



CONSIDÉRATIONS SUR LA REPRÉSENTATION ET L'ANALYSE HARMONIQUE DES SIGNAUX DÉTERMINISTES OU ALÉATOIRES

par

Georges BONNET

Professeur à la Faculté des sciences *

LISTE DES SYMBOLES ET NOTATIONS

<p>\rightarrow tend vers,</p> <p>\in appartient à,</p> <p>\subset est inclus dans,</p> <p>\Rightarrow implique,</p> <p>\forall quel que soit,</p> <p>\otimes produit tensoriel,</p> <p>$(X * Y)$ produit de convolution de X et Y,</p> <p>$\overset{\leftarrow}{\underset{\leftarrow}{\text{F}}}$ transformée de Fourier,</p> <p>X module de X,</p> <p>$\ X\$ norme de X,</p> <p>$[a, b]$ intervalle fermé (a, b),</p> <p>$X \rangle$ ket ou vecteur contravariant,</p> <p>$\langle X$ bra ou vecteur covariant,</p> <p>$\langle X Y \rangle$ bracket ou produit scalaire entre vecteurs.</p> <p>$\langle t X \rangle = X(t)$ représentation-temps du signal $X \rangle$,</p> <p>$\langle \nu X \rangle = x(\nu)$ représentation-fréquence du signal $X \rangle$,</p> <p>$X^*(t)$ fonction complexe conjuguée de $X(t)$,</p> <p>$X^\#(t) = X^*(-t)$ fonction adjointe,</p> <p>$\langle X, Y \rangle$ forme linéaire (ou produit scalaire fonctionnel),</p> <p>A opérateur linéaire,</p> <p>A[†] opérateur adjoint,</p> <p>[A, B] = AB - BA commutateur,</p> <p>1 opérateur identité (ou neutre),</p> <p>D_t opérateur de dérivation-temps,</p> <p>E { X } espérance mathématique de X,</p> <p>ε₀ espace des signaux fondamentaux,</p> <p>ε espace-signal,</p> <p>F filtre linéaire,</p> <p>H(t) réponse percussionnelle,</p> <p>h(ν) gain complexe,</p> <p>Γ opérateur de covariance,</p> <p>Γ(τ) covariance stationnaire,</p> <p>γ(ν) distribution spectrale,</p> <p>L² espace des fonctions de carré sommable,</p> <p>P_T opérateur de projection (ou projecteur),</p> <p>Π_T(t) fonction projectrice,</p> <p>π_T(ν) = 2T · sin 2πνT / 2πνT $\hat{=} \Pi_T$,</p> <p>R ensemble des nombres réels,</p>	<p>S espace des fonctions à décroissance rapide,</p> <p>T_τ opérateur de translation-temps,</p> <p>Tr A trace de l'opérateur A,</p> <p>W₂ espace fonctionnel de Besicovitch,</p> <p>Ω opérateur de corrélation,</p> <p>m. q. en moyenne quadratique,</p> <p>stoch. stochastique,</p> <p>resp. respectivement,</p> <p>Re Z partie réelle de Z,</p> <p>δ distribution de Dirac,</p> <p>i. e. c'est-à-dire.</p>
---	--

INTRODUCTION

A bien des égards et avant tout du point de vue du physicien, dans lequel nous nous placerons systématiquement, il peut être intéressant de séparer la notion de *signal*, en tant que concept abstrait, de celle de ses *représentations* qui en constituent l'image accessible à l'expérience ; cela est vrai qu'il s'agisse de représentations dans l'espace-temps (correspondant à l'aspect communément assigné à un signal) ou encore de représentations en fréquence (qui touchent à son analyse harmonique).

Cette attitude résulte d'un postulat de superposition linéaire entre signaux — que l'on admettra comme raisonnable — complété par l'introduction d'un signal nul et d'un signal opposé : le signal abstrait apparaît alors comme un élément $|X \rangle$ d'un espace \mathcal{E} vectoriel qu'il n'y a pas d'inconvénient à définir sur le corps des complexes.

Les représentations apparaissent par suite comme des formes linéaires résultant du choix particulier d'une base et il semble que l'on puisse gagner beaucoup en envisageant d'étudier dans l'espace signal, donc indépendamment de toute base de représentation, les transformations portant sur les signaux, auxquelles on fera jouer le rôle d'opérateurs.

C'est dans cet esprit que nous nous proposons de mettre en relief les particularités de la dualité entre représentations ; nous mettrons l'accent sur la parenté intime qui relie signaux déterministes et signaux aléatoires, en essayant de dégager l'aspect logique que peut prendre alors le problème d'analyse

* Centre d'Étude des Phénomènes Aléatoires (CEPHAG) (associé au C. N. R. S.), 46, avenue Félix-Viallet, 38 — Grenoble.

harmonique. Une telle étude, dès le départ, ne peut pas prétendre apporter des résultats nouveaux, mais se donne pour but d'unifier dans la mesure du possible des doctrines apparemment disjointes, ce qui est l'un des soucis majeurs du physicien.

L'emploi du formalisme de Dirac de la mécanique quantique auquel les physiciens sont accoutumés de longue date, semble apporter le langage le plus commode pour aborder simplement un tel point de vue. Il a été introduit par W. H. Huggins et son école [1, 2] qui ont su apporter la preuve de son grand intérêt dans l'étude du signal et ont, les premiers, songé à séparer les caractéristiques intrinsèques d'un signal de celles de ses représentations. Nous nous bornerons, pour commencer, à résumer dans les paragraphes 1 et 2 le formalisme adopté, dans la mesure où notre démarche logique différera de celle des auteurs précités et nous renvoyons pour plus de détails à l'article fondamental de D. C. Lai [2], ainsi qu'aux ouvrages spécialisés de la mécanique quantique [3, 4]. Nous ferons appel également à l'outil puissant que constituent les distributions de Laurent Schwartz, un de leurs mérites principaux étant de s'accorder parfaitement avec l'intuition physique tout en simplifiant bien des problèmes de représentation des signaux. Enfin, d'une part parce que le cadre de cette étude est forcément limité, d'autre part parce qu'une telle attitude est considérée comme traditionnelle en physique, nous n'insisterons pas sur les problèmes de rigueur, si difficiles, relatifs aux conditions d'existence des grandeurs que nous aurons à envisager.

L'auteur se plaît à exprimer sa gratitude envers le professeur A. Blanc-Lapierre (Sorbonne), ainsi qu'au professeur A. Naylor (University of Michigan) pour les fructueuses discussions dont ils l'ont fait bénéficier. Il remercie également les professeurs W. H. Huggins (John Hopkins University) et D. C. Lai (University of Vermont) de l'échange de correspondance qu'ils lui ont permis d'établir sur le sujet traité.

I. ESPACE \mathcal{E}_1 DES SIGNAUX NORMÉS.

L'intérêt fondamental de la notion d'énergie pousse tout d'abord à envisager pour \mathcal{E} un espace vectoriel muni d'une norme, à laquelle sera liée directement l'énergie du signal. Des raisons topologiques rendent également nécessaire la considération d'un espace complet. En nous appuyant sur le formalisme de la mécanique quantique, notre première démarche consiste donc à considérer un espace de Hilbert \mathcal{E}_1 formé par les signaux $|X\rangle$ dotés d'une énergie finie. Dans l'écriture de Dirac [3] le « ket » $|X\rangle$ est un vecteur contravariant.

On introduit en outre des vecteurs covariants, les « bra » $\langle Y|$ de la manière suivante : soit \mathcal{E}_1^* l'espace dual des formes linéaires continues

$Y\{|X\rangle\}$ auxquelles l'isomorphisme canonique permet de faire correspondre un élément $|Y\rangle \in \mathcal{E}_1$ dont le produit scalaire avec $|X\rangle$ ait la même valeur $Y\{|X\rangle\}$ [5]. Les formes, éléments du dual, sont les bra $\langle Y|$ et le produit scalaire entre $|X\rangle$ et $|Y\rangle$ s'écrit « bracket » :

$$\langle Y|X\rangle = Y\{|X\rangle\}.$$

Ce dernier est, suivant la convention habituelle en mécanique quantique, une forme continue linéaire en $|X\rangle$ et semilinéaire en $|Y\rangle$ et l'on a les relations d'hermiticité :

$$\langle Y|X\rangle = \langle X|Y\rangle^*.$$

L'énergie du signal $|X\rangle$ se confond alors simplement avec le carré de la norme et s'écrit

$$\langle X|X\rangle = \| |X\rangle \|^2.$$

On a par ailleurs toutes les notions de distance, inégalité de Schwartz, etc... propres à un espace de Hilbert.

II. REPRÉSENTATION-TEMPS.

Le signal — ou vecteur — $|X\rangle \in \mathcal{E}_1$ est susceptible de donner lieu à plusieurs « représentations » suivant la base adoptée, et la première qu'il convient de considérer est celle relative à notre univers espace-temps : c'est en fait la représentation qui nous est accessible par l'expérimentation directe. Par lui-même, un point d'univers $M(x^1, x^2, x^3, t)$ représente un signal élémentaire et l'on peut songer à utiliser l'ensemble des vecteurs $|M\rangle$ pour former une base de la « représentation d'Univers », le produit scalaire $\langle M|X\rangle$ étant la fonction de point associée à un signal quelconque $|X\rangle \in \mathcal{E}_1$.

Limitons-nous pour simplifier aux signaux monodimensionnels, ceux qui évoluent par exemple suivant le temps t . La base de la « représentation-temps » est formée par les signaux élémentaires $|t\rangle$ repérés par l'indice continu t et la représentation-temps d'un signal $|X\rangle$ est par hypothèse la fonction

$$(1) \bullet \quad X(t) = \langle t|X\rangle,$$

avec $\langle X|t\rangle = X^*(t)$.

Faisons une première remarque, importante : l'ensemble des $|t\rangle$ constitue manifestement un espace vectoriel, ce qui assure, comme cela est nécessaire, la conservation des propriétés de superposition linéaire des signaux dans leur représentation ; autrement dit à $\lambda|X_1\rangle + \mu|X_2\rangle$ correspond la représentation-temps

$$\lambda \langle t|X_1\rangle + \mu \langle t|X_2\rangle = \lambda X_1(t) + \mu X_2(t).$$

Deux autres conditions de cohérence impliquent les nécessités suivantes :

a) il est nécessaire que le produit scalaire entre vecteurs signaux de \mathcal{E}_1 ait la même valeur que le

• Ce signe typographique indique les formules encadrées sur le manuscrit.

produit scalaire entre représentations, ce dernier défini conventionnellement par la forme continue $\langle X_1, X_2 \rangle$ linéaire en X_2 et semilinéaire en X_1 :

$$(2) \quad \langle X_1, X_2 \rangle = \int_{R^1} X_1^*(t) X_2(t) dt.$$

Donc, d'après (1), il faut que

$$\langle X_1 | X_2 \rangle \equiv \langle X_1, X_2 \rangle = \int_{R^1} \langle X_1 | t \rangle \langle t | X_2 \rangle dt,$$

ce qui implique la neutralité de l'opérateur symbolique

$$(3) \quad \bullet \quad \int_{R^1} |t\rangle dt \langle t| = 1,$$

qui apparaît comme étant un *projecteur*.

C'est la « relation de fermeture » qui montre que la base $|t\rangle$ est complète (ou topologiquement génératrice). Par suite, pour tout $|X\rangle \in \mathcal{E}_1$ nous avons, avec une distance nulle, la décomposition (*analyse temporelle*)

$$|X\rangle = \int_{R^1} |t\rangle dt \langle t | X \rangle = \int_{R^1} X(t) |t\rangle dt, \text{ m. q.,}$$

et l'opérateur

$$(3a) \quad P_T = \int_{-T}^{+T} |t\rangle dt \langle t|,$$

prend la signification d'un projecteur dans le sous-espace des représentations-temps à support borné par $[-T, +T]$ (signaux à durée limitée). D'autre part, à des signaux de \mathcal{E}_1 normables correspondent, comme on le voit immédiatement, des représentations sous forme de fonctions de L^2 ;

b) la seconde nécessité est que, compte tenu de (3), nous ayons

$$X(t) = \langle t | X \rangle = \int_{R^1} \langle t | t' \rangle dt' \langle t' | X \rangle = \langle \langle t' | t \rangle, X(t') \rangle,$$

ce qui montre que $\langle t | t' \rangle$, qui représente le signal élémentaire $|t'\rangle$, est la distribution de Dirac

$$(4) \quad \bullet \quad \langle t | t' \rangle = \delta_{t'} = \delta(t - t').$$

La base $|t\rangle$ de la représentation-temps est donc une *base continue orthonormée* au sens habituel de la mécanique quantique.

Il apparaît ici une grave difficulté : les signaux $|t\rangle$ utilisés pour former la base de représentation des signaux $|X\rangle$ de l'espace de Hilbert \mathcal{E}_1 ne sont pas normalisables ($\langle t | t \rangle$ n'a aucun sens) et par suite n'appartiennent pas à cet espace. Pour lever un tel paradoxe, il s'avère donc nécessaire d'introduire un espace-signal plus vaste que l'espace de Hilbert. Une autre raison de prolonger cet espace réside dans l'étude des caractéristiques des signaux rencontrés en physique, que nous allons esquisser ; ce prolongement fera l'objet du paragraphe 4.

III. SIGNAUX EXPÉRIMENTAUX ET MODÈLES MATHÉMATIQUES.

Il convient de préciser maintenant si les propriétés adoptées pour les fonctions de représentation s'adaptent bien aux caractères des signaux tels qu'on a à les considérer.

III.1. Caractère des signaux expérimentaux.

Tout d'abord, l'observation expérimentale de la représentation-temps $\langle t | X \rangle = X(t)$ d'un signal (ou signal-temps) montre que

- $X(t)$ est à valeurs réelles sur R^1 ,
- $X(t)$ est bornée et à support borné.

Donc, $X(t)$ est sommable et de carré sommable, ce qui est en conformité avec le paragraphe précédent. La quantité $X^2(t)$ a presque toujours une signification énergétique et on l'appelle volontiers « *puissance instantanée* » du signal. Par ailleurs, l'intégrale sur R^1 de $X^2(t)$ porte le nom d'« *énergie* » et elle est bien égale, d'après ce qui précède, à l'énergie du signal $|X\rangle$ définie à partir du carré de la norme dans \mathcal{E}_1 . Enfin, du fait que

$$\|X_1 + X_2\|^2 = \|X_1\|^2 + \|X_2\|^2 + 2\langle X_1, X_2 \rangle,$$

le produit scalaire prend le sens d'une *énergie d'interaction*. Donc l'espace de Hilbert, même limité à un espace réel, est parfaitement suffisant pour rendre compte des signaux *expérimentaux*.

III.2. Modèles mathématiques.

Bien souvent, une étude théorique fait appel à des *modèles idéalisés* qui ne respectent pas les contraintes expérimentales : ainsi des sinus, des constantes sur tout R^1 , des impulsions non bornées, etc.... Nous avons vu aussi que les vecteurs de base adoptés pour la représentation-temps sont des distributions de Dirac et non des fonctions ; donc $\langle t_0 | t_0 \rangle$ n'a pas de sens, alors que δ_{t_0} correspond bien à l'un de ces signaux idéalisés.

