



TRAITEMENT DU SIGNAL ET SES APPLICATIONS

TECHNIQUES DE SYNTHÈSE DE FILTRES NUMÉRIQUES
A PARTIR DU DOMAINE DES FRÉQUENCES.

Vladimir RISO

Compagnie IBM France,

Centre d'Etudes et de Recherches de La Gaude.

RESUME

Ce papier décrit une méthode de synthèse de filtre numérique dans $l_2 (0, \frac{\pi}{T})$. Elle consiste à approximer un gabarit en minimisant la fonction d'erreur. Deux fonctions d'erreur peuvent être choisies: écart maximum ou somme des carrés des écarts. La minimisation de la fonction d'erreur est réalisée par l'utilisation de l'algorithme de Fletcher, Powel et Davidon.

SUMMARY

This paper describes a synthesis method of digital filter in $l_2 (0, \frac{\pi}{T})$. It consists in an approximation of a schedule by minimization of the error function. Two error functions can be chosen: equiripple or sum of square deviation. This is done by using Fletcher, Powel and Davidon algorithm.



TECHNIQUES DE SYNTHÈSE DE FILTRES NUMÉRIQUES A PARTIR DU DOMAINE DES FRÉQUENCES.

Vladimir RISO

Compagnie IBM France, C. E. R. de la Gaude.

I. INTRODUCTION

Les progrès réalisés ces dernières années dans les méthodes de fabrication des circuits numériques intégrés à large échelle ont amené à concevoir le traitement du signal de façon différente.

Jusqu'à maintenant la conception des équipements était influencée par leur possible réalisation avec des circuits utilisant des composants analogiques. De plus en plus, nous voyons apparaître des équipements, utilisant des circuits numériques, effectuant du traitement de signal, leur conception est évidemment différente à cause de la nature même de ces composants. Des performances et des possibilités jusqu'à maintenant non-envisagées peuvent être obtenues.

Je ne vais pas vous décrire ici une réalisation de système, mais développer une méthode qui permet de voir sous un autre angle la conception de système numérique de traitement du signal. Un des problèmes de base, le filtrage est bien connu, dans le domaine des signaux analogiques, moins bien dans le cas du filtrage numérique. La méthode de synthèse de filtre numérique que je vais exposer permet de combler un peu ce vide.

Dans une première partie, je ferai un rappel sur les filtres numériques, ainsi que toutes les notions qui y sont attachées.

Dans la deuxième partie, j'exposerai la méthode de synthèse de filtre numérique.

Dans la troisième partie, je donnerai un exemple de synthèse ainsi qu'une méthode permettant de dériver d'un filtre normalisé tous les filtres similaires possibles dans l'espace de Nyquist.



II. RAPPEL SUR LES FILTRES NUMERIQUES.

Si nous considérons un système numérique à une entrée et une sortie, et si nous appelons

$$X = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

la suite discrète des signaux d'entrée espacée de T seconde, (cette suite correspond à l'échantillonnage d'une fonction continue d'entrée).

$$Y = y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$$

la suite discrète des signaux de sortie espacés de T seconde

Si le système numérique calcule à chaque instant nT , la valeur Y_n , la valeur Y_n telle que:

$$y_n = (x_0 a_0 + x_1 a_1 + \dots) - (b_1 y_{n-1} + b_2 y_{n-2} + \dots)$$

c'est un filtre numérique.

Nous noterons les coefficients a_i et b_i sous la forme

$$A = a_0, a_1, \dots, a_n$$

$$B = b_1, b_2, \dots, b_n$$

La transformée Z d'un tel système est:

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}{1 + b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n}}$$

La caractéristique de fréquence d'un tel filtre est obtenue en remplaçant z par $e^{j\omega T}$ et l'on a

$$H(\omega) = \frac{a_0 + a_1 e^{-j\omega T} + \dots + a_n e^{-j\omega n T}}{1 + b_1 e^{-j\omega T} + \dots + b_n e^{-j\omega n T}}$$



-
- a) - $H(\omega)$ est une fonction périodique de période $\omega_s = \frac{\pi}{T}$
 - b) - $|H(\omega)|$ est une fonction paire.
 - c) - A et B déterminent entièrement $H(\omega)$
 - d) - B conditionne la stabilité du filtre, en effet, la stabilité est exprimée par la relation suivante: le module des racines du dénominateur de $H(\omega)$ doit être inférieur à 1.

