



ANALYSE SEQUENTIELLE

P. BOIS

(Institut Français du Pétrole)

RESUME

L'algorithme de Cooley-Tukey a réduit sensiblement le temps de calcul de la transformée de Fourier. Il reste néanmoins à effectuer un grand nombre de multiplications de nombres complexes. Un processus de calcul a été mis au point récemment pour remplacer ces multiplications par des additions et des soustractions de nombres réels. Les systèmes orthogonaux constitués par les fonctions de Walsh pour la transformée à une dimension et par les matrices symétriques d'Hadamard pour les transformées à deux dimensions se substituent au système formé par les fonctions trigonométriques. Dans ce nouveau mode d'analyse, la notion de fréquence est remplacée par celle de séquence. Une théorie analogue à celle élaborée pour la transformée de Fourier peut être développée pour ces transformées. Elle a déjà de nombreuses applications et on en donnera une qui intéresse en particulier le codage des images sonar.

SUMMARY

The Cooley-Tukey algorithm has considerably reduced the time required for calculating the Fourier transform. However, a great many complex number multiplications still have to be done. A calculating process was recently developed for replacing these multiplications by additions and subtractions of real numbers. The orthogonal systems made up by Walsh functions for one-dimensional transforms and by Hadamard symmetrical matrices for two-dimensional transforms can be substituted for the system composed of trigonometric functions. In this new analysis process, the concept of frequency is replaced by that of sequence. A theory similar to the one worked out for the Fourier transform can be compiled for these transforms. It already has numerous applications, and one is described here which in particular has to do with the coding of sonar images.



ANALYSE SEQUENTIELLE

par P. BOIS

Récemment de nombreux auteurs (1)-(3) ont étudié la transformée de Walsh des fonctions réelles à une variable. D'autres (4)-(5) l'ont étendue à deux dimensions en utilisant les matrices d'Hadamard. Nous donnons ici une théorie générale de ces transformées dans le domaine discret. Nous présenterons des exemples tirés d'une image sonar montrant les transformées de Fourier et de Walsh dans le domaine discret à deux dimensions.

1 - DEFINITION ET GENERATIONS DES FONCTIONS DE WALSH

Les fonctions de Walsh $Wal_{(m, n)}$ sont des fonctions périodiques de période $M = 2^\gamma$, γ est la base de la fonction.

Ces fonctions peuvent être générées par récurrence de différentes façons :

a) Fonctions de Rademacher et de Walsh

Nous définissons les fonctions de Rademacher R_j par une suite R_{ji} avec $i = 0, 1, \dots, 2^{\gamma} - 1$, où :

$$R_{0i} = 1$$

$$\text{et } R_{ji} = 1 - 2 b_{ij} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, 2^{\gamma} - 1) \quad (1 - 1)$$

b_{ij} étant le $j^{\text{ième}}$ élément de la $i^{\text{ième}}$ ligne du code naturel binaire.

Nous remarquons que R_j a $2^j - 1$ changements de signe. A partir des fonctions de Rademacher, Walsh (7) a donné une relation de récurrence pour générer les fonctions de Walsh :

$$R_j = W_{2^j - 1} \quad (j = 0, 1, 2, \dots, \gamma)$$

$$\text{et } W_k = W_{2^h - 1} W_{2^h - 1 - k},$$

$$\left(\begin{array}{l} k = 2^h - 1, 2^h - 1 + 1, \dots, 2^h - 1 \\ h = 1, 2, \dots, \gamma \end{array} \right), \quad (1 - 2)$$

$$\text{ou } W_k = R_h W_{2^h - 1 - k}.$$



La notation W_k correspond à l'ensemble des valeurs de $Wal_\gamma(k, n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots, 2^\gamma - 1$).

Pour $\gamma = 3$, les fonctions de Walsh se mettent sous la forme d'un produit de fonctions de Rademacher.

1 1 1 1 1 1 1 1	$W_0 = R_0$	0	changement de signe
1 1 1 1 -1 -1 -1 -1	$W_1 = R_1$	1	
1 1 -1 -1 -1 -1 1 1	$W_2 = R_2$	2	
1 1 -1 -1 1 1 -1 -1	$W_3 = R_2$	3	
1 -1 -1 1 1 -1 -1 1	$W_4 = R_2 R_3$	4	(1 - 3)
1 -1 -1 1 -1 1 1 -1	$W_5 = R_1 R_2 R_3$	5	
1 -1 1 -1 -1 1 -1 1	$W_6 = R_1 R_3$	6	
1 -1 1 -1 1 -1 1 -1	$W_7 = R_3$	7	

Les fonctions de Walsh sont réparties en fonction de leur nombre de zéros. On définit une notion plus générale que celle de la fréquence qui est propre aux fonctions trigonométriques. Cette notion s'appelle la séquence (1) qui est la moitié du nombre moyen de zéros par unité de temps et qui s'exprime en zps ou z/s .

Leur ensemble forme une matrice, $[W]$ qui est telle que

$$[W] \cdot [W]' = 2^\gamma [I], \quad (1 - 4)$$

est le symbole de la transposition des matrices et $[I]$ la matrice unité.

On a immédiatement :

$$[W]^{-1} = 2^{-\gamma} [W]', \quad (1 - 5)$$

qui est une condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité pour la matrice $[W]$. Cette matrice $[W]$ qui est symétrique, est appelée matrice de Walsh.