C'est pourquoi il est nécessaire d'élargir le cadre précédent en étendant les représentations-temps $X(t)$ au-delà des fonctions de L^2 possédant une norme. Il semble bien pour ce faire que l'on puisse définir des modèles s'étendant à toutes les représentations possibles des signaux de la physique en adoptant, dans un esprit pragmatique, les hypothèses ci-après :

- on peut tout d'abord « ignorer » que $X(t)$ est réelle, ce qui permet entre autres d'utiliser la notion particulièrement féconde de signal analytique ;
- si $X(t)$ est une *fonction*, celle-ci sera bornée sur $(-\infty, +\infty)$: elle est donc localement sommable mais peut avoir une énergie infinie. Dans ce cas, il demeure cependant tout à fait nécessaire de conserver des concepts énergétiques et l'exemple précité du sinus, celui des réalisations de fonctions aléatoires stationnaires, etc. nous conduisent à adopter l'hypothèse qu'il s'agira toujours de fonc-



tions possédant une *puissance moyenne finie*. Il s'agit donc d'éléments de l'espace fonctionnel \mathcal{W}_2 de Besicovitch, formé par les fonctions non normalisables qui sont mesurables. Cette puissance moyenne est définie ainsi :

$$\overline{W} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\Pi_T X * X^\#)_{(0)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |X(t)|^2 dt,$$

où * symbolise le produit de convolution
où $\Pi_T(t)$ est la projectrice (ou porte)

$$(5) \quad \Pi_T(t) \begin{cases} = 1 & t \in [-T, +T], \\ = 0 & \text{si non,} \end{cases}$$

(qui représente donc le spectre des valeurs propres de l'opérateur projecteur sur $[-T, +T]$) et où l'involution $X \rightarrow X^\#$ définit ce que nous appellerons la « *fonction adjointe* ».

$$(6) \quad X^\#(t) = X^*(-t).$$

D'après N. Wiener, \overline{W} a une valeur unique indépendante de toute translation sur la projectrice et la *valeur moyenne* (ou composante continue) de $X(t)$

$$\langle X \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\Pi_T * X)_{(0)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X(t) dt,$$

est toujours finie pour la famille \mathcal{W}_2 de fonctions envisagée. Bien entendu, une fonction $X(t)$ de L^2 , d'énergie finie, appartient à \mathcal{W}_2 mais sa puissance moyenne et sa valeur moyenne sont alors nulles. Les fonctions de \mathcal{W}_2 à puissance moyenne finie font partie de l'ensemble des fonctions localement sommables à croissance lente et possèdent à ce titre une transformée de Fourier qui est une distribution tempérée [7]. Or, toujours d'après N. Wiener,

toute fonction X de \mathcal{W}_2 est telle que $\frac{X(t)}{\sqrt{1+t^2}} \in L^2$

et sa distribution transformée de Fourier est la dérivée première d'une fonction, elle-même de \mathcal{W}_2 ;

c) il reste à compléter la famille des modèles utilisés en introduisant les distributions de Dirac dont on connaît l'abondante utilisation qui en est faite en théorie des signaux.

IV. L'ESPACE-SIGNAL \mathcal{E} .

Des réflexions du paragraphe précédent ressort raisonnablement la possibilité d'englober l'ensemble des signaux réels ou idéalisés de la physique en considérant des signaux $|X\rangle$ qui sont représentés dans la base temps, non seulement par des fonctions de L^2 (cas des signaux du Hilbert \mathcal{E}_1), mais par des fonctions de l'espace de Besicovitch \mathcal{W}_2 ou encore des mesures de Dirac, ou une superposition des trois : toutes sont donc des *distributions tempérées* particulières (plus précisément dérivées premières de fonctions à croissance lente, à variations bornées et à détermination unique en chaque point de \mathbf{R}) et c'est cet aspect qui va nous permettre de définir l'espace-signal abstrait le mieux adapté. Il semble par ailleurs qu'il ne soit vraiment pas nécessaire

d'aller plus loin dans la voie de la complication, si nous nous limitons aux seuls besoins de la physique. Pour bâtir l'espace-signal dans le cadre des distributions tempérées, il nous faut alors nous appuyer au préalable sur un sous-espace particulier, celui des signaux fondamentaux.

IV.1. Espace \mathcal{E}_0 des signaux fondamentaux.

Nous dénommerons « *signal fondamental* » un signal abstrait $|\Phi\rangle$ dont la représentation-temps est une fonction $\Phi(t)$ indéfiniment dérivable et à décroissance rapide $\lim_{|t| \rightarrow \infty} |t^n \Phi(t)| = 0, \forall n$ positif). Ainsi l'espace \mathcal{E}_0 des signaux fondamentaux apparaît-il comme un sous-espace du Hilbert \mathcal{E}_1 ; de leur côté, les représentations $\Phi(t)$ appartiennent à l'espace fonctionnel \mathcal{S} de L. Schwartz [7].

Un signal fondamental est considéré comme associé de manière biunivoque à sa représentation.

IV.2. Espace-signal \mathcal{E} .

Cet espace vectoriel sur le corps des complexes est constitué, outre des signaux fondamentaux, de tous les éléments abstraits $|X\rangle$ soumis aux trois hypothèses suivantes :

1° un signal abstrait $|X\rangle$ est déterminé lorsque, pour tout signal fondamental $|\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}$, le produit scalaire $\langle X|\Phi\rangle$, forme linéaire continue dans \mathcal{E}_0 , est donné ;

2° la représentation-temps $X(t)$ de tout élément $|X\rangle \in \mathcal{E}$ est telle que l'on ait l'identité

$$(7) \quad \langle \Phi|X\rangle = \langle \Phi(t), X(t)\rangle, \quad \forall |\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0 = \mathcal{E},$$

entre le produit scalaire dans \mathcal{E}_0 et la forme linéaire $\langle \Phi, X \rangle$ sur la représentation-temps $\Phi(t)$ du signal fondamental $|\Phi\rangle$, forme continue par rapport à la topologie dans \mathcal{S} . Les représentations-temps des signaux de \mathcal{E} définissent donc des *distributions tempérées* ;

3° la base de représentation-temps est formée d'un ensemble non dénombrable d'éléments particuliers $|t\rangle$ de \mathcal{E} tels que

$$(1a) \quad \langle t|\Phi\rangle \equiv \Phi(t).$$

Il en résulte les conséquences ci-après :

a) Étant donné deux signaux fondamentaux quelconques, un raisonnement similaire à celui des paragraphes IIa et IIb indique des conditions de cohérence pour que l'hypothèse (7) soit respectée, qui sont :

— l'opérateur identité se décompose (symboliquement) suivant la relation de fermeture (3),

— la représentation- t d'un vecteur de base $|t_0\rangle$ est, cf (4), la mesure de Dirac $\langle t|t_0\rangle = \delta_{t_0}$.

Dans un autre langage, la base $\{|t\rangle\}$ se comporte comme une base continue orthonormée et complète.

b) De plus, l'application de la relation de fermeture (3) à l'identité (7) pour un signal quelconque $|X\rangle$ de \mathcal{E} implique que la représentation- t de ce dernier se confonde avec la quantité

$$(1) \quad X(t) = \langle t|X\rangle.$$



c) L'espace des représentations-temps est, dans son ensemble, l'espace \mathcal{S}^* des distributions tempérées de L. Schwartz. Il inclut comme sous-espaces particuliers celui \mathcal{W}_2 de Besicovitch aussi bien que L^2 et, bien entendu l'espace \mathcal{S} lui-même.

IV.3. Remarque 1.

L'espace \mathcal{E}_0 a été associé à l'espace \mathcal{S} des fonctions ∞ — dérivables à décroissance rapide de façon à considérer des représentations de signaux qui soient des distributions tempérées, donc fondamentalement des distributions possédant une *transformée de Fourier*. On pourrait éventuellement faire appel à une classe plus large de signaux fondamentaux, associés à des fonctions continues et à décroissance rapide, mais non nécessairement dérivables : on aurait ainsi à traiter des représentations prenant la forme de distributions d'ordre zéro, ce qui semble bien s'accorder encore avec l'inventaire du paragraphe III ; mais cette extension de la notion de signaux fondamentaux obligerait à renoncer à l'existence *a priori* des transformées de Fourier et par suite, comme nous le verrons, à la notion de représentation-fréquence. Nous ne ferons donc appel à cette possibilité de prolongement que dans un cas particulier, celui des signaux filtrés, lorsqu'il sera certain pour d'autres raisons que la transformée de Fourier de la représentation-temps existe (paragraphe VIII).

IV.4. Remarque 2.

Nous ferons dans ce qui suit un usage fréquent de *relations de fermeture* du type (3). Il importe alors de bien préciser que l'écriture intégrale qui les traduit dans l'esprit traditionnel de la mécanique quantique va s'avérer impropre, en particulier lorsqu'elle traitera des distributions. Il convient donc de la considérer par convention comme une *écriture purement symbolique* reliée en réalité à une forme linéaire. C'est dans cet esprit que nous décrirons l'*analyse temporelle* d'un signal $|X\rangle \in \mathcal{E}$ par :

$$|X\rangle = \int_{\mathcal{R}} |t\rangle dt \langle t|X\rangle = \int_{\mathcal{R}} X(t) dt|t\rangle.$$

V. REPRÉSENTATION-TEMPS DES OPÉRATEURS LINÉAIRES.

Un tel opérateur, \mathbf{A} , est une application linéaire et continue de l'espace signal \mathcal{E} dans lui-même, transformation que l'on écrit

$$\mathbf{A}|X\rangle = |Y\rangle \in \mathcal{E}$$

On peut lui associer une application simultanée dans l'espace dual \mathcal{E}^* .

$$\langle X|\mathbf{A}^\dagger = \langle Y| \in \mathcal{E}^*,$$

ce qui définit l'*opérateur adjoint* \mathbf{A}^\dagger . Le fait que \mathbf{A} soit linéaire et l'emploi de la relation de fermeture (3)

permettent d'écrire la représentation- t de la transformée sous la forme (symbolique) :

$$(8) \quad Y(t) = \langle t|Y\rangle = \langle t|\mathbf{A}|X\rangle = \int_{\mathcal{R}'} \langle t|\mathbf{A}|t'\rangle \langle t'|X\rangle dt'.$$

Ainsi l'opérateur linéaire agit sur la représentation- t d'un signal par l'intermédiaire d'une grandeur dépendant de deux paramètres continus t et t' : son « *élément de matrice* » (continue)

$$A(t, t') = \langle t|\mathbf{A}|t'\rangle,$$

et c'est cette quantité qui tient lieu de représentation- t de l'opérateur \mathbf{A} . Pour l'opérateur adjoint, nous avons $\langle t|\mathbf{A}^\dagger|t'\rangle = \langle t'|\mathbf{A}|t\rangle^*$, d'où l'élément de matrice

$$A^*(t', t) = \langle t|\mathbf{A}^\dagger|t'\rangle.$$

Étant donné qu'un vecteur de base $|t'\rangle$ est représenté par $\langle t|t'\rangle = \delta(t - t')$, alors l'élément de matrice $\langle t|\mathbf{A}|t'\rangle = A(t, t')$ apparaît comme la représentation à la date t de l'action de \mathbf{A} sur une percussion-unité située à la date t' : $A(t, t')$ est une *fonction de Green* ou « *réponse percussionnelle* ».

On pourrait ainsi symboliser l'action de l'opérateur linéaire sur la représentation- t du signal par la relation de transformation :

$$(9a) \quad Y(t) = \mathbf{A}[X(t)] = \int_{\mathcal{R}'} A(t, t') X(t') dt'.$$

Dans la terminologie technique on parle, pour l'opérateur représenté par le noyau intégral $A(t, t')$, d'un *filtre linéaire à paramètres variables*.

Cependant $X(t)$ est dans le cas le plus général une distribution tempérée ; il est possible également que $A(t, t')$ soit une distribution dans l'espace produit tensoriel $t \otimes t'$. Dans ces conditions la relation (9a) s'avérera tout à fait impropre ; pour exprimer correctement la représentation- t de la transformée $|Y\rangle = \mathbf{A}|X\rangle$, il est alors nécessaire de passer par l'intermédiaire de son produit scalaire $\langle \Phi|Y\rangle$ avec un *signal fondamental* $|\Phi\rangle$ du sous-espace \mathcal{E}_0 .

Introduisons pour ce faire la transformée $|\Psi\rangle = \mathbf{A}^\dagger|\Phi\rangle$ de ce dernier signal par l'opérateur adjoint \mathbf{A}^\dagger : ce qui s'écrit également

$$\begin{aligned} \langle \Psi| &= \langle \Phi|\mathbf{A}, \\ \Rightarrow \langle \Phi|Y\rangle &= \langle \Phi|\mathbf{A}|X\rangle = \langle \Psi|X\rangle. \end{aligned}$$

Il en résulte l'identité entre produits scalaires portant sur les représentations-temps

$$\langle \Phi, Y\rangle \equiv \langle \Psi, X\rangle.$$

Or, la relation de fermeture (3) conduit à :

$$\Psi^*(t') = \langle \Psi|t'\rangle = \langle \Phi|\mathbf{A}|t'\rangle \equiv \langle \Phi(t), A(t, t')\rangle$$

et cette expression a un sens en tant que forme linéaire portant sur la représentation

$$\Phi(t) = \langle t|\Phi\rangle,$$

laquelle, par hypothèse, est une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide. En portant



dans l'identité précédente et en utilisant la règle de Fubini pour une forme dans l'espace produit tensoriel, nous obtenons ainsi :

$$(9b) \quad \langle \Phi, Y \rangle = \langle \langle \Phi(t), A(t, t') \rangle, X(t') \rangle = \langle \langle \Phi(t), A(t, t') \otimes X(t') \rangle, \forall \Phi \in \mathcal{S}.$$

Ce qui montre que la représentation- t de la transformée $Y(t)$ est, dans le cadre le plus général, un produit tensoriel contracté entre représentations- t de l'opérateur linéaire et du signal.

Comme cas particuliers d'opérateurs linéaires, nous évoquerons successivement : translation, réflexion et filtres linéaires stationnaires.

V.1. Opérateur de translation-temps.

Par extension de la relation (3) on considère l'opérateur

$$T_\tau = \int_{\mathbb{R}^1} |t + \tau \rangle dt \langle t|, \text{ pour } \tau \in \mathbb{R}^1.$$

a) On voit immédiatement que $T_0 = 1$ et que $T_\tau^\dagger = T_{-\tau}$.

D'autre part, la relation de fermeture et la propriété (4) donnent

$$T_\tau T_\theta = \int_{\mathbb{R}^1} |t + \tau \rangle dt \langle t| \int_{\mathbb{R}^1} |t' + \theta \rangle dt' \langle t'| = \int_{\mathbb{R}^1} |t + \tau \rangle \langle t' | \delta(t - t' - \theta) dt dt',$$

soit

$$T_\tau T_\theta = T_{\tau + \theta},$$

ce qui est la propriété d'une « représentation unitaire » au sens de [5]. En prenant $\theta = -\tau$, on a $T_\tau^{-1} = T_{-\tau} = T_\tau^\dagger$: il s'agit donc d'un opérateur régulier et unitaire, qui conserve ainsi produit scalaire et norme.

b) L'action de T_τ sur un vecteur de base est

$$(10a) \quad T_\tau |t \rangle = \int_{\mathbb{R}^1} |t' + \tau \rangle dt' \langle t'|t \rangle = |t + \tau \rangle.$$

C'est une translation de puissance τ . On trouve de même

$$(10b) \quad \langle t|T_\tau = \langle t - \tau|.$$

L'élément de matrice de représentation- t est alors

$$\langle t|T_\tau|t' \rangle = \langle t|t' + \tau \rangle = \delta(t - t' - \tau),$$

et l'action sur un signal, en représentation- t , s'écrit, compte tenu de (10 b)

$$\langle t|T_\tau|X \rangle = \langle t - \tau|X \rangle,$$

ou encore

$$T_\tau [X(t)] = X(t - \tau).$$

c) Il est intéressant de rechercher les « signaux propres » $|\zeta \rangle$ de cet opérateur en considérant l'équation aux valeurs propres

$$T_\tau |\zeta \rangle = \lambda |\zeta \rangle,$$

laquelle se traduit pour les représentations- t , étant donné (10b), par

$$\langle t|T_\tau|\zeta \rangle \equiv \langle t - \tau|\zeta \rangle = \lambda \langle t|\zeta \rangle,$$

ce qui permet de définir la fonction propre

$$\langle t|\zeta \rangle = \zeta(t)$$

par la relation

$$\zeta(t - \tau) = \lambda \zeta(t).$$

Dérivant par rapport à t et divisant membre à membre, on obtient donc la condition :

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(t - \tau) = \frac{\zeta'}{\zeta}(t) = s, \quad \forall \tau.$$

où s est une constante complexe indépendante de τ , servant à repérer par cet indice continu les solutions propres, qui sont ainsi des exponentielles du temps

$$(11) \quad \langle t|\zeta_s \rangle = \zeta_s(t) = e^{st}.$$

On tire par identification la valeur propre $\lambda = e^{-s\tau}$ qui appartient donc à un ensemble continu :

$$T_\tau |\zeta_s \rangle = e^{-s\tau} |\zeta_s \rangle, \quad s \in \mathbb{C}.$$

V.2. Opérateur de réflexion.