III. CALCUL DES COEFFICIENTS

Le problème qui se pose pour la détermination de A et B peut être formulé de la façon suivante:

Soit $G(\omega)$ un gabarit dans le domaine des fréquences, déterminez A et B tel que $H(\omega, A, B)$ approxime le mieux $G(\omega)$, suivant un critère.

Considérons deux cas classiques de critères qu'il faut préciser:

a) Critère de l'écart maximum:

la fonction d'erreur s'exprime dans ce cas

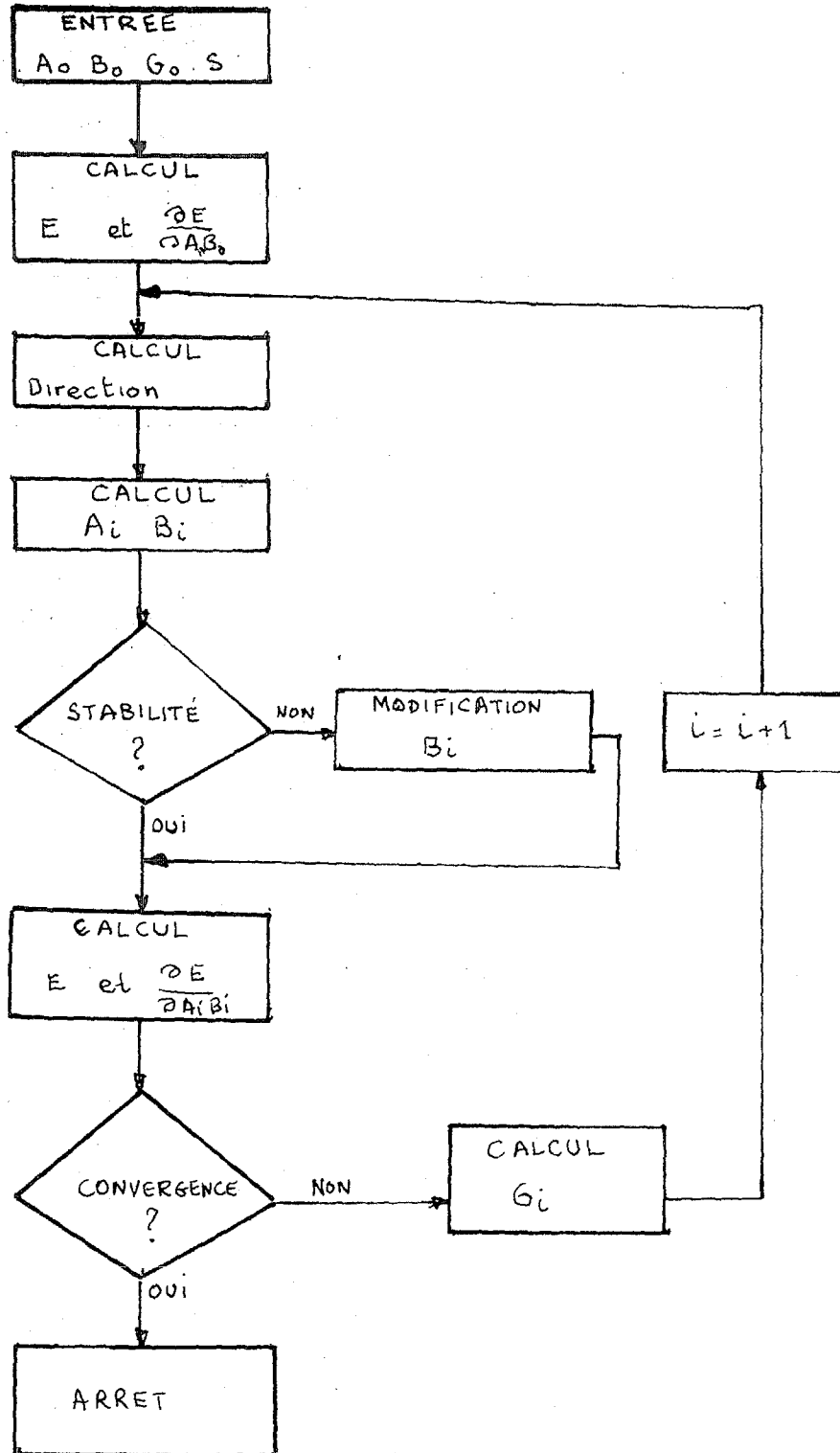
$$E = \text{Max} | G(\omega_i) - H(\omega_i, A, B) \quad 0 \leq \omega_i \leq \omega_s$$

b) Critère des moindres carrés:

La fonction d'erreur s'écrit

$$E = \sum_{\omega_i=0}^{\omega_s} \left(G(\omega_i) - H(\omega_i, A, B) \right)^2$$

Dans les deux cas, la solution consiste à minimiser E. Nous avons appliqué pour cela la méthode du gradient. On utilise en particulier l'algorithme de Fletcher, Powell et Davidon [ref 1]. Ce calcul itératif se prête bien à l'utilisation d'un calculateur numérique. Le diagramme de fonctionnement de la méthode de synthèse est figuré ci-après:





Nous pouvons détailler les étapes successives du calcul VI:

1°) Entrée des données:

A_0 et B_0 sont les valeurs initiales.