b) Matrices d'Hadamard

En changeant l'ordre des lignes de la matrice de Walsh, on obtient les matrices d'Hadamard H qui perdent leur propriété de symétrie mais qui ont l'avantage d'être générées par une relation de récurrence simple :

$$[H_{2^k+1}] = \begin{bmatrix} [H_{2^k}] & [H_{2^k}] \\ [H_{2^k}] & -[H_{2^k}] \end{bmatrix}, \quad (1 - 6)$$



$$\text{avec } [H_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} .$$

Ces matrices sont orthogonales et on a :

$$[H] \cdot [H]' = 2^V [I] \quad (1 - 7)$$

Ces matrices d'Hadamard peuvent être obtenues d'une façon plus générale à partir de deux matrices d'Hadamard $[A_M]$ et $[B_N]$, d'ordres M et N respectifs :

$$\text{où } [A] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1M} \\ a_{M1} & & a_{MM} \end{bmatrix} ,$$

$$\text{on définit : } [H_{MN}] = \begin{bmatrix} a_{11} [B] & a_{1M} [B] \\ a_{M1} [B] & a_{MM} [B] \end{bmatrix} . \quad (1 - 8)$$

c) Correspondance entre les matrices de Walsh et d'Hadamard

Pour passer des matrices d'Hadamard aux matrices de Walsh, on écrit :

$$[H] = [\mathcal{Z}] \cdot [W] , \quad (1 - 9)$$

où $[\mathcal{Z}]$ est la matrice permutation qui peut être obtenue à partir de la relation suivante :

$$[b_j] = [\mathcal{Z}] \cdot [a_{n-j}] , \quad (1 - 10)$$

où $[a_j]$ est le code binaire réfléchi, $[b_j]$ le code binaire naturel sous forme matriciel. $[a_{n-j}]$ et $[b_{n-j}]$ sont les matrices correspondantes aux précédentes en ayant pris soin de renverser l'ordre des colonnes.

Pour les codes à 3 moments ($\gamma = 3$), on a :

$$[b_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} , \quad [a_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } [a_{n-j}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1 - 11)$$

L'élément t_{ij} de la matrice $[\mathcal{Z}]$ d'ordre 2^V est égal à 1 si la i ème ligne de $[b_j]$ est égale à la j ème ligne de $[a_{n-j}]$, si non $[t_{ij}] = 0$. Ainsi, chaque ligne et chaque colonne de cette



matrice $[Z]$ possèdent une seule valeur non nulle égale à l'unité.

Pour passer des matrices de Walsh aux matrices d'Hadamard, on utilise la relation :

$$[W] = [Z^*] \cdot [H], \quad (1 - 12)$$

$$= [Z]^{-1} \cdot [H], \quad (1 - 13)$$

du fait de (1 - 9).

Ces matrices $[Z]$ et $[Z^*]$ sont orthogonales.

d) Matrices de Walsh-Fourier

Les fonctions de Walsh $Wal(m, n)$ peuvent être générées de la façon suivante :

$$Y = 0$$

1

$$Y = 1$$

	n	
m	0	1
0	1	1
1	1	-1

$$V = 2$$

	n			
m	0	1	2	3
0	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1
2	1	-1	1	-1
3	1	-1	-1	1

$$V = 3$$

	n							
m	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
2	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
3	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
4	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
5	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
6	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
7	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1

La $(2i)$ ème ligne de la matrice d'ordre 2^{V+1} est obtenue en prenant la i ème de la matrice précédente d'ordre 2^V et en la reproduisant sans changer de signes.

La $(2i + 1)$ ème ligne de la matrice d'ordre 2^{V+1} est obtenue en prenant la i ème ligne de la matrice précédente d'ordre 2^V et en la reproduisant avec changement de signe.



Cette génération nous permet de donner une relation de récurrence :

$$\text{Wal}_0(0, 0) = 1 ,$$

$$\text{Wal}_V(m, n) = (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{2^{V-1}} \right\rfloor} \cdot m \pmod{2} \text{Wal}_{V-1}\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, n \pmod{2^{V-1}}\right) . \quad (1-14)$$

Les matrices ainsi obtenues sont importantes car elles s'obtiennent de la même façon que celles qui servent à la transformée de Fourier, c'est pourquoi nous les avons appelées les matrices de Walsh-Fourier que l'on symbolise par $[\hat{W}]$. On passe des matrices $[\hat{W}]$ de Walsh-Fourier aux matrices d'Hadamard par la relation suivante :

$$[\hat{W}] = [H] \cdot [\mathcal{C}^*] . \quad (1 - 15)$$

Ces matrices $[\hat{W}]$ sont orthogonales et symétriques.

Les relations (1 - 13) et (1 - 15) donnent :

$$[\hat{W}] = [\mathcal{C}] \cdot [W] \cdot [\mathcal{C}^*] . \quad (1 - 16)$$

e) Décomposition de toute fonction de Walsh en un produit de fonctions de Walsh

Toute fonction de Walsh $\text{Wal}_V(m, n)$ définie sur $M = 2^V$ peut être obtenue à partir de la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \text{Wal}_V(0, n) &= 1 , \quad \forall n, V, \\ \text{Wal}_V(1, n) &= (-1)^{\left\lfloor \frac{2n}{M} \right\rfloor} \end{aligned} \quad (1 - 17)$$

$$\text{Wal}_V(m, n) = \text{Wal}_V\left(\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, 2n^{**}\right) \cdot \text{Wal}_V\left(m - 2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, n\right) ,$$

qui permet de mettre toute fonction de Walsh sous forme d'un produit de fonctions de Walsh dont l'un des arguments est zéro ou l'unité.

En effet, si on exprime m et n dans le système binaire, on a dans le cas $V = 3$, par exemple :

* $\left\lfloor \cdot \right\rfloor$ signifie valeur entière.
mod. n signifie modulo n

** si $2n > M$, on prend $2n \pmod{M}$.



$$m = 4j_2 + 2j_1 + j_0 \text{ et } n = 4k_2 + 2k_1 + k_0 .$$

avec $\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix} = 0 j_2 j_1 , \quad 2n \pmod{8} = k_1 k_0 \text{ et}$
 $m \pmod{2} = 0 j_0 .$

En utilisant la dernière relation (1 - 17), on a :

$$\text{Wal}_3(j_2, j_1, j_0 ; k_2, k_1, k_0) = \text{Wal}_3(0, j_2, j_1 ; k_1, k_0, 0) .$$

$$\text{Wal}_3(0, j_2, j_1 ; k_1, k_0, 0) = \text{Wal}_3(0, 0, j_2 ; k_0, 0, 0) . \text{Wal}_3(0, 0, j_1 ; k_1, k_0, 0)$$

d'où on a :

$$\text{Wal}_3(j_2, j_1, j_0 ; k_2, k_1, k_0) = \text{Wal}_3(0, 0, j_2 ; k_0, 0, 0) . \text{Wal}_3(0, 0, j_1 ; k_1, k_0, 0) . \text{Wal}_3(0, 0, j_0 ; k_2, k_1, k_0) .$$