Par définition et toujours par extension de (3) :

$$R_\tau = \int_{\mathbb{R}^1} |\tau - t \rangle dt \langle t|,$$

d'où immédiatement $R_\tau^2 = 1$ ou $R_\tau^{-1} = R_\tau$; c'est un opérateur régulier dont les valeurs propres valent ainsi ± 1 .

On voit facilement que R_τ est à la fois unitaire et hermitique et il suffit d'ailleurs de considérer R_0 car

$$T_\tau R_0 = \int_{\mathbb{R}^1} |t + \tau \rangle dt \langle t| = \int_{\mathbb{R}^1} |t - t' \rangle dt' \langle t'| = \int_{\mathbb{R}^1} |\tau - t' \rangle dt' \langle t'| = R_\tau.$$

L'action de R_0 sur un vecteur de base est une réflexion autour de l'origine

$$R_0 |t \rangle = |-t \rangle.$$

L'élément de matrice est

$$\langle t|R_0|t' \rangle = \langle t|-t' \rangle = \delta(t + t'),$$

et l'action sur un signal se traduit en représentation- t par

$$\langle t|R_0|X \rangle = \langle -t|X \rangle,$$

ou

$$R_0 [X(t)] = X(-t).$$

Les fonctions propres pour les valeurs propres $+1$ et -1 sont donc respectivement les fonctions paires et impaires.

On peut encore étudier dans cet esprit l'opérateur d'échantillonnage introduit par D. C. Lai [2] qui fait passer de la base continue $|t \rangle$ à une base discrète $|t_k \rangle$. D'autre part, l'opérateur de projection défini en (3a) sera étudié au paragraphe IX.3.



V.3. Filtrés linéaires.

Nous désignons sous ce terme les opérateurs linéaires \mathbf{F} *invariants par translation dans le temps*, qui commutent donc avec tous les opérateurs \mathbf{T}_τ (opérateurs stationnaires) :

$$[\mathbf{F}, \mathbf{T}_\tau] = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{F}\mathbf{T}_\tau = \mathbf{T}_\tau \mathbf{F}, \quad \forall \tau.$$

Par suite, un filtre linéaire a les mêmes vecteurs propres $|\zeta_s\rangle$ que l'opérateur de translation et les fonctions propres associées sont les exponentielles complexes e^{st} ; il en est de même pour l'opérateur adjoint, le « filtre adjoint » \mathbf{F}^\dagger .

a) Les propriétés de commutation conduisent à une structure particulière de l'élément de matrice de \mathbf{F} ; nous avons par hypothèse :

$$\langle t|\mathbf{F}\mathbf{T}_\tau|\theta\rangle = \langle t|\mathbf{T}_\tau\mathbf{F}|\theta\rangle,$$

soit, d'après (10a) et (10b),

$$\langle t|\mathbf{F}|\theta + \tau\rangle = \langle t - \tau|\mathbf{F}|\theta\rangle, \quad \forall \tau,$$

et cet élément de matrice ne dépend que de la différence $t - \theta$; nous l'écrivons

$$(12a) \quad \bullet \quad \langle t|\mathbf{F}|\theta\rangle \equiv \langle t - \theta|\mathbf{F}|0\rangle = H(t - \theta),$$

ce qui donne à $H(t) = \langle t|\mathbf{F}|0\rangle$ la signification d'une *réponse percussionnelle*. représentation à la date t de l'action du filtre \mathbf{F} sur une percussion-unité située à la date origine, $\delta(t) = \langle t|0\rangle$.

La réponse percussionnelle du filtre adjoint \mathbf{F}^\dagger est alors

$$(12b) \quad \langle t|\mathbf{F}^\dagger|0\rangle \equiv \langle 0|\mathbf{F}|t\rangle^* = H^*(-t) = H^\#(t),$$

ce que traduit l'appellation de « fonction adjointe » que nous avons adoptée pour l'involution $H \rightarrow H^\#$.

Soit $|Y\rangle = \mathbf{F}|X\rangle$ le signal transformé et $Y(t)$ sa représentation- t . Si $H(t - t')$ est substituée à $A(t, t')$ dans la relation générale (9b) de transformation des représentations, nous obtenons

$$\langle \Phi, Y \rangle = \langle \langle \Phi(t), H(t - t') \otimes X(t') \rangle \rangle \equiv \langle \langle \Phi(t + t'), H(t) \otimes X(t') \rangle \rangle,$$

ce qui donne, conformément à la définition d'un produit de convolution entre distributions [7] :

$$(13) \quad \langle \Phi, Y \rangle = \langle \Phi, H * X \rangle, \quad \forall \Phi \in \mathcal{S}, \\ \Rightarrow Y(t) = \mathbf{F}[X(t)] = (H * X)_{(t)}.$$

Nous retrouvons la célèbre « *formule de Vaschy* » décrivant en représentation-temps les relations entrée-sortie d'un filtre linéaire. Mais la relation (13) généralise la formule de Vaschy pour le cas le plus général où, simultanément, signal-temps $X(t)$ et réponse percussionnelle $H(t)$ sont des *distributions tempérées* (dans la mesure où le produit de convolution entre ces distributions a un sens, cf [7] et paragraphe VI.2.2).

VI. REPRÉSENTATION-FRÉQUENCE.

Le fait que les signaux $|\zeta_s\rangle$ du paragraphe V.1. soient signaux propres d'un opérateur filtre linéaire, incite à rechercher une décomposition (au moins formelle), d'un signal arbitraire $|X\rangle$ en une somme de ces signaux propres, de façon à simplifier l'expression des relations entrée-sortie dans un filtrage linéaire. Il apparaît alors préférable de constituer avec ces $|\zeta_s\rangle$ une base orthogonale, ce que nous obtiendrons en choisissant le nombre s *imaginaire pur*, soit $s = 2\pi i\nu$: la relation (11) montre que les fonctions propres deviennent alors $e^{2\pi i\nu t}$ et sont bien orthogonales.

Pour alléger l'écriture, repérons simplement les vecteurs propres de \mathbf{F} par cet indice ν *réel et continu*, ce qui conduit à

$$|\nu\rangle \equiv |\zeta_{2\pi i\nu}\rangle,$$

et pour les fonctions propres, étant donné (11), à

$$(14) \quad \bullet \quad \langle t|\nu\rangle = e^{2\pi i\nu t} \Rightarrow \langle \nu|t\rangle = e^{-2\pi i\nu t}.$$

La base continue des $|\nu\rangle$, qui va nous permettre d'obtenir une nouvelle représentation du signal, sera nommée *représentation-fréquence* (ou représentation- ν).

La quantité $\langle t|\nu\rangle$ peut aussi s'interpréter comme l'élément de matrice décrivant le passage de la base $\{|t\rangle\}$ à la nouvelle base $\{|\nu\rangle\}$. D'après (14), cette transformation est *unitaire*, et il en résulte que produit scalaire et éventuellement norme sont, comme il est nécessaire du point de vue physique, des *invariants de représentation*.

Les relations (14) jointes à la relation de fermeture (3) conduisent, dans cette écriture symbolique, à

$$\langle \nu|\nu'\rangle = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-2\pi i(\nu - \nu')t} dt,$$

autrement dit :

$$(15) \quad \bullet \quad \langle \nu|\nu'\rangle = \delta(\nu - \nu'),$$

ce qui montre que la base $\{|\nu\rangle\}$ de représentation-fréquence est une base continue orthonormée. Utilisons d'autre part la propriété (4) de la base $\{|t\rangle\}$ conjointement avec (14) ; ce qui donne

$$\langle t|t'\rangle = \delta(t - t') \equiv \int_{\mathbb{R}^1} e^{2\pi i\nu(t - t')} d\nu = \int_{\mathbb{R}^1} \langle t|\nu\rangle d\nu \langle \nu|t'\rangle,$$

d'où résulte, en identifiant les deux membres extrêmes, la relation de fermeture

$$(16) \quad \int_{\mathbb{R}^1} |\nu\rangle d\nu \langle \nu| = 1.$$

La base de représentation- ν est donc *complète*.

VI.1. Représentation ν du signal.

Considérons pour commencer la classe des *signaux fondamentaux*, les $|\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0$, dont la représentation- t $\Phi(t) = \langle t|\Phi\rangle$ est une fonction à décrois-



sance rapide (espace fonctionnel \mathcal{S}). Comme on le sait, $\Phi(t)$ possède une transformée de Fourier, elle-même fonction de \mathcal{S} .

Par définition, la représentation- ν du signal $|\Phi\rangle$ sera la forme linéaire, ou produit scalaire, $\langle \nu | \Phi \rangle = \varphi(\nu)$, que la relation de fermeture (3) et l'expression (14) permettent d'écrire :

$$\varphi(\nu) = \langle \nu | \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^1} \langle \nu | t \rangle dt \langle t | \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^1} e^{-2\pi i \nu t} \Phi(t) dt.$$

Ceci montre que la représentation- ν du signal $|\Phi\rangle$ est la transformée de Fourier (au sens strict) de sa représentation- t

$$\langle \nu | \Phi \rangle \rightleftharpoons \langle t | \Phi \rangle, \text{ ou } \varphi(\nu) \rightleftharpoons \Phi(t).$$

S'agissant maintenant d'un signal $|X\rangle$ quelconque dans \mathcal{E} , représenté par une distribution tempérée $X(t)$, nous allons utiliser le résultat précédent en considérant le produit scalaire $\langle \Phi | X \rangle$. D'une part, l'identité qui associe produit scalaire entre vecteurs et produit scalaire entre représentations- t donne

$$\langle \Phi | X \rangle = \langle \Phi, X \rangle.$$

D'autre part, la relation de fermeture (16) fournit

$$\langle \Phi | X \rangle = \int_{\mathbb{R}^1} \langle \Phi | \nu \rangle d\nu \langle \nu | X \rangle = \langle \varphi, x \rangle,$$

où $x(\nu)$ est l'écriture de la représentation- ν du signal $|X\rangle$,

$$(17) \bullet \quad x(\nu) = \langle \nu | X \rangle,$$

(par convention, nous adopterons pour la représentation- t d'un signal la même lettre *majuscule* que celle qui apparaît dans le « ket » et, pour sa représentation- ν , la lettre *minuscule* correspondante). En identifiant les deux expressions du produit scalaire, nous obtenons

$$(18) \quad \langle \Phi | X \rangle = \langle \Phi, X \rangle = \langle \varphi, x \rangle, \quad \forall |\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0.$$

L'identité entre les formes

$$\langle \Phi, X \rangle = \langle \varphi, X \rangle,$$

est alors celle de Parseval, puisque $\varphi \rightleftharpoons \Phi$. On sait [7] que c'est cette dernière qui sert de définition à la transformation de Fourier entre distributions : par suite $X(t)$ et $x(\nu)$ sont des distributions images de Fourier :

$$\bullet \quad x(\nu) \rightleftharpoons X(t),$$

relation pour laquelle il peut s'avérer utile de conserver l'écriture *impropre* d'une « analyse harmonique »

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{2\pi i \nu t} x(\nu) d\nu.$$

Ce qui, étant donnée (16) et (17), correspond formellement à l'analyse fréquentielle du signal :

$$|X\rangle = \int_{\mathbb{R}^1} x(\nu) d\nu |\nu\rangle.$$

Ainsi, dans un cadre général, un signal $|X\rangle$ possède deux représentations fondamentales, distributions tempérées, et l'on a :

a) $X(t) = \langle t | X \rangle$, sa représentation- t ou *signal temps*,

b) $x(\nu) = \langle \nu | X \rangle$, sa représentation- ν ou *signal fréquence*,

c) $x(\nu) \rightleftharpoons X(t)$: les deux représentations sont transformées de Fourier,

d) le produit scalaire entre deux vecteurs signaux a la même valeur que le produit scalaire entre leurs représentations, que celles-ci soient en temps ou en fréquence (ceci résulte d'une extension immédiate de (18)).

VI.2. Représentation- ν des opérateurs et des filtres linéaires.

La relation qui, pour l'opérateur linéaire \mathbf{A} , correspond en représentation- ν à la relation (8) est

$$(19) \quad y(\nu) = \langle \nu | Y \rangle = \langle \nu | \mathbf{A} | X \rangle = \int_{\mathbb{R}^1} \langle \nu | \mathbf{A} | \nu' \rangle \langle \nu' | X \rangle d\nu'.$$

Elle permet d'introduire l'élément de matrice de sa représentation- ν , soit

$$a(\nu, \nu') = \langle \nu | \mathbf{A} | \nu' \rangle.$$

Ce qui conduit à la relation suivante entre représentations- ν , laquelle correspond à (9b) dans l'espace tensoriel $\nu \otimes \nu'$:

$$(20) \quad \langle \Phi | Y \rangle = \ll \varphi(\nu), a(\nu, \nu') \otimes x(\nu') \gg.$$

VI.2.1. Pour établir la liaison entre les éléments de matrice $\langle t | \mathbf{A} | t' \rangle$ et $\langle \nu | \mathbf{A} | \nu' \rangle$, utilisons deux signaux fondamentaux $|\Phi\rangle$ et $|\Psi\rangle$ choisis arbitrairement dans \mathcal{E}_0 et formons $\langle \Phi | \mathbf{A} | \Psi \rangle$. Cette quantité, considérée comme le produit scalaire de $\mathbf{A} | \Psi \rangle$ par $|\Phi\rangle$, s'identifie aux produits scalaires associés dans chaque représentation. Ainsi, d'après (9b) et puisque $\Psi(t')$ est une fonction de \mathcal{S} :

$$\langle \Phi | \mathbf{A} | \Psi \rangle = \ll \Phi(t), A(t, t') \Psi(t') \gg = \ll \Phi(t) \Psi^*(t'), A(t, t') \gg,$$

avec une relation similaire en représentation- ν . D'où il résulte

$$\langle \Phi | \mathbf{A} | \Psi \rangle = \ll \Phi(t) \Psi^*(t'), A(t, t') \gg = \ll \varphi(\nu) \psi^*(\nu'), a(\nu, \nu') \gg.$$

Or, nous avons les relations de transformation de Fourier

$$\varphi(\nu) \rightleftharpoons \Phi(t) \text{ et } \psi^*(\nu') \rightleftharpoons \Psi^\#(t') = \Psi^*(-t').$$

Ce qui précède montre donc que l'élément de matrice $a(\nu, \nu')$ en représentation- ν est la transformée de Fourier bidimensionnelle de l'élément de matrice $A(t, -t')$ en représentation- t . Dans une écriture impropre, nous exprimons cette liaison par

$$a(\nu, \nu') = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i(\nu t - \nu' t')} A(t, t') dt dt',$$



ce que nous aurions pu obtenir directement en usant de la relation de fermeture (3) et de (14) pour passer de $\langle v|A|v' \rangle$ à $\langle t|A|t' \rangle$.