G_0 est une matrice carré $m \times m$, m étant le nombre de composants de A_0 et B_0 réunis.

S valeur minimum de E que l'on souhaite obtenir, cette donnée est utilisée pour arrêter les itérations.

2°) Calcul de E et $\frac{\partial E}{\partial A_0 B_0}$

On calcule E suivant les formules données précédemment ainsi que le gradient de E par rapport à toutes les composantes de A_0 et B_0 .

3°) Calcul de la direction de variation: ce calcul est fait à partir de G_0 et du vecteur gradient de E calculé précédemment.

4°) Calcul de $A_i B_i$: On calcule les nouveaux vecteurs A_i et B_i à partir des anciens, de la direction de variation, et d'un pas déterminé par la valeur de E.

5°) Test de la validité de la solution: si la solution n'est pas stable, c'est-à-dire si les racines du dénominateur de $H(\omega)$ sont en dehors du cercle unité, on les remplace par leurs conjugués par rapport au cercle unité.

6°) Calcul identique à 2.

7°) Test de la convergence: Si $E < S$ on stoppe, autrement on repart pour une nouvelle itération.

8°) Calcul de G_i : On modifie G_0 en fonction du gradient de E.

9°) Bouclage: on fait $i = i + 1$ et l'on repart à l'étape 3.

Le nombre d'itérations nécessaire est de $4 \times m$ en général. Si la solution initiale est proche de la convergence, le nombre d'itérations peut-être inférieur. Nous utilisons deux programmes de ce type, l'un écrit en Fortran pour 360/30, l'autre écrit en APL/360.



IV. RESULTATS OBTENUS

En général, la forme de $H(z)$ définie au paragraphe II, n'est pas réalisable commodément en circuits numériques, surtout lorsque le nombre des coefficients est élevé. En effet, la condition de stabilité du filtre impose une grande précision sur les coefficients, ce qui nécessite des longueurs de mots rédhibitoires. La forme suivante de $H(z)$ est plus couramment utilisée.

$$H(z) = a_0 \prod_k \frac{1 + a_1^k z^{-1} + a_2^k z^{-2}}{1 + b_1^k z^{-1} + b_2^k z^{-2}} = a_0 \prod_k H_k(z)$$

a_i^k b_i^k sont des coefficients à double indice.

Le module de $H_k(z)$ peut s'exprimer

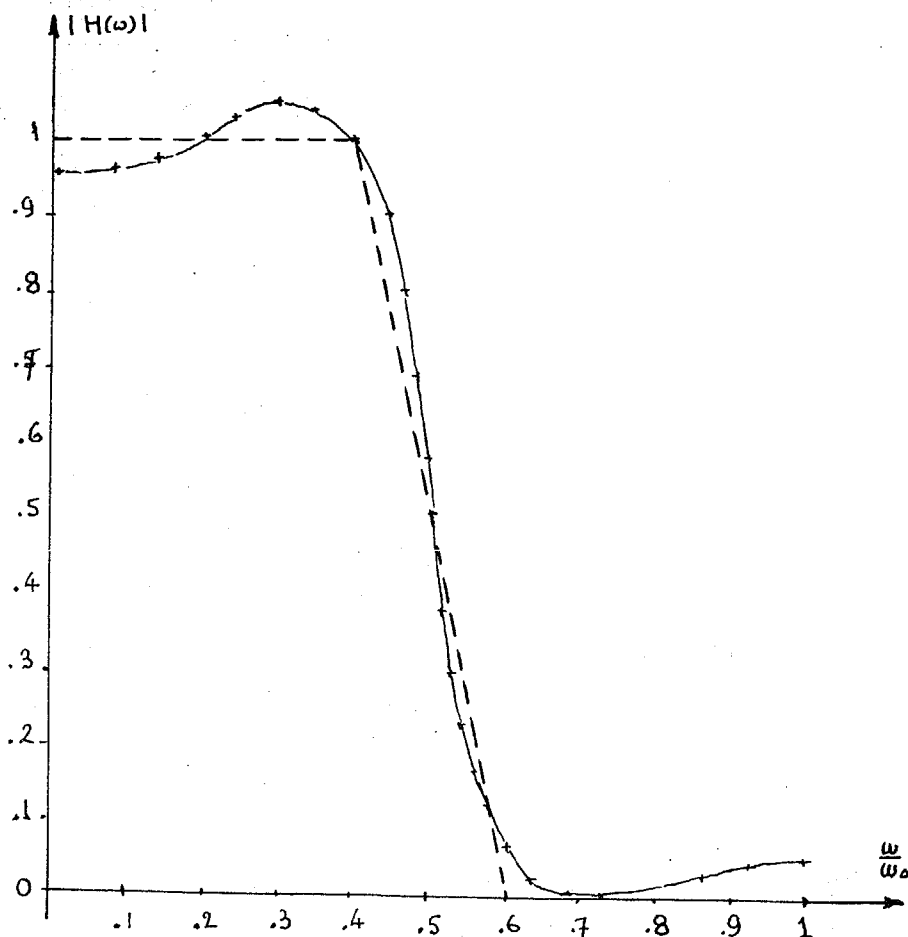
$$|H_k(z)| = \frac{1 + (a_1^k)^2 + (a_2^k)^2 - 2(a_2^k) + 2(1 + a_2^k)a_1^k \cos \omega T + 4a_2^k \cos^2 \omega T}{1 + (b_1^k)^2 + (b_2^k)^2 - 2(b_2^k) + 2(1 + b_2^k)b_1^k \cos \omega T + 4b_2^k \cos^2 \omega T}$$