Du fait de la 1ère relation (1 - 17), si $j = 0$,

$$\text{Wal}_3(0, 0, j ; k_2, k_1, k_0) = 1, \forall k_i .$$

Du fait de la 2ème relation (1 - 17), si $j = 1$,

$$\text{Wal}_3(0, 0, j ; k_2, k_1, k_0) = (-1)^{k_2}$$

$$\text{d'où } \text{Wal}_3(0, 0, j ; k_2, k_1, k_0) = (-1)^{jk_2}$$

$$\text{et } \text{Wal}_3(m, n) = (-1)^{j_2 k_0} (-1)^{j_1 k_1} (-1)^{j_0 k_2} . \quad (1 - 18)$$

On a une relation générale donnant la valeur des fonctions de Walsh en fonction des variables.

$$\text{Wal}_Y(j_{p-1}, \dots, j_1, j_0 ; k_{p-1}, \dots, k_1, k_0) = \prod_{i=0}^{M-1} (-1)^{j_{p-1-i} \times k_i} .$$

(1 - 19)

2 - PROPRIETES DES FONCTIONS DE WALSH

a) Symétrie (du fait de la symétrie des matrices de Walsh-Fourier)

$$\text{Wal}_Y(m, n) = \text{Wal}_Y(n, m) \quad (2 - 1)$$

$$\text{b) } \sum_{n=0}^{M-1} \text{wal}_Y(n, m) = M \quad \text{si } m = 0 ,$$

$$= 0 \quad \text{si } m \neq 0 . \quad (2 - 2)$$



Ces deux égalités découlent de (1 - 1) et (2 - 1).

$$c) \text{Wal}_Y(m, n) \cdot \text{Wal}_Y(m', n) = \text{Wal}_Y(m \oplus m', n), \quad (2 - 2)$$

où \oplus est la différence symétrique ou somme disjonctive qui est une opération commutative.

(m, m' et n étant exprimés dans le code binaire naturel).

$$\text{En effet, } \text{Wal}_Y(m, n) = \prod_{i=0}^{M-1} (-1)^{j_{p-1-i} \times k_i},$$

$$\text{Wal}_Y(m', n) = \prod_{i=0}^{M-1} (-1)^{j'_{p-1-i} \times k_i},$$

on a pour le produit des deux fonctions :

$$\begin{aligned} \text{Wal}_Y(m, n) \cdot \text{Wal}_Y(m', n) &= \prod_{i=0}^{M-1} (-1)^{k_i (j_{p-1-i} + j'_{p-1-i})} \\ &= \prod_{i=0}^{M-1} (-1)^{k_i (j_{p-1-i} \oplus j'_{p-1-i})} \end{aligned}$$

où l'opération \oplus est une addition digit par digit modulo 2 qui constitue dans la plupart des calculateurs scientifiques une opération machine appelée OU EXCLUSIF.

$$\begin{aligned} d) \text{ Si } p \text{ entier, } \text{wal}_Y(m, n)^p &= 1, \quad \forall m, n, \quad \text{si } p \text{ est pair} \\ &= \text{wal}_Y(m, n), \quad \text{si } p \text{ est impair.} \end{aligned} \quad (2 - 3)$$

$$\frac{\text{Wal}_Y(m, n)}{\text{Wal}_Y(m', n)} = \text{Wal}_Y(m \ominus m', n) = \text{Wal}_Y(m \oplus m', n), \quad (2 - 4)$$

$$\frac{\text{Wal}_Y(m, n)}{\text{Wal}_Y(m, n)} = \text{Wal}_Y(0, n) = 1, \quad \forall n, \quad (2 - 5)$$

ce qui montre l'existence d'un élément inverse pour les produits (2 - 2).

e) On a également :

$$\text{Wal}_Y(m, n) \cdot \text{Wal}_Y(0, n) = \text{Wal}_Y(m, n), \text{ donc } \text{Wal}_Y(0, n) \text{ est un élément unité pour ce produit.}$$

De plus, on sait que la somme disjonctive est associative, il en sera donc de même pour les produits de fonctions de Walsh et on peut écrire :



$$\text{Wal}_Y(m_1, n_1) \cdot \left[\text{Wal}_Y(m_2, n_2) \cdot \text{Wal}_Y(m_3, n_3) \right] = \left[\text{Wal}_Y(m_1, n_1) \cdot \text{Wal}_Y(m_2, n_2) \right] \cdot \text{Wal}_Y(m_3, n_3). \quad (2 - 6)$$

Du fait de toutes ces remarques, les fonctions de Walsh constituent un groupe abélien pour la multiplication.

f) Les fonctions de Walsh forment une suite de fonctions orthogonales.

Considérons l'expression :

$$\phi(m, 1) = \sum_{n=0}^{M-1} \text{Wal}_Y(m, n) \cdot \text{Wal}_Y(1, n) = \begin{cases} M & \text{pour } m = 1 \\ 0 & \text{pour } m \neq 1 \end{cases}. \quad (2 - 7)$$

$$\text{Si } m = 1, \phi(m, m) = \sum_{n=0}^{M-1} \text{Wal}_Y(m \oplus m, n) = \sum_{n=0}^{M-1} \text{Wal}_Y(0, n) = M, \text{ à cause de } \quad (2 - 2),$$

de

$$\text{et si } m \neq 1, \phi(m, 1) = \sum_{n=0}^{M-1} \text{Wal}_Y(p, n) = 0, \text{ à cause de } (2 - 2), \text{ car } p \neq 0.$$

3 - TRANSFORMEES DE WALSH

a) Définition

Etant donnée une fonction $f(n)$ définie sous forme discrète sur un compact de longueur $M = 2^Y$, la transformée de Walsh de cette fonction est donnée par :

$$F(m) = \sum_{n=0}^{M-1} f(n) \text{Wal}_Y(m, n), \quad (3 - 1)$$

$$\text{ou } f(n) \xrightarrow{W} F(m). \quad m = 0, 1, \dots, M-1.$$

La fonction $f(n)$ peut être une fonction complexe : dans ce cas, $F(m)$ est également une fonction complexe.