VI.2.2. Le cas le plus intéressant est celui des *filtres linéaires*. En effet, étant donné que les vecteurs de base $|v \rangle$ sont les vecteurs propres de F , cf. paragraphes V.3 et VI, nous avons

$$(21) \bullet \quad F|v \rangle = h(v)|v \rangle, \quad \text{ainsi que}$$

$$\bullet \quad \langle v|F = h(v) \langle v|.$$

a) Nous en déduisons immédiatement l'expression de la représentation- v de la transformée $|Y \rangle = F|X \rangle$ en fonction de la *valeur propre* $h(v)$:

$$y(v) = \langle v|F|X \rangle = h(v) \langle v|X \rangle,$$

$$(22) \quad \Rightarrow y(v) = F[x(v)] = h(v) x(v).$$

La valeur propre $h(v)$ s'identifie ainsi au *gain complexe* du filtre. Cette expression (22) n'a de sens que si l'une au moins des quantités du second membre est une fonction. Ainsi, si l'on désire garder la possibilité de traiter des signaux dont la représentation- v est une distribution tempérée, il convient que le gain complexe $h(v)$ soit une fonction de croissance lente : cette caractéristique est celle des « *filtres stables* ».

b) En prenant pour signal $|X \rangle$ un signal de base $|v' \rangle$, nous obtenons, compte tenu de (15), l'expression de l'élément de matrice

$$(12b) \bullet \quad \langle v|F|v' \rangle = h(v) \delta(v - v'),$$

ce qui montre que *la matrice de représentation- v d'un filtre linéaire est diagonale*.

c) La transformée $|Y \rangle = F|\Phi \rangle$ de tout signal $|\Phi \rangle \in \mathcal{E}_0$ est, par la définition-même du filtre F , un élément de l'espace signal \mathcal{E} . En tant que telle et conformément à l'étude du paragraphe VI.1. précédent, ses représentations $y(v)$ et $Y(t)$ forment une paire de Fourier. La comparaison entre (13) et (22) donne alors la relation (qui a un sens même si h ou H sont des distributions)

$$h(v) \varphi(v) \stackrel{\sim}{\approx} (H * \Phi)_{(v)}, \quad \forall |\Phi \rangle \in \mathcal{E}_0.$$

Comme les représentations $\varphi(v)$ et $\Phi(t)$ forment également une paire de Fourier, cette dernière expression est une relation de Plancherel ; elle démontre que *le gain complexe* (ou *valeur propre*) $h(v)$ est la transformée de Fourier de la réponse percussionnelle (ou élément de matrice- t) $H(t)$, ceci au sens large des distributions :

$$h(v) \stackrel{\sim}{\approx} H(t)$$

d) En vertu de ce qui précède, le *filtre adjoint* F^\dagger a pour gain complexe $h^*(v) \stackrel{\sim}{\approx} H^\#(t)$ et l'on a bien $F^\dagger|v \rangle = h^*(v)|v \rangle$.

e) Suivant leur définition même, deux filtres F_1 et F_2 commutent ensemble. La composition $F_1 F_2 = F_2 F_1$ est équivalente à un filtre unique F dont la valeur propre (gain complexe) vaut

$$h(v) = h_1(v) h_2(v),$$

(qui n'a de sens que si l'un au moins des filtres est un filtre stable). La réponse percussionnelle de $F = F_1 F_2$ est donc $H(t) = (H_1 * H_2)_{(t)}$.

VI.2.3. Pour l'opérateur de translation (qui est un filtre linéaire particulier) le gain complexe est $e^{-2\pi i v \tau} \stackrel{\sim}{\approx} \delta(t - \tau)$ et l'élément de matrice- v est

$$\langle v|T_\tau|v' \rangle = e^{-2\pi i v \tau} \delta(v - v').$$

Pour l'opérateur de réflexion, on obtient l'élément de matrice par transformation de Fourier bidimensionnelle de $\langle t|R_0|t' \rangle = \delta(t + t')$ ce qui donne

$$\langle v|R_0|v' \rangle = \delta(v + v').$$

Donc R_0 effectue également une réflexion des signaux-fréquence autour de l'origine :

$$\langle v|R_0|X \rangle = x(-v).$$

VII. SIGNAUX ALÉATOIRES ET OPÉRATEURS DE COVARIANCE.

Il semble naturel de conserver le point de vue précédent qui consiste à considérer un signal abstrait $|X \rangle$, cette fois-ci aléatoire, et des formes linéaires pour ses représentations : ce qui est valable pour chaque réalisation particulière — donc déterministe — de $|X \rangle$ s'étendant alors à la distribution statistique de l'ensemble des réalisations possibles. On rejoint ainsi la méthode proposée par Édith Mourier [8] dans sa théorie des éléments aléatoires d'un espace de Banach et son extension par I. M. Gelfand [9] aux processus-distributions.

Nous dirons que le *processus aléatoire* $|X \rangle$, dont les réalisations particulières sont des éléments de \mathcal{E} , est connu lorsqu'est donnée la loi de la *variable aléatoire* constituée par le produit scalaire

$$\langle \Phi|X \rangle,$$

où $|\Phi \rangle$ est un « signal fondamental » *déterministe* de l'espace \mathcal{E}_0 , i.e. un signal dont les représentations (t ou v) sont des fonctions de \mathcal{S} (∞ — dérivables à décroissance rapide). Ce produit scalaire est une forme linéaire que nous astreindrons par hypothèse à être *continue*. Cette définition d'un processus aléatoire met en évidence la possibilité de se dégager de la loi temporelle, et en fait de toute représentation, pour concentrer l'aspect stochastique, en tant que caractère intrinsèque, sur le vecteur $|X \rangle$ lui-même.

Cependant, si nous nous limitons, comme ce sera souvent le cas dans ce qui suit, au cadre des signaux aléatoires stationnaires dans le temps, il est bien évident que nous faisons appel implicitement à une intervention indirecte de la loi temporelle.

VII.1. Représentation- t des signaux aléatoires stationnaires. Covariance et signal moyen.

Nous continuons d'adopter pour les représentations- t une écriture du type $\varphi(t) = \langle t|\Phi \rangle$ ou $X(t) = \langle t|X \rangle$ et nous considérons $X(t)$ comme une fonction aléatoire généralisée (distribution tempérée).



Donnons deux définitions de la stationnarité, la seconde étant suffisante si l'on se limite à une statistique d'ordre deux.

Définition 1. Un processus aléatoire $|X\rangle$ est dit « *stationnaire au sens strict* » si la fonction de répartition de $\langle \Phi|X\rangle$ est la même que celle de $\langle \Phi|\mathbf{T}_\tau|X\rangle$, quelle que soit la puissance τ de l'opérateur de translation \mathbf{T}_τ et indépendamment du choix de $|\Phi\rangle$ dans \mathcal{E}_0 .

Définition 2. $|X\rangle$ est dit « *stationnaire de second ordre* » si, pour le moins, les deux premiers moments de $\langle \Phi|X\rangle$ ont les mêmes valeurs que ceux de $\langle \Phi|\mathbf{T}_\tau|X\rangle$, quel que soit τ et indépendamment du choix de $|\Phi\rangle$.

a) Statistique du premier ordre.

Définissons le « *signal moyen* » $|M\rangle$, muni de l'écriture formelle

$$(23) \quad |M\rangle = E\{|X\rangle\},$$

par le fait que, quel que soit $|\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0$, il y ait identité entre $\langle \Phi|M\rangle$ et l'espérance mathématique de $\langle \Phi|X\rangle$:

$$(24) \quad \langle \Phi|M\rangle = E\{\langle \Phi|X\rangle\},$$

ou encore

$$\langle \Phi|E\{|X\rangle\} = E\{\langle \Phi|X\rangle\}.$$

Cette définition respecte l'obligation de faire appel à l'intermédiaire du produit scalaire $\langle \Phi|X\rangle$ dont la loi est connue *a priori* et permet donc d'atteindre son espérance mathématique. Il ne faut voir en effet dans l'écriture $E\{|X\rangle\}$ qu'une *forme purement symbolique*, étant donné que nous ne savons pas définir une fonction de répartition pour le vecteur $|X\rangle$; cependant il nous sera donné de constater que la quantité $|M\rangle$ joue en pratique un rôle équivalent à celui d'une espérance mathématique.

Adoptons en outre pour la représentation-temps du signal moyen l'écriture, également symbolique :

$$E\{X(t)\} \equiv M(t) = \langle t|M\rangle,$$

ce qui revient à introduire la convention

$$\langle t|E\{|X\rangle\} \equiv E\{\langle t|X\rangle\}.$$

Le postulat (7), paragraphe IV.2, d'identité entre produits scalaires vectoriels et produits scalaires de représentations donne alors l'expression de (24) en représentation- t :

$$\langle \Phi, E\{X\}\rangle = E\{\langle \Phi, X\rangle\}, \quad \forall \Phi \in \mathcal{S}.$$

— Dans le cas où $|X\rangle$ est un *processus stationnaire*, nous devons avoir

$$E\{\langle \Phi|X\rangle\} \equiv E\{\langle \Phi|\mathbf{T}_\tau|X\rangle\},$$

soit, d'après (24) :

$$\begin{aligned} \langle \Phi|M\rangle &\equiv \langle \Phi|\mathbf{T}_\tau|M\rangle, \quad \forall \tau \in \mathbf{R}, \\ \Rightarrow |M\rangle &\equiv \mathbf{T}_\tau|M\rangle, \end{aligned}$$

ou encore

$$\langle \Phi(t), M(t)\rangle = \langle \Phi(t), M(t-\tau)\rangle, \quad \forall \tau \text{ et } \forall \Phi \in \mathcal{S}.$$

Il en résulte que $M(t)$ se comporte alors comme une mesure de Lebesgue, ce qu'on écrira

$$(25) \quad E\{X(t)\} = \mu \text{ (constante).}$$

— Nous dirons enfin qu'un processus aléatoire est *centré* si $|M\rangle$ est le *signal nul* :

$$\langle \Phi|M\rangle = 0, \quad \forall |\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0 \Rightarrow M(t) = 0, \quad \forall t.$$

b) Statistique de second ordre.

Cette statistique nous conduit à faire appel au moment d'ordre deux du produit scalaire $\langle \Phi|X\rangle$. Pour y parvenir, nous introduisons un opérateur linéaire $\mathbf{\Gamma}_X$, que nous nommerons *opérateur de covariance propre*, en le définissant par la propriété suivante, portant sur l'espérance mathématique de la forme quadratique positive $|\langle \Phi|X\rangle|^2$:

$$(26) \quad \langle \Phi|\mathbf{\Gamma}_X|\Phi\rangle = E\{|\langle \Phi|X\rangle|^2\}, \quad \forall |\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0.$$

Ceci nous conduit à adopter pour cet opérateur le graphisme symbolique

$$\mathbf{\Gamma}_X = E\{|X\rangle\langle X|\},$$

en convenant, pour satisfaire (26), que

$$\begin{aligned} \langle \Phi|E\{|X\rangle\langle X|\}|\Phi\rangle &= E\{\langle \Phi|X\rangle\langle X|\Phi\rangle\}, \\ \forall |\Phi\rangle &\in \mathcal{E}_0, \end{aligned}$$

et en appliquant la propriété d'hermiticité

$$\langle X|\Phi\rangle = \langle \Phi|X\rangle^*.$$

D'évidence, $\mathbf{\Gamma}_X$ est un *opérateur hermitique*; d'autre part, le second membre de (26) rejoint, en représentation- t , la « *forme corrélative* » de I. M. Gelfand [9]. Adoptons en outre pour l'élément de matrice $\langle t|\mathbf{\Gamma}_X|t'\rangle$ en représentation- t de cet opérateur, l'écriture suivante, également symbolique :

$$(27a) \quad \langle t|\mathbf{\Gamma}_X|t'\rangle = E\{X(t) \otimes X^*(t')\}.$$

Nous nommerons cet élément de matrice la *covariance propre* de $|X\rangle$: il s'agit d'une distribution certaine dans l'espace produit tensoriel $t \otimes t'$. Notons que l'écriture (27a) équivaut à la convention

$$\langle t|E\{|X\rangle\langle X|\}|t'\rangle \equiv E\{\langle t|X\rangle\langle X|t'\rangle\}.$$

— Si maintenant $|X\rangle$ est un *processus stationnaire*, nous avons

$$E\{|\langle \Phi|X\rangle|^2\} = E\{|\langle \Phi|\mathbf{T}_\tau|X\rangle|^2\}, \quad \forall \tau \in \mathbf{R},$$

ce qui équivaut, d'après la relation de définition (26), à

$$\langle \Phi|\mathbf{\Gamma}_X|\Phi\rangle \equiv \langle \Phi|\mathbf{T}_\tau\mathbf{\Gamma}_X\mathbf{T}_\tau^\dagger|\Phi\rangle,$$

d'où $\mathbf{\Gamma}_X \equiv \mathbf{T}_\tau\mathbf{\Gamma}_X\mathbf{T}_\tau^\dagger$ et enfin, puisque \mathbf{T}_τ est un opérateur unitaire (cf paragraphe V.1) :

$$\mathbf{\Gamma}_X\mathbf{T}_\tau = \mathbf{T}_\tau\mathbf{\Gamma}_X, \quad \forall \tau \in \mathbf{R}.$$

Ainsi, pour un processus aléatoire stationnaire, $\mathbf{\Gamma}_X$ commute avec tout opérateur de translation ;



donc l'opérateur stationnaire de covariance propre possède toutes les propriétés des filtres linéaires (cf paragraphe V.3 et VI.2) avec lesquels il commute également. Cette similitude entre \mathbf{F} et $\mathbf{\Gamma}_X$ résulte dans les deux cas de l'aspect stationnaire de ces opérateurs.

Nous tirerons d'un tel comportement de $\mathbf{\Gamma}_X$ d'importantes conséquences ; en premier lieu, l'élément de matrice $\langle t|\mathbf{\Gamma}_X|t' \rangle$ ne dépend plus que de la différence $\tau = t - t'$. Nous avons déjà nommé ce dernier « covariance propre » et, étant donné (27a), nous le représentons par l'écriture symbolique :

$$(27b) \quad \mathbf{\Gamma}_X(\tau) = \langle t|\mathbf{\Gamma}_X|t - \tau \rangle = E \{ X(t) \otimes X^*(t - \tau) \}.$$

Cette quantité joue ainsi un rôle similaire à celui d'une réponse percussionnelle.

— Usons maintenant dans (26) du postulat d'identité entre produits scalaires vectoriel et fonctionnel, ce qui donne dans l'écriture (27a)

$$\langle\langle \Phi(t) \Phi^*(t'), E \{ X(t) \otimes X^*(t') \} \rangle\rangle = E \{ \langle\langle \Phi(t) \Phi^*(t'), X(t) \otimes X^*(t') \rangle\rangle \}.$$

D'où, pour le cas stationnaire où intervient l'écriture (27b)

$$E \{ |\langle \Phi|X \rangle|^2 \} = \langle\langle \Phi(t) \Phi^*(t'), \mathbf{\Gamma}_X(t - t') \rangle\rangle.$$

En utilisant la relation de définition d'un produit de convolution [7], nous obtenons alors l'expression suivante du second moment dans le cas stationnaire (forme corrélative) :

$$(28) \quad E \{ |\langle \Phi|X \rangle|^2 \} = \langle \Phi * \Phi^\#, \mathbf{\Gamma}_X \rangle, \quad \forall \Phi \in \mathcal{S},$$

[avec $\Phi^\#(t) = \Phi^*(-t)$]. La covariance propre apparaît ainsi comme définie positive.

c) Statistique conjointe.

Cette étude de second ordre s'étend immédiatement à la statistique conjointe de deux processus aléatoires $|X \rangle$ et $|Y \rangle$. On utilise l'opérateur de covariance mutuelle dans l'écriture symbolique

$$\mathbf{\Gamma}_{XY} = E \{ |X \rangle \langle Y| \},$$

en le définissant par la propriété suivante, portant cette fois-ci sur un coefficient de corrélation, donc sur l'espérance mathématique d'une forme bilinéaire :

$$(29) \quad \langle \Phi|\mathbf{\Gamma}_{XY}|\Psi \rangle = E \{ \langle \Phi|X \rangle \langle \Psi|Y \rangle^* \},$$

$\forall |\Phi \rangle$ et $|\Psi \rangle \in \mathcal{E}_0$.

Nous notons que $\mathbf{\Gamma}_{YX} = \mathbf{\Gamma}_{XY}^\dagger$. On nomme alors covariance mutuelle de $|X \rangle$ et $|Y \rangle$ l'élément de matrice de $\mathbf{\Gamma}_{XY}$ en représentation- t , en affectant à ce dernier l'écriture symbolique

$$\langle t|\mathbf{\Gamma}_{XY}|t' \rangle = E \{ X(t) \otimes Y^*(t') \}.$$

— Il convient maintenant d'étendre la notion de stationnarité à la statistique conjointe de deux processus ; introduisons pour ce faire la définition suivante.

Définition 3 : Deux processus aléatoires $|X \rangle$

et $|Y \rangle$ sont dits **stationnairement corrélés** lorsque les moments des deux premiers ordres du couple $\{ \langle \Phi|X \rangle, \langle \Psi|Y \rangle \}$ ont les mêmes valeurs que ceux du couple $\{ \langle \Phi|\mathbf{\Gamma}_\tau|X \rangle, \langle \Psi|\mathbf{\Gamma}_\tau|Y \rangle \}$, ceci quel que soit τ et indépendamment du choix de $|\Phi \rangle$ et $|\Psi \rangle$ dans \mathcal{E}_0 .

Dans ces conditions, d'une part $|X \rangle$ et $|Y \rangle$ sont stationnaires de second ordre, d'autre part $[\mathbf{\Gamma}_{XY}, \mathbf{\Gamma}_\tau] = 0, \forall \tau$, et $\mathbf{\Gamma}_{XY}$ a les propriétés d'un filtre.

