}{R_n} = 100 \quad q = 0 \quad \text{sans décalage.}$$

On voit que pour un rapport (R_f/R_n) grand, même les faibles décalages stochastiques ont un effet considérable.

- Décalage des fonctions à bande étroite.

Dans ce cas:

$$R_g(\tau) = R_f(\tau) M_x(\omega_0, \tau) \quad (68)$$

où ω_0 est la fréquence centrale. Dans les mêmes conditions d'approximation, on a:

$$M_x(\omega) \neq E \left[e^{i\omega_0 x(\tau)} \right] = M_x(\omega_0) \quad (69)$$

de sorte que le filtre optimum est:

$$H(\omega) = \frac{S_f(\omega) M_x(\omega_0)}{(1/2\pi) S_f * S_\psi + S_n} \quad (70)$$

où $\psi = e^{i\omega_0 x(t)}$

L'erreur quadratique moyenne devient:

$$R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int S_f \left[1 - \frac{S_f(\omega) |M_x(\omega_0)|^2}{\frac{1}{2\pi} S_f * S_\psi + S_n} \right] d\omega \quad (71)$$

Si le décalage stochastique est à basse fréquence ou à large bande, on peut simplifier ces expressions. Cette distinction correspond à la comparaison de la bande de $x(t)$ avec la bande W_f de $f(t)$, (et pas avec la fréquence la plus élevée de

$f(t)$). On exige, en effet, que $\varphi(t)$ soit un processus à bande étroite car $x(t)$ peut être étroite sans que $\exp(i\omega_0 x(t))$ le soit. Ceci est valable si par exemple, σ_x^2 est très grande.

Si $x(t)$ est BF, alors $S_\varphi(\omega)$ est en général beaucoup plus étroite que $S_f(\omega)$ et :

$$\frac{1}{2\pi} S_f(\omega) \neq S_\varphi(\omega) \neq R_\varphi(0) S_f(\omega) = S_f(\omega)$$

car $R_\varphi(0) = 1$.

Dans ce cas :

$$R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int S_f(\omega) \left[1 - \frac{S_f(\omega) |M_x(\omega_0)|^2}{S_f(\omega) + S_n(\omega)} \right] d\omega \quad (72)$$

Si $x(t)$ est à bande large.

$$\frac{1}{2\pi} S_f(\omega) \neq S_\varphi(\omega) \neq |M_x(\omega_0)|^2 S_f(\omega) + R_f(0) S_\varphi(\omega) \quad (73)$$

où

$$\varphi(\omega) = e^{i\omega x(t)} - M_x(\omega_0) \quad (74)$$

L'erreur quadratique moyenne devient :

$$R_e(0) = \frac{1}{2\pi} \int S_f(\omega) \left[1 - \frac{S_f(\omega) |M_x(\omega_0)|^2}{S_f(\omega) |M_x(\omega_0)|^2 + R_f(0) S_\varphi(\omega) + S_n(\omega)} \right] d\omega \quad (75)$$