Du fait de l'orthogonalité des fonctions de Walsh, on peut définir la transformée inverse :

$$f(n) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} F(m) \text{Wal}_Y(m, n) \quad (3 - 2)$$

$$n = 0, 1, \dots, M - 1.$$

$$\text{ou } F(m) \xrightarrow{W} f(n).$$

Nous avons vu que les valeurs $\text{Wal}_Y(m, n)$ des fonctions de Walsh sont les éléments W_{mn} de la matrice $[W]$ de



Walsh-Fourier qui se décompose de la même façon que la matrice de Fourier dont l'élément correspondant est égal à

$$e^{\frac{2i\pi}{M} m \cdot n}$$

On peut donc appliquer l'algorithme de Cooley et Tukey [8] pour calculer rapidement les transformées de Walsh. Du fait que les valeurs des fonctions de Walsh sont réelles et égales à + 1 ou - 1, nous n'avons plus à effectuer de multiplications complexes mais seulement des additions et soustractions de nombres réels ce qui diminue considérablement les temps de calcul.

b) Propriétés

$$1 - F(o) = \sum_{n=0}^{M-1} f(n) \text{Wal}_Y(o, n) = \sum_{n=0}^{M-1} f(n) \quad (3 - 1)$$

$$2 - |F(m)| \leq \sum_{n=0}^{M-1} |f(n) \text{Wal}_Y(m, n)| \leq \sum_{n=0}^{M-1} |f(n)| \quad (3 - 10)$$

3 - Si $f(n)$ est une fonction réelle et non négative, on a :

$$\sum_{n=0}^{M-1} |f(n)| = \sum_{n=0}^{M-1} f(n) = F(o), \quad (3 - 3)$$

$$\text{d'où : } |F(m)| \leq F(o), \quad \forall m. \quad (3 - 4)$$

4 - La transformée de Walsh est linéaire :

$$\sum_{n=0}^{M-1} (\alpha_1 f_1(n) + \alpha_2 f_2(n)) \text{Wal}_Y(m, n) = \alpha_1 \sum_{n=0}^{M-1} f_1(n) \text{Wal}_Y(m, n) +$$

$$\alpha_2 \sum_{n=0}^{M-1} f_2(n) \text{Wal}_Y(m, n),$$

$$\text{d'où : } \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \xrightarrow{W} \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 \quad (3 - 5)$$

5 - Translation

Du fait de la propriété (2 - 2) des fonctions de Walsh, la translation doit être considérée dans une arithmétique non décimale qui a pour opération de base la somme disjunctive :

$$\begin{aligned} m \oplus n &= (m \wedge \bar{n}) \cup (n \wedge \bar{m}), \\ &= (m \cup n) \wedge (\overline{m \wedge n}). \end{aligned} \quad (3 - 6)$$

$$\text{Considérons : } F'(m) = \sum_{n=0}^{M-1} f(n \oplus n') \text{Wal}_Y(m, n)$$

Si on pose $q = n \oplus n'$ $n = q \ominus n' = q \oplus n'$, à cause de (2 - 4), on a : $F'(m) = \sum_{q=0}^{M-1} f(q) \text{Wal}_Y(m, q \oplus n')$,



$$F'(m) = \text{Wal}_Y(m, n') \sum_{q=0}^{M-1} f(q) \text{Wal}_Y(m, q),$$

$$F'(m) = \text{Wal}_Y(m, n') F(m). \quad (3 - 7)$$

Exemple

$$Y = 2 \quad M = 4 \quad f(f(0), f(1), f(2), f(3))$$

La transformée de Walsh de f est :

$$F(F(0), F(1), F(2), F(3)),$$

$$F(0) = f(0) + f(1) + f(2) + f(3),$$

$$F(1) = f(0) + f(1) - f(2) - f(3),$$

$$F(2) = f(0) - f(1) + f(2) - f(3),$$

$$F(3) = f(0) - f(1) - f(2) + f(3).$$

Si $n' = 2$,

$$F'(0) = f(0 \oplus 2) + f(1 \oplus 2) + f(2 \oplus 2) + f(3 \oplus 2),$$

$$F'(0) = f(2) + f(3) + f(0) + f(1) = \text{Wal}_2(0, 2) F(0),$$

$$F'(1) = f(2) + f(3) - f(0) - f(1) = \text{Wal}_2(1, 2) F(1),$$

$$F'(2) = f(2) - f(3) + f(0) - f(1) = \text{Wal}_2(2, 2) F(2),$$

$$F'(3) = f(2) - f(3) - f(0) + f(1) = \text{Wal}_2(3, 2) F(3).$$

On a bien :

$$F'(m) = \text{Wal}_2(m, 2) F(m), \quad m = 0, 1, 2, 3.$$

6 - Propriétés symétriques par rapport à la translation.

Considérons la transformée de Walsh de $g(n)$ $\text{Wal}_Y(m', n)$

$$G'(m) = \sum_{n=0}^{M-1} g(n) \text{Wal}_Y(m', n) \text{Wal}_Y(m, n)$$

$$= \sum_{n=0}^{M-1} g(n) \text{Wal}_Y(m \oplus m', n)$$

$$g(n) \text{Wal}_Y(m', n) \xrightarrow{W} G(m \oplus m') \quad (3 - 8)$$

4 - LA DISJONCTION

En s'appuyant sur les résultats déjà obtenus, nous donnons une opération qui a les mêmes propriétés pour la transformée de Walsh que la convolution pour la transformée de Fourier. Gibbs (6) appelle cette opération "logical convolution" que l'on définit par :



$$h(i) = \sum_{j=0}^{M-1} f(j) g(i \oplus j),$$

$$i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (4 - 1)$$

et que l'on écrit symboliquement :

$$h = f \oplus g \quad (4 - 2)$$

1 - Théorème

La transformée de Walsh d'une disjonction est égale au produit des transformées de Walsh des deux fonctions.