Par suite, pour deux processus stationnairement corrélés, l'élément de matrice de $\mathbf{\Gamma}_{XY}$ en représentation- t est invariant par translation : on affectera à cette covariance mutuelle stationnaire l'écriture formelle :

$$\mathbf{\Gamma}_{XY}(\tau) = E \{ X(t) \otimes Y^*(t - \tau) \}.$$

— Il est utile de remarquer que la propriété de définition (29) ainsi que l'écriture adoptée pour l'élément de matrice équivalent aux conventions

$$\langle \Phi|E \{ |X \rangle \langle Y| \} |\Psi \rangle \equiv E \{ \langle \Phi|X \rangle \langle Y|\Psi \rangle \},$$

$$\langle \Phi|E \{ |X \rangle \langle Y| \} |t' \rangle \equiv E \{ \langle \Phi|X \rangle \langle Y|t' \rangle \}.$$

Ceci, associé à la relation de fermeture des bases de représentation, présente l'avantage de rendre particulièrement aisée la manipulation de l'opérateur de covariance.

d) Cas particulier des fonctions aléatoires.

Il convient à ce stade de vérifier la compatibilité de notre nouveau formalisme avec le formalisme traditionnel des fonctions aléatoires tel qu'il a été bâti par A. Blanc-Lapierre et R. Fortet [10]. Pour ce faire, nous nous plaçons dans le cas particulier où la représentation- t , $X(t)$, du processus $|X \rangle$ est une fonction aléatoire de second ordre, au sens de [10], qu'il n'est pas nécessaire de supposer stationnaire. Il est alors possible d'utiliser une fonction de répartition relative à $X(t)$ pour bâtir a priori le premier moment $E \{ X(t) \}$ ainsi que la covariance

$$E \{ X(t) X^*(t') \};$$

ces deux quantités, définies ici comme des espérances mathématiques, ont donc un sens correspondant à leur écriture. Dans ces conditions, le produit scalaire $\langle \Phi|X \rangle = \langle \Phi, X \rangle$ est une forme linéaire de la fonction aléatoire $X(t)$, laquelle peut s'exprimer par une intégrale convergente en moyenne quadratique :

$$\langle \Phi, X \rangle = \int_{R^1} \Phi^*(t) X(t) dt, \quad \text{stoch. m.q.}$$

Cette convergence assurant la permutabilité de l'intégration et d'une espérance mathématique, nous trouvons

$$E \{ \langle \Phi, X \rangle \} = \int_{R^1} \Phi^*(t) E \{ X(t) \} dt =$$

$$\langle \Phi, E \{ X \} \rangle,$$

ce qui est l'expression en représentation- t de la



propriété (24) si $M(t)$ se confond avec l'espérance mathématique $E\{X(t)\}$: l'écriture symbolique de $M(t) = \langle t|M \rangle$ rejoint alors la réalité.

On retrouve de même à partir de la covariance de deux fonctions aléatoires $X(t)$ et $Y(t)$ l'expression en représentation- t de la propriété (29) — et par suite celle de (26) — si l'élément de matrice $\Gamma_{xy}(t, t') = \langle t|\Gamma_{xy}|t' \rangle$ s'identifie au moment $E\{X(t)Y^*(t')\}$, dénommé covariance mutuelle : ici également l'écriture symbolique adoptée pour $\Gamma_{xy}(t, t')$ rejoint la réalité, ce qui suffit à assurer la compatibilité des deux formalismes.

VII.2. Représentation- ν et analyse harmonique.

Comme précédemment au paragraphe VI.1, la représentation-fréquence du signal fondamental $|\Phi \rangle$ est exprimée par $\varphi(\nu) = \langle \nu|\Phi \rangle \in \mathcal{S}$, transformée de Fourier de $\langle t|\Phi \rangle$. Écrivons

$$x(\nu) = \langle \nu|X \rangle,$$

la représentation- ν du processus aléatoire $|X \rangle$; d'après ce que nous avons vu au paragraphe VI.1, chaque réalisation particulière de $x(\nu)$ est transformée de Fourier au sens des distributions de la réalisation correspondante du signal-temps $X(t) = \langle t|X \rangle$. Il convient maintenant d'étudier la statistique des deux premiers ordres de $x(\nu)$.

a) Statistique de premier ordre.

Utilisons pour la représentation-fréquence du signal moyen $|M \rangle$ l'écriture symbolique

$$E\{x(\nu)\} \equiv m(\nu) = \langle \nu|M \rangle,$$

ce qui équivaut à la convention

$$\langle \nu|E\{ |X \rangle \} = E\{ \langle \nu|X \rangle \}.$$

De ce fait, l'expression de (24) en représentation- ν , qui découle de la règle d'identité entre produits scalaires vectoriel et fonctionnel est :

$$E\{ \langle \varphi, x \rangle \} = \langle \varphi, E\{ x \} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

— Plaçons-nous dans le cas où $|X \rangle$ est stationnaire. Du fait que $m(\nu)$ et $M(t)$ sont transformées de Fourier (cf. § VI.1), on déduit de (25) que

$$(30) \quad E\{ x(\nu) \} = \mu \delta(\nu) \quad \text{avec} \quad \mu = E\{ X \}.$$

— Remarquons enfin que la transformation de Fourier qui relie les représentations

$$m(\nu) = E\{ x(\nu) \} \quad \text{et} \quad M(t) = E\{ X(t) \},$$

s'écrit symboliquement sous la forme

$$\mathcal{F}E\{ X \} = E\mathcal{F}\{ X \} \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{F}^{-1}E\{ x \} = E\mathcal{F}^{-1}\{ x \},$$

et cela, que le signal soit stationnaire ou non. Autrement dit, considérées toutes deux comme des symboles d'opérateurs agissant sur les représentations espérance mathématique et transformation de Fourier commutent.

b) Statistique conjointe de second ordre.

Soit $|X \rangle$ et $|Y \rangle$ deux processus aléatoires, de représentations- ν :

$$x(\nu) = \langle \nu|X \rangle \quad \text{et} \quad y(\nu) = \langle \nu|Y \rangle.$$

Adoptons pour l'élément de matrice en représentation- ν de leur opérateur de covariance mutuelle Γ_{XY} l'écriture symbolique

$$\langle \nu|\Gamma_{XY}|\nu' \rangle = E\{ x(\nu) \otimes y^*(\nu') \}.$$

Il s'agit d'une distribution certaine dans l'espace produit tensoriel $\nu \otimes \nu'$. Compte tenu du graphisme de Γ_{XY} , cette écriture de son élément de matrice revient à adopter la convention

$$\langle \nu|E\{ |X \rangle \langle Y| \} |\nu' \rangle \equiv E\{ \langle \nu|X \rangle \langle Y|\nu' \rangle \}.$$

La propriété de définition (29) prend ainsi en représentation- ν l'expression :

$$E\{ \langle \Phi|X \rangle \langle Y|\Psi \rangle \} = E\{ \langle \langle \varphi(\nu) \psi^*(\nu'), x(\nu) \otimes y^*(\nu') \rangle \rangle \} \\ \equiv \langle \langle \varphi(\nu) \psi^*(\nu'), E\{ x(\nu) \otimes y^*(\nu') \} \rangle \rangle.$$

Si l'on se rapporte alors à l'expression de la même quantité en représentation- t

$$E\{ \langle \Phi|X \rangle \langle Y|\Psi \rangle \} \equiv \langle \langle \Phi(t) \Psi^*(t') \rangle \rangle, \\ E\{ X(t) \otimes Y^*(t') \rangle \rangle,$$

on voit que la distribution $E\{ x(\nu) \otimes y^*(\nu') \}$ est la transformée de Fourier bidimensionnelle de $E\{ X(t) \otimes Y^*(t') \}$; ceci est entièrement conforme à la relation entre les éléments de matrice d'un opérateur « véritable » en représentations temps et fréquence (cf. § 6.2), ici $\langle t|\Gamma|t' \rangle$ et $\langle \nu|\Gamma|\nu' \rangle$. On peut donc oublier la nature symbolique de l'opérateur de covariance.

— La statistique en représentation- ν devient particulièrement intéressante lorsque $|X \rangle$ et $|Y \rangle$ sont stationnairement corrélés (§ VII.1c). Alors Γ_{XY} se comporte comme un filtre linéaire, ce qui signifie qu'il commute avec toute opération de translation. Partant, les vecteurs de base $|\nu \rangle$ de la représentation- ν sont vecteurs propres de Γ_{XY} :

$$(31a) \quad \bullet \quad \Gamma_{XY}|\nu \rangle = \gamma_{XY}(\nu)|\nu \rangle.$$

De plus, en nous reportant à l'étude générale des filtres effectuée au paragraphe 6, nous savons que la distribution valeur propre $\gamma_{XY}(\nu)$, laquelle joue le rôle d'un gain complexe, est transformée de Fourier de l'élément de matrice $\langle t|\Gamma_{XY}|t - \tau \rangle$, i.e. de la covariance mutuelle ; ce que nous exprimons par

$$(32a) \quad \gamma_{XY}(\nu) \rightleftharpoons \Gamma_{XY}(\tau).$$

Du fait que $\Gamma_{YX} = \Gamma_{XY}^\dagger$, cette valeur propre est hermitique par rapport à ses indices, soit $\gamma_{YX}(\nu) = \gamma_{XY}^*(\nu)$. Nous lui donnerons le nom de **distribution spectrale d'interaction**.

Enfin, l'élément de matrice $\langle \nu | \Gamma_{XY} | \nu' \rangle$ est *diagonal*, ce qui s'écrit

$$(33a) \quad E \{ x(\nu) \otimes y^*(\nu') \} = \gamma_{XY}(\nu) \delta(\nu - \nu').$$

Alors l'expression en représentation- ν de la propriété de définition (29) dégénère et se réduit à

$$E \{ \langle \Phi | X \rangle \langle Y | \Psi \rangle \} = \langle \phi \psi^*, \gamma_{XY} \rangle.$$

c) Statistique de second ordre d'un signal unique.

Ce cas se ramène au précédent en prenant $|Y\rangle \equiv |X\rangle$, et en utilisant l'opérateur de covariance propre Γ_X . Nous avons ainsi

$$E \{ x(\nu) \otimes x^*(\nu') \} = \langle \nu | \Gamma_X | \nu' \rangle,$$

et lorsque $|X\rangle$ est *stationnaire de second ordre*, Γ_X devient diagonal en représentation- ν , ce qui donne :

$$(31b) \quad \Gamma_X | \nu \rangle = \gamma_X(\nu) | \nu \rangle.$$

La distribution *valeur propre* $\gamma_X(\nu)$ est transformée de Fourier de la covariance propre

$$(32b) \quad \gamma_X(\nu) \rightleftharpoons \Gamma_X(\tau),$$

et sert à déterminer la « covariance en fréquence »

$$33b) \quad E \{ x(\nu) \otimes x^*(\nu') \} = \gamma_X(\nu) \delta(\nu - \nu').$$

Enfin, la forme quadratique $E \{ |\langle \Phi | X \rangle|^2 \}$ s'exprime dans les deux représentations temps et fréquence par

$$E \{ |\langle \Phi | X \rangle|^2 \} = \langle \Phi * \Phi^\#, \Gamma_X \rangle = \langle |\phi|^2, \gamma_X \rangle.$$

Du fait que Γ_X est *hermitique*, sa valeur propre $\gamma_X(\nu)$ est *réelle* ; mais il y a plus : la forme $\langle \Phi * \Phi^\#, \Gamma_X \rangle$ est définie positive pour tout $\Phi \in \mathcal{S}$ aussi bien que continue pour la topologie dans \mathcal{S} . Donc, selon le théorème de Bochner-Schwartz [7], la transformée de Fourier $\gamma_X(\nu)$ de $\Gamma_X(\tau)$ est la dérivée première d'une fonction réelle monotone $F(\nu)$: la valeur propre $\gamma_X(\nu)$ est une *distribution positive*.

Terminologie.

La fonction monotone $F(\nu)$ s'identifie à la *fonction de répartition spectrale* dans la terminologie de A. Blanc-Lapierre [10] ; ceci incite à dénommer sa dérivée, la valeur propre $\gamma_X(\nu)$, *distribution spectrale énergétique*. Il nous reste à mettre en évidence la signification physique de cette quantité et à constater qu'elle prolonge la notion de « densité spectrale énergétique ». Ainsi la relation (32b) de transformation de Fourier entre γ et Γ apparaîtra comme une *extension du théorème de Wiener-Khinchine*.

d) Analyse harmonique.

Nous avons vu que les représentations temps et fréquence d'un même signal sont liées par une transformation de Fourier, propriété qui demeure valable pour un processus aléatoire. Cette liaison, portant sur des distributions, ne peut être traduite que par

une égalité de Parseval entre formes linéaires : $\langle \Phi, X \rangle = \langle \phi, x \rangle$. Si nous l'exprimons cependant dans une écriture intégrale, ce qui est incorrect mais peut être admis à titre symbolique, cette liaison entre représentations prend la forme

$$(34a) \quad X(t) = \int_{R^1} e^{2\pi i \nu t} x(\nu) d\nu \quad (\text{écriture impropre}).$$

Elle évoque alors une idée d'*analyse harmonique* de la fonction aléatoire — généralisée — $X(t)$. Cette présentation, qui fait entrer dans un cadre unique les processus aléatoires aussi bien que déterministes, est certes très discutabile du point de vue mathématique, mais elle offre par sa simplification et son dépouillement un avantage, nous pensons certain, pour le physicien. Nous nous attacherons d'ailleurs au paragraphe VIII à en déterminer la signification physique concrète en étudiant la répartition de la puissance moyenne de $X(t)$ sur l'axe des fréquences et le sens profond de l'écriture (34a).

— Plaçons-nous maintenant dans le cas où la représentation- t $X(t) = \langle t | X \rangle$ du processus $|X\rangle$ est une *fonction aléatoire de second ordre*. Si sa covariance est soumise à certaines conditions précisées dans [10], son analyse harmonique est réalisable ; elle fait appel à une intégrale de Stieltjes sous la forme

$$(34b) \quad X(t) = \int_{R^1} e^{2\pi i \nu t} d\xi(\nu), \quad \text{stoch. m.q.},$$

où $\xi(\nu)$ est une fonction, également aléatoire. Ainsi, si l'on compare (34a) et (34b), la représentation-fréquence $x(\nu) = \langle \nu | X \rangle$ apparaît dans ce cas comme la distribution dérivée première de la fonction aléatoire $\xi(\nu)$.

Si, de plus, $X(t)$ est *stationnaire*, sa covariance propre se décompose en

$$\Gamma_X(\tau) = \int_{R^1} e^{2\pi i \nu \tau} dF(\nu),$$

où $F(\nu)$ est la « fonction de répartition spectrale », fonction certaine monotone et à accroissements bornés. Or, nous avons vu que la transformée de Fourier de la covariance $\Gamma_X(\tau)$ est la valeur propre $\gamma_X(\nu)$ et que cette dernière est dérivée première d'une fonction monotone : la relation précédente est en accord avec ce fait si l'on identifie cette primitive à $F(\nu)$, la fonction de répartition spectrale.

On montre également [10] que les accroissements de $\xi(\nu)$ possèdent dans le cas stationnaire les propriétés statistiques suivantes :

$$E \{ d\xi(\nu) \} = 0,$$

sauf éventuellement pour $\nu = 0$,

$$E \{ d\xi(\nu) d\xi^*(\nu') \} \begin{cases} = dF(\nu) & \text{pour } \nu = \nu', \\ = 0 & \text{pour } \nu \neq \nu', \end{cases}$$

ce qui est en accord avec les relations générales (30) et (33b), si nous tenons compte de ce que, ici :

$$x(\nu) = \frac{d}{d\nu} \xi(\nu) \quad \text{et} \quad \gamma(\nu) = \frac{d}{d\nu} F(\nu),$$



La concordance entre les deux formalismes se trouve ainsi assurée

VII.3. Résumé.

Nous pouvons conclure de l'étude précédente qu'il est possible et même fructueux de considérer un *processus aléatoire* comme un être abstrait $|X\rangle$ pourvu des deux représentations $X(t)$ et $x(v)$ formant une paire de Fourier. Ce processus se définit par la loi de l'ensemble des variables aléatoires $\langle \Phi | X \rangle$ construites sur les éléments déterministes $|\Phi\rangle$ du sous-espace abstrait \mathcal{E}_0 , les « signaux fondamentaux ».