La fonction d'erreur E peut s'écrire dans le cas du critère d'écart maximum:

$$E = \text{MAX}_k \left| a_0 \prod_k (|H_k(\omega_i)| - |b(\omega_i)|) \right| \quad 0 \leq \omega_i \leq \omega_s$$

Un exemple de synthèse est donné dans la figure ci-dessous, le gabarit a été introduit sous la forme suivante:

$$G(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq 0.4 \omega_s \\ 0 & 0.6 \omega_s \leq \omega \leq \omega_s \end{cases}$$



Ce filtre peut être considéré comme un filtre normalisé du 6ème ordre, correspondant au gabarit défini plus haut. Comme dans la théorie des filtres analogiques, il est possible d'opérer sur ce filtre des transformations en fréquence, c'est-à-dire changer les fréquences de coupures du passe-bas ou même de transformer celui-ci en un autre type de filtre: passe-bande, passe haut ou coupe-bande.

La méthode de transformation en fréquence des filtres numériques est basée sur la théorie exposée par Ken. Steiglitz [ref. 2] sur les isomorphismes pré-existant entre l'es-



pace $L_2(-\infty, \infty)$ des signaux analogiques et l'espace l_2 des signaux numériques. La correspondance entre la transformée de Fourier et la transformée Z est faite à l'aide de la transformée bi-linéaire.

La transformation en fréquence peut-être réalisée de la manière suivante:

Les coefficients du filtre numérique normalisé étant connus, sa transformée Z aussi, on remplace z par $\frac{1+s}{1-s}$, on trouve une fonction et une seule $H(s)$; on peut opérer sur celle-ci la transformation en fréquence désirée; la nouvelle fonction $H(s)$ ainsi obtenue est transformée en une forme $H(z)$ en remplaçant s par $\frac{z-1}{z+1}$

et les nouveaux coefficients sont ainsi déterminés.

V. CONCLUSION

J'ai essayé de montrer dans cet exposé une nouvelle méthode de synthèse des filtres numériques. Cette méthode permet de travailler directement dans l'espace $l_2(0, \frac{\pi}{T})$ on a de ce fait l'avantage d'être maître des déformations des caractéristiques en fréquence, ce qui n'est pas le cas lors de l'utilisation des méthodes classiques faisant appel à des modèles de filtres analogiques.

Je tiens à remercier M. MICHEL, étudiant à l'U. E. R. Informatique de Nice, de l'aide qu'il m'a apportée dans les calculs relatifs au chapitre IV de cet exposé



BIBLIOGRAPHY

REF 1 Fletcher R Powel MJD
A rapidly converging descent method for minimization.
Computer Journal Vol. 6 pp 163-168 1963
Davidon WC
Variable metric method for minimization
Argonne National Lab Report ANL 5990 Nov 1959.

REF 2 Kenneth Steiglitz
The general theory of digital filter
Princeton University TR 40099 AFOSR 641664
May 1963