La transformée de Walsh d'une disjonction s'écrit :

$$H(m) = \sum_{n=0}^{M-1} h(n) \text{Wal}_Y(m, n),$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(j) g(n \oplus j) \text{Wal}_Y(m, n),$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} f(j) g(n) \text{Wal}_Y(m, n) \text{Wal}_Y(m, j),$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} g(n) \text{Wal}_Y(m, n) \cdot \sum_{j=0}^{M-1} f(j) \text{Wal}_Y(m, j).$$

$$\text{D'où : } f \oplus g \xrightarrow{W} F \cdot G. \quad (4 - 3)$$

2 - Théorème réciproque

La transformée de Walsh du produit de deux fonctions est égale à la disjonction des transformées de Walsh de ces deux fonctions.

$$\sum_{n=0}^{M-1} f(n) g(n) \text{Wal}_Y(m, n) = \frac{1}{M} F(m) \oplus G(m)$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} F(p) G(m \oplus p) \quad (4 - 4)$$

$$\text{En effet, } \frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} \left[\sum_{n=0}^{M-1} f(n) \text{Wal}_Y(p, n) \sum_{k=0}^{M-1} g(k) \text{Wal}_Y(m \oplus p, k) \right] =$$

$$\frac{1}{M} \sum_{p=0}^{M-1} \left[\sum_{n=0}^{M-1} f(n) g(n) \text{Wal}_Y(p, n) \text{Wal}_Y(p, n) \text{Wal}_Y(m, n) + \right.$$



$$\left. \sum_{n=0}^{M-1} f(n) \text{Wal}_Y(p, n) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq n}}^{M-1} g(k) \text{Wal}_Y(m, k) \text{Wal}_Y(p, k) \right\}.$$

Or d'après (2 - 7) $\sum_{p=0}^{M-1} \text{Wal}_Y(p, n) \text{Wal}_Y(p, n) = M$

$$\sum_{p=0}^{M-1} \text{Wal}_Y(p, n) \text{Wal}_Y(p, k) = 0 \text{ car } k \neq n,$$

et on a bien la relation (4 - 4).

3 - Théorème de Parseval

L'énergie contenue dans le signal est égal à l'énergie contenue dans la transformée de Walsh du signal.

On a :

$$\sum_{m=0}^{M-1} F^2(m) = \sum_{m=0}^{M-1} \left(\sum_{n=0}^{M-1} f(n) \text{Wal}_Y(m, n) \right) \left(\sum_{p=0}^{M-1} f(p) \text{Wal}_Y(m, p) \right) =$$

$$\sum_{n=0}^{M-1} f(n) \sum_{p=0}^{M-1} f(p) \sum_{m=0}^{M-1} \text{Wal}_Y(m, p \oplus n)$$

Si $p \oplus n = 0 \rightarrow p = n$, on a $\sum_{m=0}^{M-1} F^2(m) = M \sum_{n=0}^{M-1} f^2(n)$

Si $p + n \neq 0 \rightarrow p \neq n$, $\sum_{m=0}^{M-1} \text{Wal}_Y(m, p \oplus n) = 0$.

Donc on a bien :

$$\sum_{m=0}^{M-1} F^2(m) = M \sum_{n=0}^{M-1} f^2(n). \quad (4 - 5)$$

5 - TRANSFORMÉE D'HADAMARD (ou Walsh-Fourier à 2 dimensions)

Soit une fonction de deux variables $f(n, m)$ échantillonnées sur une grille carrée de N^2 points, on définit la transformée d'Hadamard par :

$$F(v, \mu) = \hat{W}(v, \mu) f(n, m) \hat{W}(v, \mu), \quad (5 - 1)$$

où $\hat{W}(v, \mu)$ est la matrice de Walsh-Fourier définie dans (1 - 14).
Remarquons qu'on peut aussi utiliser la matrice d'Hadamard $[H]$
(4).



Nous avons vu que les matrices $\{\hat{W}\}$ (et $\{H\}$) sont orthogonales, on peut écrire la transformée inverse à deux dimensions :

$$f(m,n) = \frac{1}{N} \hat{W}(n,m) \cdot F(\gamma, \rho) \cdot \hat{W}(n, m). \quad (5 - 2)$$

6 - APPLICATION DES TRANSFORMATIONS DE WALSH ET D'HADAMARD AU CODAGE DES IMAGES SONAR

Sur la figure 1, nous donnons une image de sonar latéral.

COUPE SONAR ORIGINALE



Fig. 1



Le spectre séquentiel de la première trace est représenté sur la figure 2. L'amplitude du spectre est donnée en ordonnée en fonction de la séquence en abscisse. On constate que les fortes valeurs du spectre correspondent aux faibles valeurs de la séquence.

SPECTRE SEQUENTIEL

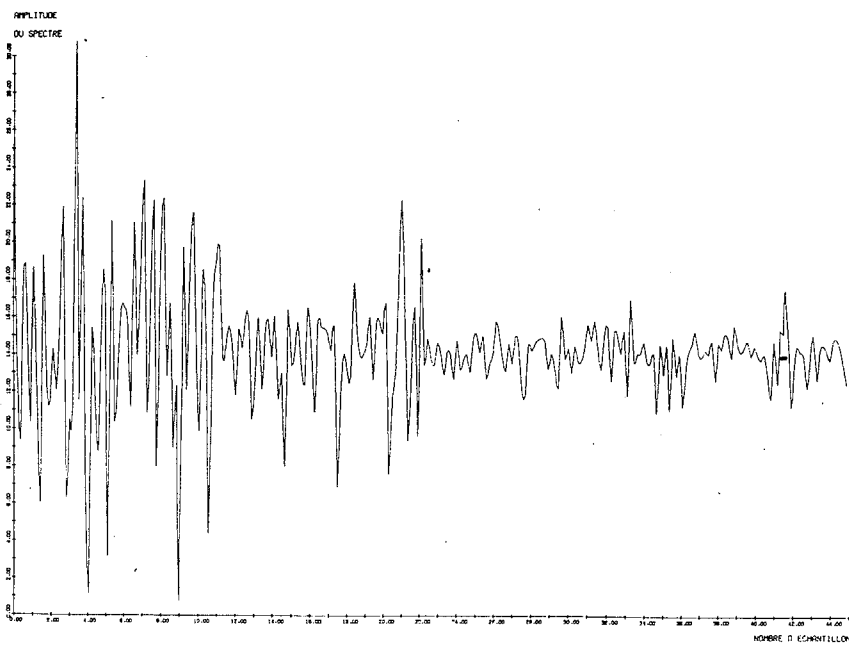


Fig. 2



Nous avons choisi deux régions A et B situées respectivement sur le milieu du bord gauche et au centre de la figure 1. Les figures 3 et 4 sont des agrandissements de ces 2 régions.