La statistique d'ordre deux fait appel à deux grandeurs symboliques.

a) *Au premier ordre*, le vecteur « signal moyen » $|M\rangle = E\{|X\rangle\}$. Son comportement et celui de ses représentations s'obtiennent facilement si l'on admet, à titre formel, la convention d'écriture

$$\langle S | E\{|X\rangle\} \equiv E\{\langle S | X \rangle\},$$

pour tout élément $|S\rangle \in \mathcal{E}$ déterministe, y compris les signaux de base des représentations temps ou fréquence.

b) *Au second ordre*, l'opérateur de covariance $\Gamma_{XY} = E\{|X\rangle\langle Y|\}$.

L'étude de ses propriétés et de celles de ses représentations conduit aux mêmes résultats qu'une écriture directe basée sur la convention

$$\langle S | E\{|X\rangle\langle Y|\} |T\rangle \equiv E\{\langle S | X \rangle\langle Y | T \rangle\},$$

pour tout $|S\rangle$ et $|T\rangle \in \mathcal{E}$, y compris les vecteurs de base $|t\rangle$ et $|v\rangle$. Cette étude conjointe admet comme cas particulier celui où $|Y\rangle \equiv |X\rangle$.

c) *La stationnarité* correspond à l'identité des propriétés de $|X\rangle$ et de $\mathbf{T}_\tau |X\rangle$, soit au sens strict, soit limitée aux deux premiers ordres. Alors $E\{|X\rangle\}$ correspond à un signal-temps constant et Γ_{XY} se comporte comme un filtre linéaire, i.e. est diagonal en représentation- v , avec une valeur propre transformée de Fourier de l'élément de matrice- t . Les résultats principaux sont groupés dans le tableau I.

VIII. FILTRAGE LINÉAIRE D'UN PROCESSUS ALÉATOIRE ET LOCALISATION DE LA PUISSANCE MOYENNE.

A. Blanc-Lapierre a eu le mérite de respecter la rigueur mathématique, tout en conservant un sens physique précieux, dans sa théorie de l'analyse harmonique basée sur le filtrage des fonctions aléatoires et en particulier sur l'utilisation de la « formule des interférences » [10]. Il serait regrettable qu'une présentation nouvelle de ce problème abandonnât ce souci fondamental d'un support physique et nous allons nous attacher à le retrouver en considérant le problème du filtrage linéaire des processus aléatoires abstraits, ainsi que ses implications dans la dualité des représentations temps et fréquence.

VIII.1. Relations statistiques de filtrage entre grandeurs abstraites.

Soit $|X\rangle$ le processus aléatoire, de signal moyen $|M^X\rangle$ et d'opérateur de covariance Γ^X , transformé dans un filtre linéaire \mathbf{F} :

$$|Y\rangle = \mathbf{F}|X\rangle.$$

Nous nous limiterons au cas des *filtres stables*, dont la valeur propre (gain complexe) est une fonction $h(v)$ continue presque partout, définie de manière unique en chaque point de \mathbf{R} , et tout au plus de croissance lente à l'infini ; de ce fait, la transformée $|Y\rangle$ existe toujours, (cf § VI.2.2.). La problème est alors de déterminer le signal moyen et l'opérateur de covariance associés à $|Y\rangle$.

VIII.1.1. Au premier ordre, si $|M^Y\rangle = E\{|Y\rangle\}$ décrit le signal moyen associé à la transformée, nous avons, en nous basant sur la définition (24)

$$\langle \Phi | M^Y \rangle = E\{\langle \Phi | Y \rangle\} = E\{\langle \Phi | \mathbf{F} | X \rangle\}, \quad \forall |\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0.$$

Faisons intervenir la transformée du « bra »

TABLEAU I

GRANDEURS ABSTRAITES	REPRÉSENTATIONS- t	REPRÉSENTATIONS- v
$ X\rangle$ $ M\rangle = E\{ X\rangle\}$ (signal moyen) $\Gamma_{XY} = E\{ X\rangle\langle Y \}$ (opérateur de covariance)	$X(t) = \langle t X \rangle \iff x(v) = \langle v X \rangle$ $E\{X(t)\} \iff E\{x(v)\}$ $E\{X(t) Y^*(t')\} \iff E\{x(v) y^*(v')\}$	
Cas stationnaire : $\mathbf{T}_\tau M\rangle \equiv M\rangle$ $\{\Gamma_{XY}, \mathbf{T}_\tau\} = 0$ $\Gamma_{XY v} = \gamma_{XY}(v) v\rangle$	$E\{X(t)\} = \mu \iff E\{x(v)\} = \mu \delta(v)$ $E\{X(t) Y^*(t-\tau)\} = \Gamma_{XY}(\tau) \iff E\{x(v) y^*(v')\} = \gamma_{XY}(v) \delta(v-v')$	

$\langle \Phi |$ dans \mathbf{F} , autrement dit, celle du « ket » $|\Phi\rangle$ dans le filtre \mathbf{F}^\dagger , soit

$$\mathbf{F}^\dagger |\Phi\rangle = |\Psi\rangle.$$

On peut alors appliquer à $|\Psi\rangle$ la définition (24), ce qui donne (*)

$$\begin{aligned} \langle \Phi | M^Y \rangle &= E \{ \langle \Psi | X \rangle \} \equiv \langle \Psi | M^X \rangle = \\ &= \langle \Phi | \mathbf{F} | M^X \rangle, \quad \forall |\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0. \end{aligned}$$

$$(35) \bullet \Rightarrow |M^Y\rangle = \mathbf{F} |M^X\rangle,$$

ou encore

$$\bullet \quad \mathbf{F} E \{ |X\rangle \} \equiv E \{ \mathbf{F} |X\rangle \}.$$

Nous nommerons cette relation « *formule de la moyenne* ».

VIII.1.2. Au second ordre, considérons deux processus aléatoires $|X_1\rangle$ et $|X_2\rangle$ soumis respectivement aux filtres \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 ; faisons également appel aux transformées dans les filtres adjoints aux précédents de deux signaux fondamentaux $|\Phi_1\rangle$ et $|\Phi_2\rangle \in \mathcal{E}_0$:

$$|Y_k\rangle = \mathbf{F}_k |X_k\rangle \text{ et } |\Psi_k\rangle = \mathbf{F}_k^\dagger |\Phi_k\rangle, \quad (k = 1 \text{ ou } 2).$$

Introduisons enfin les opérateurs de covariance mutuelle des processus « entrée » et « sortie »:

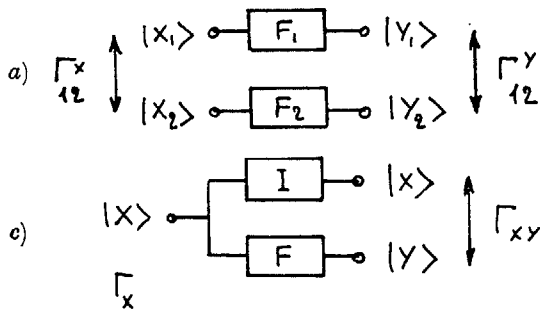
$$\mathbf{\Gamma}_{12}^X = E \{ |X_1\rangle \langle X_2| \} \text{ et } \mathbf{\Gamma}_{12}^Y = E \{ |Y_1\rangle \langle Y_2| \}.$$

En nous appuyant sur la définition (29), nous avons

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 | \mathbf{\Gamma}_{12}^Y | \Phi_2 \rangle &= E \{ \langle \Phi_1 | \mathbf{F}_1 | X_1 \rangle \langle X_2 | \mathbf{F}_2^\dagger | \Phi_2 \rangle \}, \\ &= E \{ \langle \Psi_1 | X_1 \rangle \langle X_2 | \Psi_2 \rangle \}. \end{aligned}$$

On peut faire jouer aux $|\Psi_k\rangle$ le rôle de signaux fondamentaux (voir remarque précédente) et appliquer à $\mathbf{\Gamma}_{12}^X$, en sens opposé, la relation (29); ce qui donne

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 | \mathbf{\Gamma}_{12}^Y | \Phi_2 \rangle &= \langle \Psi_1 | \mathbf{\Gamma}_{12}^X | \Psi_2 \rangle \equiv \\ &= \langle \Phi_1 | \mathbf{F}_1 \mathbf{\Gamma}_{12}^X \mathbf{F}_2^\dagger | \Phi_2 \rangle, \quad \forall |\Phi_1\rangle, |\Phi_2\rangle \in \mathcal{E}_0. \end{aligned}$$



a) cas général (36).

Fig. 1. — Cas d'application de la formule des interférences (abstraite).

b) Entrée commune (36a).

c) Covariance entrée-sortie (36b).

d) Covariance propre sortie (36c).

(*) En vertu de (22), à un signal fondamental $|\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0$ ayant pour représentation- ν une fonction à décroissance rapide de l'espace \mathcal{S} correspond, par transformation dans un filtre stable, un signal $|\Psi\rangle$ dont la représentation- ν est encore une fonction à décroissance rapide, définie de manière unique en chaque point de \mathbf{R} , mais éventuellement non dérivable à tous ordres. Or, l'analyse du paragraphe III indique que les représentations- ν des signaux de la physique ou de leurs modèles théoriques sont des distributions tempérées d'ordre zéro dont les particularités font que $\langle \Psi | X \rangle$ a un sens. Alors les transformées $|\Psi\rangle$ des signaux fondamentaux $|\Phi\rangle$ dans des filtres stables peuvent à leur tour jouer le rôle de signaux fondamentaux pour tous les processus aléatoires de la physique (cf. remarque 1 du § IV.3.).

D'où résulte l'expression de l'opérateur de covariance mutuelle des transformées de deux processus aléatoires dans deux filtres linéaires :

$$(36) \bullet \quad \mathbf{\Gamma}_{12}^Y = \mathbf{F}_1 \mathbf{\Gamma}_{12}^X \mathbf{F}_2^\dagger.$$

Cette relation fondamentale entre opérateurs généralise en l'étendant au domaine abstrait la *formule des interférences* de A. Blanc-Lapierre [10] établie entre représentations- t ; nous lui conserverons cette appellation. Insistons sur sa validité tout à fait générale qui, en particulier, n'implique en rien la stationnarité des processus (il en est d'ailleurs de même pour la formule (35) de la moyenne).

De plus, il importe de remarquer que la *formule de la moyenne* (35), ainsi que la *formule des interférences* (36) s'appliquent à la statistique entrée-sortie d'*opérateurs linéaires quelconques* (non stationnaires): il suffit d'y substituer l'opérateur \mathbf{A} au filtre \mathbf{F} (sous réserve que les éléments de matrice de \mathbf{A} assurent aux transformées $\mathbf{A}|\Phi\rangle$ des signaux fondamentaux l'existence de fonctions de représentation- ν à décroissance rapide, dérivables ou non). Les deux formules précitées correspondent alors aux propriétés :

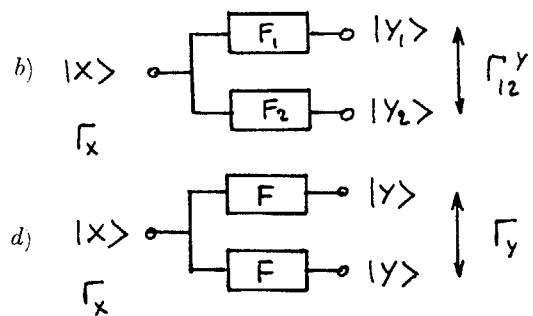
$$\mathbf{A} E \{ |X\rangle \} = E \{ \mathbf{A} |X\rangle \} \text{ et,}$$

$$\mathbf{A}_1 E \{ |X_1\rangle \langle X_2| \} \mathbf{A}_2 = E \{ \mathbf{A}_1 |X_1\rangle \langle X_2| \mathbf{A}_2 \}.$$

a) La *formule des interférences* (36) s'applique comme cas particulier lorsque les deux filtres \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 transforment le même processus aléatoire $|X\rangle$: l'on a alors, si $\mathbf{\Gamma}_X$ est l'opérateur de covariance propre de $|X\rangle$

$$(36a) \quad \mathbf{\Gamma}_{12}^Y = \mathbf{F}_1 \mathbf{\Gamma}_X \mathbf{F}_2^\dagger.$$

b) De plus, on peut atteindre l'opérateur de



covariance mutuelle entrée-sortie $\mathbf{\Gamma}_{XY}$ en prenant pour \mathbf{F} le filtre identité $\mathbf{1}$ (valeur propre $h(\nu) = 1, \forall \nu$). Alors

$$(36b) \quad \mathbf{\Gamma}_{XY} = \mathbf{\Gamma}_X \mathbf{F}^\dagger \text{ et } \mathbf{\Gamma}_{YX} = \mathbf{\Gamma}_{XY}^\dagger = \mathbf{F} \mathbf{\Gamma}_X.$$

c) Enfin, on détermine la covariance propre $\mathbf{\Gamma}_Y$ d'une sortie en prenant $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_2 = \mathbf{F}$, soit :

$$(36c) \quad \mathbf{\Gamma}_Y = \mathbf{F} \mathbf{\Gamma}_X \mathbf{F}^\dagger.$$

Ces conditions d'application sont rassemblées sur la figure 1.



VIII.2. Relations de filtrage entre représentations.

VIII.2.1. Au premier ordre, la formule de la moyenne (35) donne :

a) en représentation-fréquence, où F est diagonal, cf (21),

$$E \{ y(v) \} = \langle v | M^Y \rangle = h(v) \langle v | M^X \rangle.$$

Ainsi,

$$(37a) \quad E \{ y(v) \} = h(v) E \{ x(v) \},$$

soit

$$E \{ h(v) x(v) \} = h(v) E \{ x(v) \};$$

b) en représentation-temps, en appliquant à ce qui précède le théorème de Plancherel :

$$(37b) \quad E \{ Y(t) \} = (H * E \{ X \})_{(t)},$$

$$E \{ (H * X)_{(t)} \} = (H * E \{ X \})_{(t)}.$$

On obtient donc dans cette écriture symbolique de processus la même formulation que pour les fonctions aléatoires.

VIII.2.2. Au second ordre, la formule des interférences (36) conduit aux éléments de matrice de covariance :

— en représentation-fréquence, étant donné l'écriture symbolique de $\langle v | \Gamma | v' \rangle$ et l'équation aux valeurs propres (21), nous avons

$$(38) \quad E \{ y_1(v) \otimes y_2^*(v') \} = h_1(v) h_2^*(v') E \{ x(v) \otimes x^*(v') \};$$

— en représentation-temps, on obtiendra la covariance $E \{ Y(t) \otimes Y^*(t') \}$ par transformation de Fourier bidimensionnelle de la distribution précédente, cf paragraphe VI.2.

VIII.2.3. Processus stationnaires.

Nous avons vu à propos de la statistique de second ordre des processus stationnaires que

$$|M^X \rangle \equiv T_\tau |M^X \rangle \text{ et } \Gamma_{12}^X \equiv T_\tau \Gamma_{12}^X T_\tau^\dagger.$$

Sachant que l'opérateur de translation est un filtre linéaire particulier et que, pour deux processus stationnairement corrélés, le couple $\{ T_\tau |X_1 \rangle, T_\tau |X_2 \rangle \}$ a les mêmes propriétés statistiques que le couple $\{ |X_1 \rangle, |X_2 \rangle \}$, le fait précédent est parfaitement en accord avec la formule de la moyenne et la formule des interférences.

Tirons maintenant de la formule des interférences deux importantes propriétés.

a) Désignons par *filtres disjoints* deux filtres F_1 et F_2 tels que $F_1 F_2 = 0$ (donc de valeurs propres telles que $h_1(v) h_2(v) = 0, \forall v$). Sachant que, pour deux processus $|X_1 \rangle$ et $|X_2 \rangle$ stationnairement corrélés, l'opérateur de covariance Γ_{12} commute avec tout filtre, la formule des interférences (36) donne alors dans le cas de deux filtres disjoints

$$(39) \quad F_1 F_2 = 0 \Rightarrow \Gamma_{12}^Y = F_1 \Gamma_{12}^X F_2^\dagger = F_1 F_2^\dagger \Gamma_{12}^X = 0.$$

Donc les transformées de processus aléatoires stationnaires dans deux filtres quelconques *disjoints* sont non corrélées et par suite sans interaction.

b) Si $|X_1 \rangle$ et $|X_2 \rangle$ sont stationnairement corrélés, il résulte de la "définition 3" du paragraphe VII.1.c que tout opérateur de translation T_τ commute avec Γ_{12}^X , de même qu'il commute avec tout filtre F . En utilisant cette propriété dans la *formule des interférences* (36), nous voyons que $T_\tau \Gamma_{12}^Y = \Gamma_{12}^Y T_\tau, \forall \tau$. Par suite les transformées $|Y_1 \rangle$ et $|Y_2 \rangle$ sont stationnairement corrélées (donc stationnaires de second ordre).