ZONE A

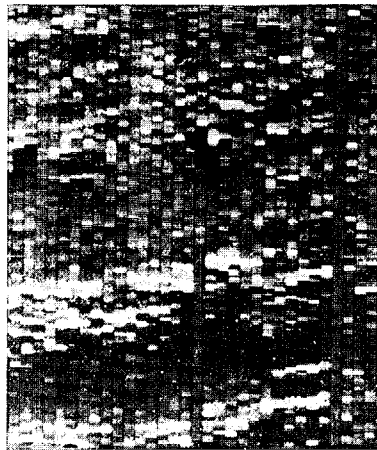
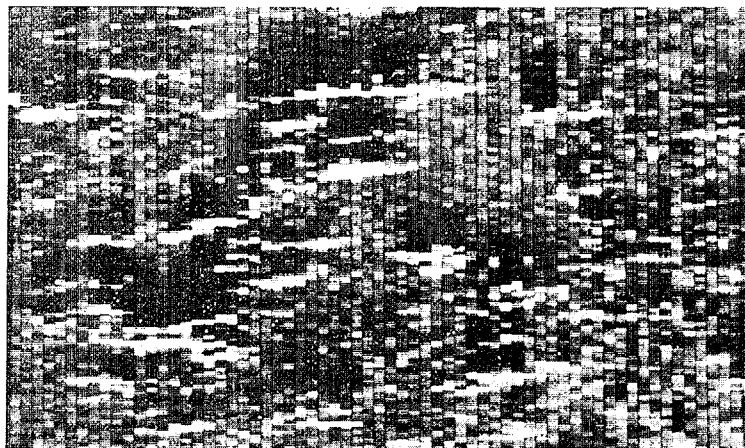


Fig. 3

ZONE B

Fig. 4





Les figures suivantes représentent les spectres de Fourier * et d'Hadamard de grilles constituées par 32 échantillons pris sur 32 traces jointives. Sur chacune des traces, les échantillons ne se touchent pas, on en prend un sur trois sauf dans le dernier essai où on en prend un sur six, on a donc doublé le pas d'échantillonnage.

Les deux premières grilles appartiennent à la zone A (figures 5 - 8), les trois autres à la zone B (figures 9 -14). Ces spectres sont représentés dans un espace à 3 dimensions par leurs courbes de niveau :

- L'axe des ordonnées donne la fréquence spatiale pour la transformation de Fourier et la séquence spatiale pour la transformation d'Hadamard.

- L'axe des abscisses donne la fréquence temporelle pour la transformation de Fourier et la séquence temporelle pour la transformation d'Hadamard.

Nous n'allons pas détailler ces figures, mais nous remarquons comme nous l'avons fait pour le spectre séquentiel d'une trace que les fortes valeurs du spectre sont situées dans la région à faible séquence temporelle et spatiale. Ce résultat est d'ailleurs valable pour les spectres de Fourier.

CONCLUSIONS

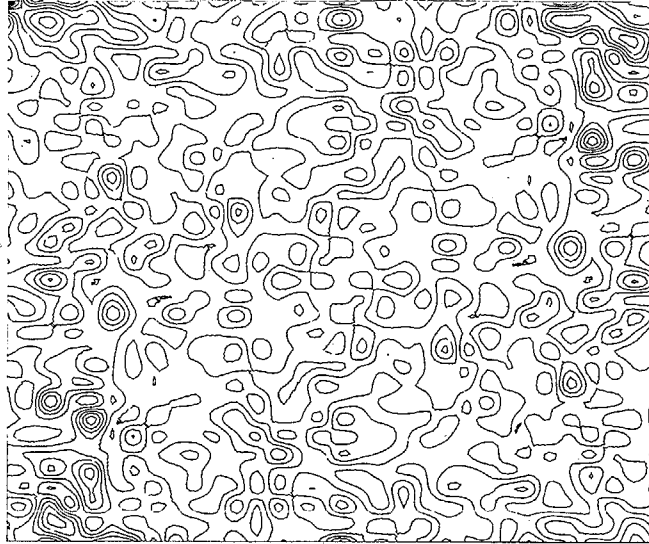
Les transformations de Walsh et d'Hadamard sont obtenues encore plus rapidement que les transformations de Fourier puisque l'algorithme de Cooley-Tukey ne comprend plus que des additions et des soustractions de nombres réels. De plus, il semble que l'information contenue dans les spectres séquentiels soit concentrée dans des régions à faible séquence tant temporelle que spatiale. On peut penser pouvoir compresser à peu de frais l'information contenue dans le spectre séquentiel en ne considérant qu'une partie de celui-ci, c'est-à-dire celle contenue dans une région à séquence limitée.

* Les spectres de Fourier sont symétriques par rapport à un Point situé au centre du graphique.