Nous pouvons donc envisager l'étude de second ordre des représentations des processus stationnaires filtrés.

a) **Au premier ordre**, on tient compte de ce que $E \{ X(t) \} = \mu$, cf (25), d'où d'après (37) :

$$(40a) \quad E \{ Y(t) \} = \mu(H * 1) = \mu h(0),$$

$$(40b) \quad E \{ y(v) \} = \mu h(0) \delta(v).$$

b) **Au second ordre**, il convient de porter l'expression (33a) dans (38) :

$$E \{ y_1(v) \otimes y_2^*(v') \} = h_1(v) h_2^*(v') \gamma_{12}^X(v) \delta(v - v') \equiv \gamma_{12}^Y(v) \delta(v - v').$$

D'où résulte la *distribution spectrale d'interaction* des transformées :

$$(41a) \quad \bullet \quad \gamma_{12}^Y(v) = h_1(v) h_2^*(v) \gamma_{12}^X(v),$$

et par transformation de Fourier (cf (32a)) leur *covariance mutuelle*

$$(41b) \quad \bullet \quad \Gamma_{12}^Y(\tau) = (H_1 * H_2^\# * \Gamma_{12}^X)_{(\tau)}.$$

Lorsque les processus sont des *fonctions aléatoires* stationnaires de second ordre et les réponses percussionnelles des fonctions sommables, cette dernière relation se réduit bien sous forme intégrale à la formule des interférences de A. Blanc-Lapierre [10] Tous les cas particuliers de la figure 1 peuvent évidemment entrer dans le cadre des formules (41) précédentes.

VIII.3. Localisation de la puissance moyenne sur l'axe des fréquences.

Appliquons les résultats précédents au cas particulier de *filtres passe-bande idéaux* (bande passante $2B$, fréquence centrale ν_0) dont le gain complexe est décrit par

$$h(v) = \Pi_B(v - \nu_0),$$

avec $\Pi_B(v) = 1$ si $v \in [-B, +B]$; $= 0$ si non. Pour deux processus aléatoires $|X_1 \rangle$ et $|X_2 \rangle$ stationnairement corrélés, la formule des interférences en représentation- ν (41a) donne l'expression suivante de la distribution spectrale d'interaction des trans-



formées $|Y_1\rangle$ et $|Y_2\rangle$ dans le même filtre passe-bande,

$$(42) \quad \gamma_{12}^Y(\nu) = \Pi_B(\nu - \nu_0) \gamma_{12}^X(\nu),$$

(ceci parce que $\Pi_B^2 = \Pi_B$).

VIII.3.1. Puissance moyenne d'un processus.

La formule (42) s'applique évidemment à un processus $|X\rangle$ stationnaire de second ordre et fournit alors la distribution spectrale énergétique de sa transformée dans un filtre passe-bande idéal,

$$\gamma_Y(\nu) = \Pi_B(\nu - \nu_0) \gamma_X(\nu).$$

Cette quantité est donc une distribution à support borné et par suite sa transformée de Fourier, la covariance propre $\Gamma_Y(\tau)$, est une *fonction indéfiniment dérivable* (donc continue et bornée à l'origine) qu'on peut exprimer, d'après L. Schwartz [7] par :

$$\Gamma_Y(\tau) = \langle e^{-2\pi i \nu \tau}, \gamma_Y(\nu) \rangle = \langle e^{-\pi i \nu \tau} \Pi_B(\nu - \nu_0), \gamma_X(\nu) \rangle.$$

Par suite, quel que soit le processus stationnaire de second ordre $|X\rangle$, sa transformée $|Y\rangle$ dans un passe-bande idéal a pour représentation- t une *fonction aléatoire stationnaire de second ordre* au sens de [10]. On sait que la puissance moyenne de cette dernière grandeur est donnée par $\Gamma_Y(0)$, qui a ici un sens. D'après les conclusions du paragraphe VII.1d, nous pouvons donc écrire la puissance moyenne du signal-temps $\langle t|Y\rangle$:

$$W_B(\nu_0) = \Gamma_Y(0) \equiv E\{|Y(t)|^2\} = \langle \Pi_B(\nu - \nu_0), \gamma_X(\nu) \rangle,$$

soit encore :

$$(43a) \quad \bullet \quad W_B(\nu_0) = (\Pi_B * \gamma_X)_{(\nu_0)}, \\ (= \int_{\nu_0-B}^{\nu_0+B} \gamma_X(\nu) d\nu, \text{ en écriture impropre}).$$

a) Ce résultat correspond également à l'expression de la fraction $W_B(\nu_0)$ de *puissance moyenne du processus* $|X\rangle$ affectée à la bande de fréquences $[\nu_0 - B, \nu_0 + B]$. Ce qui est remarquable, c'est que $W_B(\nu_0)$ a un sens même si la puissance moyenne *globale* n'est pas définie.

b) — Si $\gamma_X(\nu)$ est une *fonction continue* en ν_0 :

$$\lim_{B \rightarrow 0} W_B(\nu_0) = 2B \cdot \gamma_X(\nu_0),$$

propriété d'une densité spectrale.

— Si $\gamma_X(\nu)$ contient une *distribution de Dirac* $\gamma_0 \delta(\nu - \nu_0)$ centrée sur ν_0 (avec en plus, éventuellement, une contribution continue en ν_0) :

$$\lim_{B \rightarrow 0} W_B(\nu_0) = \gamma_0.$$

— $\gamma_X(\nu)$ ne saurait prendre un autre aspect, puisque nous savons (cf. § VII.2c) qu'elle est la dérivée première de la fonction de répartition spectrale.

Se trouve ainsi justifiée physiquement la dénomination de *distribution spectrale énergétique* pour la valeur propre $\gamma_X(\nu)$ de l'opérateur stationnaire de covariance.

c) Nous avons vu à propos de (39) que les transformées de $|X\rangle$ dans deux filtres disjoints sont de covariance nulle. On exprime ici ce fait en disant (cf [10] p. 380) que *la puissance moyenne d'un processus aléatoire stationnaire est localisable sur l'axe des fréquences* (même si sa valeur globale n'est pas définie).

VIII.3.2. Puissance moyenne d'interaction de deux processus.

La puissance moyenne d'interaction de deux fonctions aléatoires stationnairement corrélées et de covariance mutuelle uniformément continue est donnée par $2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}^Y(0) = 2 \operatorname{Re} E\{Y_1(t) Y_2^*(t)\}$. Ce cas est celui des transformées de deux processus stationnaires de second ordre quelconques dans le même filtre passe-bande idéal : leur covariance mutuelle est en effet une fonction indéfiniment dérivable (la transformée de Fourier de $\gamma_{12}^Y(\nu)$, cf (42), qui est une distribution à support borné) que nous écrivons

$$\Gamma_{12}^Y(\tau) = \langle e^{-2\pi i \nu \tau} \Pi_B(\nu - \nu_0), \gamma_{12}^X(\nu) \rangle.$$

Ce qui donne la fraction de puissance moyenne d'interaction de deux processus $|X_1\rangle$ et $|X_2\rangle$ affectée à la bande de fréquences $[\nu_0 - B, \nu_0 + B]$:

$$(43b) \quad W_B^2(\nu_0) = 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}^Y(0) = 2 \operatorname{Re} (\Pi_B * \gamma_{12}^X)_{(\nu_0)}.$$

Cette quantité possède les mêmes caractéristiques que $W_B(\nu_0)$ lorsque $B \rightarrow 0$. Elle a toujours un sens, même si la puissance d'interaction *globale* n'est pas définie ; de plus d'après (39), elle est localisable sur l'axe des fréquences. La dénomination *distribution spectrale d'interaction* pour la valeur propre $\gamma_{12}^X(\nu)$ de l'opérateur de covariance mutuelle se trouve ainsi justifiée.

VIII.3.3. Analyse harmonique. Toutes les propriétés physiques de décomposition spectrale qui précèdent sont issues du caractère de la représentation-fréquence $x(\nu)$ d'un processus aléatoire stationnaire, puisque basées sur la relation

$$E\{x_1(\nu) x_2^*(\nu')\} = \gamma_{12}^X(\nu) \delta(\nu - \nu').$$

Nous avons déjà évoqué l'intérêt qu'il y aurait à conserver— même dans un sens abusif — la terminologie « d'analyse harmonique » pour évoquer la transformation de Fourier qui relie les deux représentations t et ν . Il nous reste à apporter une certaine justification à cette attitude.

Décomposons l'axe des fréquences en intervalles *disjoints et adjacents* de même largeur $\Delta\nu$. L'emploi d'un filtre passe-bande idéal modifié de gain $\Pi'_{\Delta\nu}(\nu - \nu_k)$ (où $\Pi'_{\Delta\nu}(\nu)$ a maintenant pour support l'intervalle $[-\Delta\nu, +\Delta\nu[$ (*semi-fermé*) permet d'isoler chaque transformée $|\Delta Y_k\rangle$ de $|X\rangle$ correspon-



tant à l'intervalle de rang k . Du fait que les représentations- ν de ces transformées sont des distributions à support borné, nous pouvons les exprimer en représentation-temps par des *fonctions*, qui sont

$$(44) \quad \Delta Y_k(t) = (\Pi'_{\Delta\nu}(\nu) * e^{2\pi i \nu t} x(\nu))_{(\nu)_k},$$

et la représentation-temps $X(t)$ du processus $|X\rangle$ apparaît comme étant la somme de telles contributions spectrales, $X(t) = \sum_k \Delta Y_k(t)$, que l'on peut rendre aussi proches que l'on veut du monochromatisme. C'est bien cette décomposition qu'évoque l'écriture impropre de l'analyse harmonique

$$X(t) = \int_{R^1} e^{2\pi i \nu t} x(\nu) d\nu,$$

(laquelle équivaut à supprimer la nécessaire *régularisation* de la distribution $x(\nu)$ par $\Pi'_{\Delta\nu}$ et à passer à la limite $\Delta\nu \rightarrow 0$).

La formulation (44) est valable sans modification pour un signal certain, ce qui permet de faire entrer dans un cadre unique l'« analyse harmonique » des processus aléatoires aussi bien que déterministes.

VIII.4. Filtres de dérivation-temps et dérivées de processus aléatoires.

VIII.4.1. Filtre de dérivation-temps. Il s'agit d'un filtre linéaire D_t dont l'élément de matrice-temps (réponse percussionnelle) sera par définition la dérivée première de la distribution de Dirac :

$$\langle t|D_t|0\rangle = \delta'(t).$$

Sa valeur propre (gain complexe) est la transformée de Fourier de δ' , soit $2\pi i\nu$:

$$D_t|\nu\rangle = 2\pi i\nu|\nu\rangle.$$

Le *filtre itéré* D_t^n a donc une valeur propre $(2\pi i\nu)^n$ et un gain complexe $\delta^{(n)}(t)$: c'est un « filtre stable ». On obtient immédiatement la relation de composition $D_t^m D_t^n = D_t^{m+n}$ et la propriété $D_t^n F = F D_t^n$ pour tout filtre F :

Le *filtre adjoint* $D_t^{\dagger n}$ a de son côté la valeur propre $(-2\pi i\nu)^n$ et donc une réponse percussionnelle $(-)^n \delta^{(n)}(t)$; par suite

$$D_t^{\dagger n} = (-)^n D_t^n, \quad (n \text{ entier positif}).$$

De ce qui précède, résulte que l'action de D_t^n sur un signal déterministe $|X\rangle \in \mathcal{E}$ donne, d'après la formule de Vaschy (13), un signal ayant pour représentation- t

$$\langle t|D_t^n|X\rangle = (\delta^{(n)} * X)_{(t)} = \left(\frac{d}{dt}\right)^n X(t).$$

C'est la « dérivée d'ordre n » de $X(t)$, qui existe toujours au sens des distributions. Enfin, en représentation- ν

$$\langle \nu|D_t^n|X\rangle = (2\pi i\nu)^n x(\nu).$$

VIII.4.2. Dérivées des processus aléatoires.

Soit $|\Phi\rangle \in \mathcal{E}_0$ un signal fondamental déterministe et $|\Psi_n\rangle = D_t^n|\Phi\rangle$ sa transformée par le filtre D_t^n ; $|\Psi_n\rangle$ est donc à son tour un signal

fondamental de \mathcal{E}_0 . Nous définirons la « dérivée d'ordre n , » $|Y_n\rangle$, d'un processus aléatoire $|X\rangle$ par le fait que la fonction de répartition de la variable aléatoire $\langle \Phi|Y_n\rangle$ est identique à celle de $(-)^n \langle \Psi_n|X\rangle$, quel que soit le choix de $|\Phi\rangle$ dans \mathcal{E}_0 .

Or, nous avons

$$\langle \Psi_n| = \langle \Phi|D_t^{\dagger n} = (-)^n \langle \Phi|D_t^n.$$

Il en résulte que

$$(-)^n \langle \Psi_n|X\rangle = \langle \Phi|D_t^n|X\rangle$$

peut être considérée également comme le produit scalaire de $|\Phi\rangle$ et de $D_t^n|X\rangle$: c'est dire que la dérivée $|Y_n\rangle$ s'assimile encore, dans le cas aléatoire, à l'action du filtre D_t^n sur le processus $|X\rangle$:

$$|Y_n\rangle = D_t^n|X\rangle.$$

a) La formule de la moyenne (35) donne alors la statistique de premier ordre

$$E\{|Y_n\rangle\} = D_t^n|M\rangle,$$

et la formule des interférences (36) fournit l'opérateur de covariance mutuelle des dérivées $|Y_m^1\rangle$ et $|Y_n^2\rangle$ de deux processus $|X^1\rangle$ et $|X^2\rangle$, soit

$$\Gamma_{mn}^{12} = D_t^m \Gamma_{12}^* D_t^{\dagger n} = (-)^n D_t^m \Gamma_{12}^* D_t^n.$$

b) Si $|X^1\rangle$ et $|X^2\rangle$ sont *stationnairement corrélés*, les formules précédentes conduisent :

— en représentation- ν , en vertu de (30) et de (33a), à

$$E\{y_n(\nu)\} \equiv 0, \quad n \geq 1, \quad (\text{puisque } \nu^n \delta(\nu) \equiv 0),$$

$$E\{y_m^1(\nu) \otimes y_n^{2*}(\nu')\} = (-)^n (2\pi i\nu)^{m+n} \Gamma_{12}^x(\nu) \delta(\nu - \nu');$$

— en représentation- t , en écrivant

$$Y_n(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n X(t),$$

à

$$E\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^n X(t)\right\} \equiv 0, \quad n \geq 1,$$

$$E\left\{\left(\frac{d}{dt}\right)^m X_1(t) \otimes \left(\frac{d}{dt}\right)^n X_2^*(t-\tau)\right\} = (-)^n \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{m+n} \Gamma_{12}^x(\tau),$$

ce qui rejoint, en les étendant, les propriétés de corrélation des dérivées stochastiques de fonctions aléatoires [10].

VIII.5. Une interprétation des opérateurs de covariance.