Fig. 5

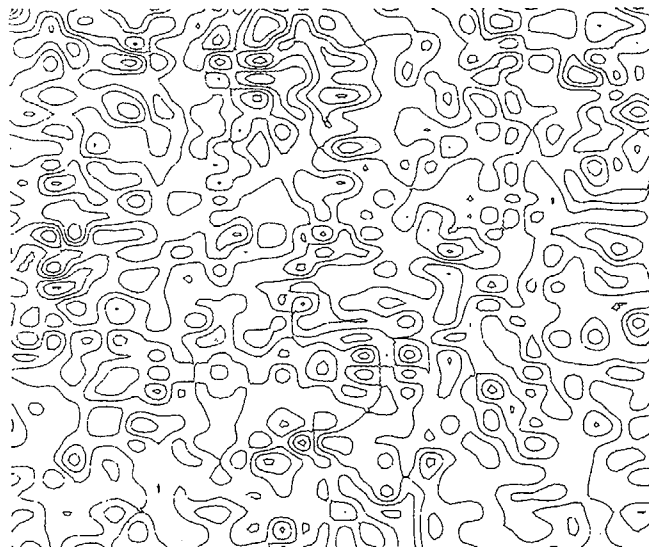
EQUIDISTANCE DES COURBES = 0.05



FOURIER-1- (32*32) NSAUT=0 DEBUT=600 SURDIS=3

Fig. 6

EQUIDISTANCE DES COURBES = 4.00

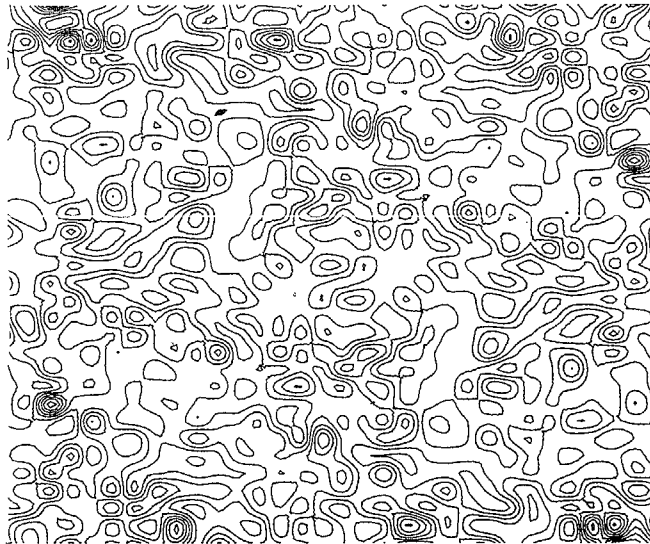


HADAMARD-1- (32*32) NSAUT=0 DEBUT=600 SURDIS=3



Fig. 7

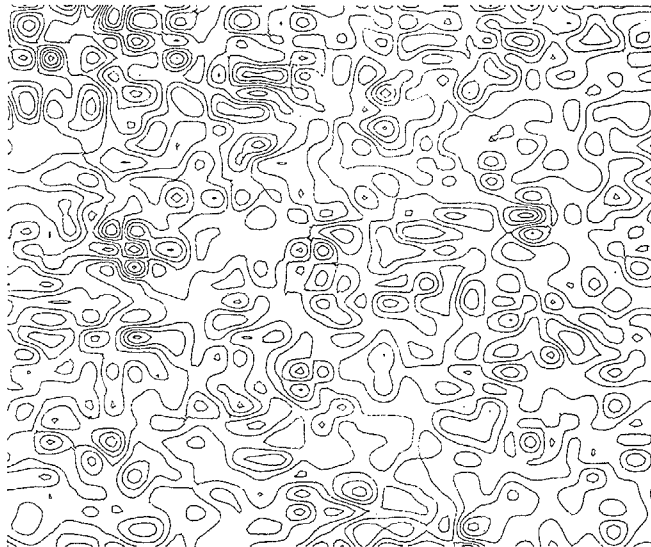
EQUIDISTANCE DES COURBES = 0.04



FOURIER -2- (32*32) NSAUT=0 DEBUT=632 SURDIS=3

Fig. 8

EQUIDISTANCE DES COURBES : 3.00

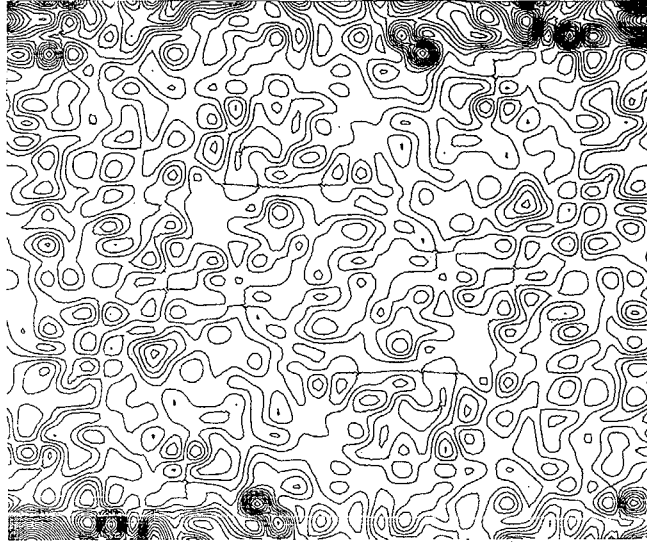


HANCOCK -2- (32*32) NSAUT=0 DEBUT=632 SURDIS=3



Fig. 9

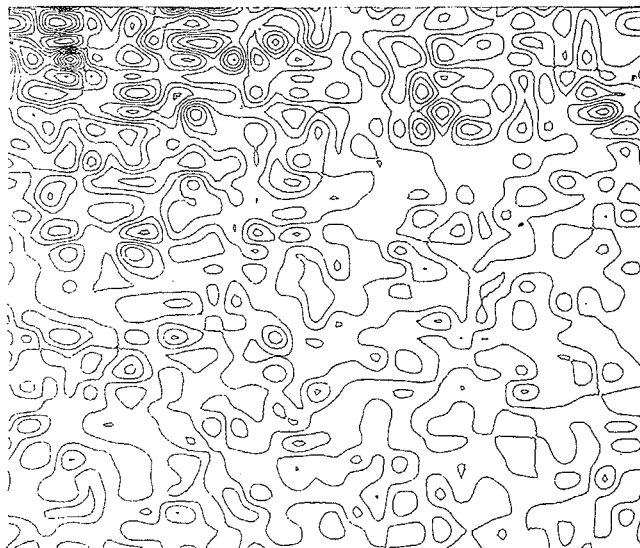
EQUIDISTANCE DES COURBES = 0.05



FOURIER -4- (32*32) NSAUT=130 DEBUT=685 SURDIS=3

Fig. 10

EQUIDISTANCE DES COURBES = 6.00

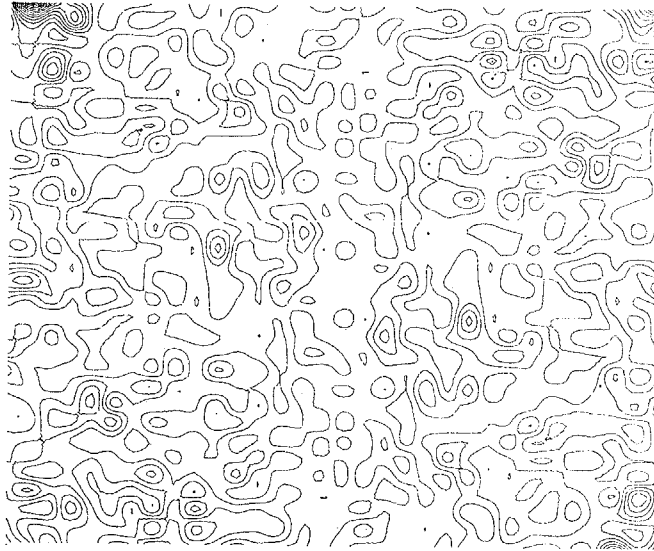


HADAMARD-4- (32*32) NSAUT=130 DEBUT=685 SURDIS=3



Fig. 11

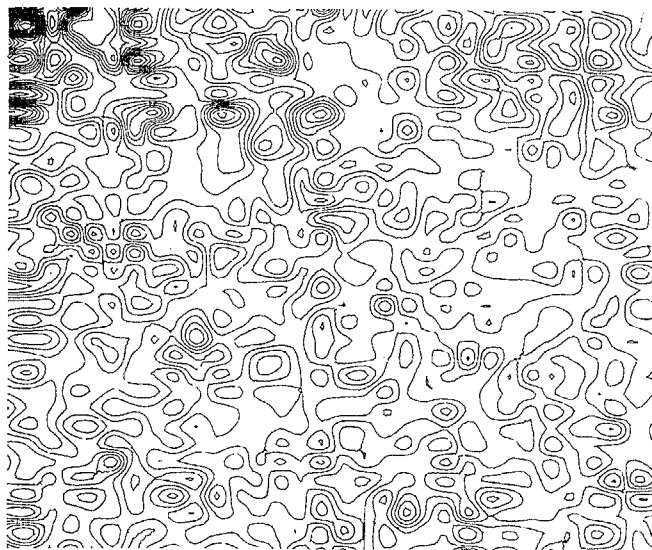
EQUIDISTANCE DES COURBES = 0.05



FOURIER -6- (32*32) NSAUT=165 DEBUT=685 SURDIS=3

Fig. 12

EQUIDISTANCE DES COURBES = 3.00

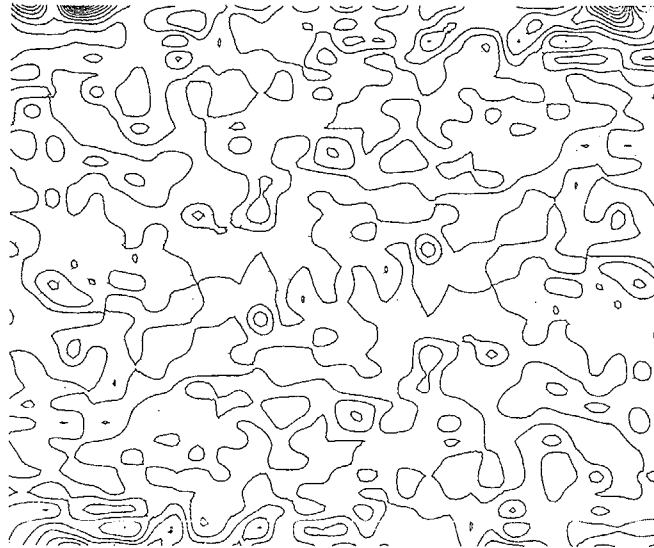


HADAMARD -6- (32*32) NSAUT=165 DEBUT=685 SURDIS=3



Fig. 13

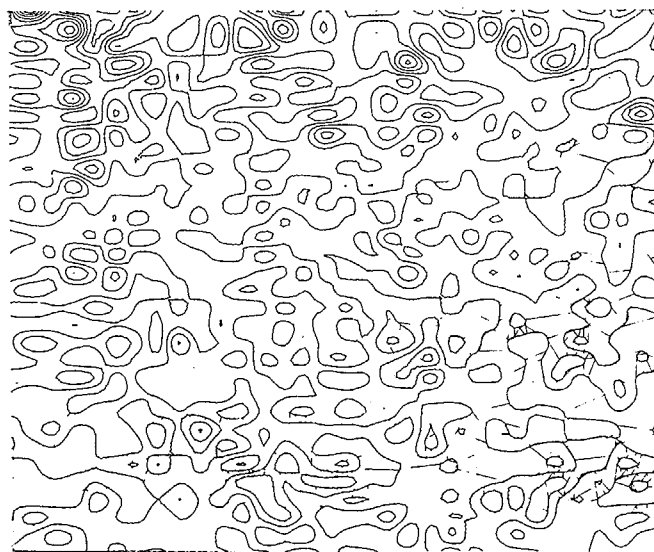
EQUIDISTANCE DES COURBES = 0.10



FOURIER-6* (32*32) NSAUT=165 DEBUT=685 SURDIS=6

Fig. 14

EQUIDISTANCE DES COURBES = 5.00



HADAMARD -6* (32*32) NSAUT=165 DEBUT=685 SURDIS=6



R E F E R E N C E S

- (1) HARMUTH, H.F., Applications of Walsh functions in communications, I.E.E. Spectrum, november 1969, pp. 82-91.
- (2) HARMUTH, H.F., A generalized concept of frequency and some applications, I.E.E.E. Transactions on Information theory, vol. 5, t. 14, n° 3, may 1968, pp. 375-382.
- (3) HARMUTH, H.F., Transmission of information by orthogonal functions, New-York/Berlin 1969 : Springer-Verlag.
- (4) PRATT, K.W. ; KANE, J. ; ANDREWS, H.C., Hadamard transform image coding, Proceedings of the I.E.E., vol.57, n° 1, January 1969, pp. 58-68.
- (5) WHELCHER, J.E. and GUINN, D.F., The fast Fourier-Hadamard transform and its use in signal representation and classification, Melpar Inc., Falls Church, Va., tech. Rept. PRC 68-11, 1968.
- (6) GIBBS, J.E., Walsh spectrometry, a form of spectral analysis well suited to binary digital computation, Natl. Phys. Lab. Rept., Teddington, Middlesex, England, 1968.
- (7) WALSH, J.L., A closed set of orthogonal functions, Am. J. Math., vol. 55, pp. 5-24, 1923.
- (8) SHANKS, J.L., Computation of the fast Walsh-Fourier transform, I.E.E. Transactions on computers, May 1969, pp. 457-459.