Nous avons vu au paragraphe VII.1b que l'opérateur de covariance possède dans le cas stationnaire toutes les propriétés d'un filtre linéaire. Ce comportement d'une grandeur essentiellement statistique



qui, intrinsèquement, est liée à la nature d'un signal, apparaît donc comme assez insolite. C'est ce qui nous incite à rechercher la nature profonde du filtre auquel semble se rattacher cet opérateur.

a) Nous obtiendrons l'interprétation physique recherchée en considérant le cas du filtrage d'un processus aléatoire particulier : nommons **processus à corrélation microscopique** (ou bruit blanc) un processus $|X_0\rangle$ stationnaire et centré dont l'opérateur de covariance propre Γ_0 est proportionnel à l'opérateur identité. Pour simplifier, réduisons la proportionnalité à l'unité en posant

$$(45) \quad \Gamma_0 = E \{ |X_0\rangle \langle X_0| \} = 1.$$

Par suite, la valeur propre $\gamma_0(v)$ (distribution spectrale énergétique) vaut 1 pour tout v . Si maintenant $|X_0\rangle$ est transformé dans un filtre linéaire F (de valeur propre — ou gain complexe — $h(v)$), la formule des interférences (36) donne pour l'opérateur de covariance propre de $|Z\rangle = F|X_0\rangle$ l'expression

$$\Gamma^z = F F^\dagger.$$

Cet opérateur s'assimile à un filtre, celui qui résulte de la composition de F et de son adjoint ; il apparaît comme hermitique et ayant comme valeur propre une distribution positive et donc un élément de matrice-temps défini positif, ce qui correspond aux propriétés mises en évidence au paragraphe VII.1.

b) Si $|X\rangle$ est un processus stationnaire quelconque (supposé centré pour simplifier) d'opérateur de covariance Γ^x et de distribution spectrale énergétique (valeur propre) $\gamma^x(v)$, ce processus aura les mêmes propriétés statistiques de second ordre que la transformée $|Z\rangle = F|X_0\rangle$ du processus à corrélation microscopique $|X_0\rangle$ dans un filtre linéaire F , sous réserve que ce dernier soit tel que

$$(46a) \quad \Gamma^x = F F^\dagger.$$

C'est en quoi un opérateur stationnaire de covariance propre s'assimile à un filtre hermitique positif.

c) Soit deux processus centrés $|X_1\rangle$ et $|X_2\rangle$ stationnairement corrélés, ayant pour opérateurs de covariance propre $\Gamma_{11}^x, \Gamma_{22}^x$ et pour opérateur de covariance mutuelle Γ_{12}^x . Ces processus ont dans leur ensemble même statistique de second ordre que les transformées du processus $|X_0\rangle$ à corrélation microscopique dans deux filtres linéaires F_1 et F_2 tels que $\Gamma_{11}^x = F_1 F_1^\dagger$ et $\Gamma_{22}^x = F_2 F_2^\dagger$ et de plus

$$(46b) \quad \Gamma_{12}^x = F_1 F_2^\dagger.$$

Ce qui est bien conforme à la propriété $\Gamma_{21}^x = \Gamma_{12}^{x\dagger}$ et fournit une interprétation de l'opérateur de covariance stationnaire mutuelle dans le cadre d'une assimilation à un filtre. Si $\gamma_{12}^x(v)$ est la distribution spectrale d'interaction (valeur propre) et $\Gamma_{12}^x(\tau)$ la covariance mutuelle, les gains complexes

et réponses percussionnelles doivent satisfaire aux conditions suivantes, déduites de (46b) :

$$\gamma_{12}^x(v) = h_1(v) h_2^*(v),$$

$$\Gamma_{12}^x(\tau) = (H_1 * H_2^\#)_{(\tau)}.$$

Sans nous attacher aux conditions même d'existence des solutions de ce problème de synthèse de réseaux, remarquons que $\gamma_{12}^x(v)$ n'a un sens que si au moins l'une des deux quantités $h_1(v)$ ou $h_2(v)$ est une fonction.

d) La condition (46a) n'implique aucune liaison statistique particulière entre le processus donné $|X\rangle$ et le processus à corrélation microscopique $|X_0\rangle$. Autrement dit, la covariance mutuelle entre $|X\rangle$ et $|X_0\rangle$ est indéterminée. On peut mettre à profit cette liberté pour chercher à réaliser une *distance nulle* entre $|X\rangle$ et son équivalent au second ordre $|Z\rangle = F|X_0\rangle$.

Pour introduire la notion de distance nulle, utilisons le vecteur différence

$$|\Delta\rangle = |X\rangle - |Z\rangle = |X\rangle - F|X_0\rangle,$$

et élaborons avec un signal fondamental $|\Phi\rangle$ quelconque la forme quadratique

$$E \{ |\langle \Phi | \Delta \rangle|^2 \}.$$

Nous dirons que la *distance quadratique* entre $|X\rangle$ et $|Z\rangle$ est nulle si la forme quadratique précédente s'annule pour tout choix de $|\Phi\rangle$ dans \mathcal{E}_0 . Or, en vertu de (46a) et du fait que $\Gamma_{xz} = \Gamma_{xx}, F^\dagger$ (cf (36b)) nous avons

$$E \{ |\langle \Phi | \Delta \rangle|^2 \} = \langle \Phi | \{ 2FF^\dagger - \Gamma_{xx}, F^\dagger - FF_{xx} \} | \Phi \rangle$$

Par suite, la distance quadratique entre $|X\rangle$ et $F|X_0\rangle$ sera nulle si nous adoptons pour l'opérateur de covariance mutuelle entre $|X_0\rangle$ et $|X\rangle$ la contrainte

$$(47) \quad \Gamma_{xx} = F,$$

ce qui, d'après le cas particulier (36b) de la formule des interférences, équivaut à $\Gamma_{xx} = \Gamma_{zx}$.

Ainsi (46a) et (47) donnent-elles les conditions pour qu'un processus stationnaire $|X\rangle$ quelconque et la transformée $F|X_0\rangle$ d'un processus $|X_0\rangle$ à corrélation microscopique dans un filtre linéaire aient même opérateur de covariance propre et aient entre eux une distance quadratique nulle.

VIII.6. Résumé.

Le traitement linéaire d'un processus aléatoire $|X\rangle$ par un (ou plusieurs) filtre F conduit à des transformées $|Y\rangle = F|X\rangle$ dont la statistique des deux premiers ordres découle uniquement de la statistique correspondante du processus d'entrée $|X\rangle$: c'est la **propriété d'autonomie de l'étude de second ordre**.

La formule de la moyenne (35) donne le signal moyen après filtrage, alors que la formule des interférences (36) fournit l'opérateur de covariance des

transformées. Elles correspondent aux conventions d'écriture

$$E \{ \mathbf{F}|X \rangle \} = \mathbf{F} E \{ |X \rangle \},$$

et

$$E \{ \mathbf{F}_1 |X_1 \rangle \langle X_2 | \mathbf{F}_2^\dagger \} = \mathbf{F}_1 E \{ |X_1 \rangle \langle X_2 | \} \mathbf{F}_2^\dagger.$$

Si nous leur adjoignons les propriétés évoquées dans le résumé paragraphe VII.3, nous en tirons une règle pratique particulièrement simple : le fait, exprimé dans un langage imagé, que « $E \{ \} \}$ est perméable tant aux signaux certains de δ qu'aux opérateurs linéaires ».

a) La formule des interférences (36) est fondamentale en ce sens qu'elle résoud tous les problèmes de second ordre associés à un traitement linéaire (Fig. 1). Elle montre en particulier que deux processus stationnairement corrélés conduisent à des processus filtrés conservant la même propriété et que l'opérateur de covariance mutuelle des transformées est l'opérateur nul lorsque les filtres sont disjoints.

b) L'opérateur antihermitique \mathbf{D}_t de dérivation-temps est un filtre linéaire particulier qui conduit, par itération, aux dérivées stochastiques de tous ordres d'un processus. Une simple application de la formule des interférences détermine directement l'opérateur de covariance des dérivées, d'où résulte en particulier sa représentation-temps

$$E \{ X^{(m)}(t) X^{(n)*}(t') \}.$$

c) L'étude, dans le cas stationnaire, de la répartition spectrale de la puissance moyenne d'interaction (resp. puissance moyenne propre) montre que cette grandeur est localisable sur l'axe des fréquences. La puissance moyenne $W_B(\nu_0)$ affectée à une bande $2B$ autour d'une fréquence ν_0 est directement

liée, voir (43), à la valeur propre $\gamma(\nu)$ de l'opérateur de covariance, laquelle justifie ainsi l'appellation proposée de « distribution spectrale d'interaction » (resp. distribution spectrale énergétique). Il s'avère qu'on peut toujours exprimer la puissance moyenne relative à une bande de fréquences finie alors même que la notion de puissance moyenne relative à l'ensemble de deux (resp. à un seul) processus peut ne pas avoir de sens.

d) La notion de processus à corrélation microscopique $|X_0 \rangle$, dont l'opérateur de covariance est neutre, permet de mieux comprendre pour quelle raison un opérateur de covariance quelconque se comporte, dans le cas stationnaire, comme un filtre linéaire :

Si \mathbf{F} est le filtre transformant $|X_0 \rangle$ en un processus de même opérateur de covariance Γ_X qu'un processus donné $|X \rangle$, on doit avoir $\Gamma^X = \mathbf{F} \Gamma^0$, quantité qui représente bien un filtre hermitique positif. De plus, la distance quadratique entre le processus $|X \rangle$ donné et son équivalent de second ordre $\mathbf{F}|X_0 \rangle$ est rendue nulle si l'on choisit $\Gamma_{XX_0} = \mathbf{F}$ pour opérateur de covariance mutuelle de $|X \rangle$ et $|X_0 \rangle$. Une telle assimilation s'étend à la statistique d'ensemble de deux processus stationnairement corrélés.

Les résultats principaux de ce paragraphe VIII sont rassemblés dans le tableau II.

IX. SIGNAUX DÉTERMINISTES ET OPÉRATEUR DE CORRÉLATION.

L'étude de la répartition spectrale de l'énergie ou de la puissance moyenne des signaux déterministes a été faite par N. Wiener [6] à qui l'on doit

TABLEAU II

GRANDEURS ABSTRAITES	REPRÉSENTATION-t	REPRÉSENTATION-ν
\mathbf{F} (opérateur filtre) $ Y \rangle = \mathbf{F} X \rangle$ $ M^Y \rangle = \mathbf{F} M^X \rangle$ (Moyenne) $\Gamma_{12}^Y = \mathbf{F}_1 \Gamma_{12}^X \mathbf{F}_2^\dagger$ (Interférences)	$\langle t \mathbf{F} 0 \rangle = H(t) \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \langle \nu \mathbf{F} \nu' \rangle = h(\nu) \delta(\nu - \nu')$ $\mathbf{F} \nu \rangle = h(\nu) \nu \rangle$ $Y(t) = (H * X)(t) \overset{\leftarrow}{\leftarrow} y(\nu) = h(\nu) x(\nu)$ $E \{ Y(t) \} = (H * E \{ X \})_{(t)} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} E \{ y(\nu) \} = h(\nu) E \{ x(\nu) \}$ $E \{ Y_1(t) Y_2^*(t') \} \overset{\leftarrow}{\leftarrow} E \{ y_1(\nu) y_2^*(\nu') \} = h_1(\nu) h_2^*(\nu')$ $E \{ x_1(\nu) x_2^*(\nu') \}$	
Cas stationnaire : $ M^Y \rangle = \mathbf{F} M^X \rangle$ $\Gamma_{12}^Y = \mathbf{F}_1 \Gamma_{12}^X \mathbf{F}_2^\dagger$ $W_B(\nu_0)$ $\mathbf{D}_t^n = (-)^n \mathbf{D}_t^n$ (op. dérivation-temps) $\mathbf{D}_t^n X \rangle$ $\Gamma_{mn}^{12} = (-)^n \mathbf{D}_t^{m+n} \Gamma_X^{12}$	puissance moyenne : $E \{ Y(t) \} = \mu h(0) \overset{\leftarrow}{\leftarrow} E \{ y(\nu) \} = \mu h(0) \delta(\nu)$ $\Gamma_{12}^Y(\tau) = (H_1 * H_2^\# * \Gamma_{12}^X)(\tau) \overset{\leftarrow}{\leftarrow} \Gamma_{12}^Y(\nu) = h_1(\nu) h_2^*(\nu) \gamma_{12}^X(\nu)$ $W_B(\nu_0) = (\Pi_B * \gamma^X)(\nu_0)$ $\delta^{(n)}(t) \overset{\leftarrow}{\leftarrow} (2\pi i \nu)^n$ $X^{(n)}(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n X(t) \overset{\leftarrow}{\leftarrow} (2\pi i \nu)^n x(\nu)$ $E \{ X_1^{(m)}(t) X_2^{(n)*}(t - \tau) \} = (-)^n \left(\frac{d}{d\tau}\right)^{m+n} \Gamma_{(2)}^{12}(\tau) \overset{\leftarrow}{\leftarrow} (-)^n (2\pi i \nu)^{m+n} \gamma_{12}^X(\nu)$	



la notion de *fonction de corrélation*. Sa théorie était basée sur l'emploi de l'intégrale de Stieltjes et a été reprise par J. Arsac [11] au moyen de la théorie des distributions. Ce qui ne peut manquer de frapper dans ce domaine est l'analogie considérable qui existe entre, d'une part fonction de corrélation et répartition spectrale de l'énergie d'un signal déterministe et, d'autre part, covariance et distribution spectrale énergétique d'un signal aléatoire stationnaire. Il est vrai qu'un signal déterministe $|X\rangle$ peut bien être considéré comme une réalisation particulière $|X, C_0\rangle$ d'un signal aléatoire $|X, C\rangle$ associé à une certaine catégorie d'épreuves C ; mais il n'y a aucune raison *a priori*, bien au contraire, d'attribuer un caractère stationnaire à la covariance de $X(t)$ et par suite il sera en général impossible d'invoquer le théorème ergodique pour relier des grandeurs de second ordre (énergétiques), déterminées par une moyenne temporelle sur la réalisation $|X, C_0\rangle$, à des grandeurs analogues de caractère statistique associées au processus aléatoire sous-jacent (ou considéré comme tel).

On est donc conduit, malgré tout, à considérer deux doctrines différentes pour définir des grandeurs qui finalement sont *de même espèce*, suivant qu'on se trouve en présence de signaux aléatoires stationnaires, ou bien de signaux certains. Cependant, il est de toute évidence nécessaire, par souci de cohérence, de s'efforcer d'adopter dans l'un et l'autre cas des définitions que l'ergodisme rend équivalentes, lorsque la méthode destinée aux signaux déterministes est appliquée à une réalisation particulière d'un signal aléatoire stationnaire d'ordre deux. Il faut donc, pour traduire le concept de fonction de corrélation, laquelle joue un rôle analogue à celui d'une covariance, adopter la définition la plus convenable. Un tel souci correspond à une obligation absolue pour l'expérimentateur, amené à utiliser des appareils — corrélateurs ou analyseurs — qui réalisent bien entendu le même traitement, indépendamment du fait que les signaux d'entrée sont « vraiment » déterministes ou proviennent d'un phénomène aléatoire.

Nous allons nous pencher rapidement sur ce problème, en mettant l'accent sur les considérations énergétiques, à notre point de vue primordiales.

IX.1. Répartition spectrale de la puissance moyenne d'un signal déterministe.

a) Si deux signaux certains $|X_1\rangle$ et $|X_2\rangle$ de l'espace \mathcal{E} (ou le même signal) sont transformés dans les filtres linéaires F_1 et F_2 , le produit scalaire des signaux de sortie $|Y_1\rangle$ et $|Y_2\rangle$ s'exprime par

$$\langle Y_1 | Y_2 \rangle = \langle X_1 | F_1^\dagger F_2 | X_2 \rangle.$$

Par suite, si les filtres sont *disjoints*, au sens du paragraphe VIII.2.2, on a

$$(48) \quad F_1 F_2 = 0 \Rightarrow \langle Y_1 | Y_2 \rangle = 0.$$

Les signaux de sortie sont alors *orthogonaux* et ne possèdent pas d'énergie d'interaction; de plus, leurs représentations sont des fonctions (généralisées) orthogonales.

b) Considérons un filtre passe-bande idéal, du type étudié au paragraphe VIII.3, avec une bande passante $2B$ et une fréquence centrale ν_0 . Soit $|Y\rangle$ la transformée dans ce filtre d'un signal $|X\rangle \in \mathcal{E}$ déterministe; sa représentation-fréquence $y(\nu)$ s'exprime en fonction de celle, $x(\nu)$, de $|X\rangle$ sous la forme

$$(49) \quad y(\nu) = \Pi_B(\nu - \nu_0) x(\nu).$$

C'est une distribution à support borné et par suite la représentation-temps $Y(t)$ est une *fonction indéfiniment dérivable*, continue et bornée, sur laquelle nous pouvons définir une puissance moyenne $W_B(\nu_0)$.

c) On a évoqué au paragraphe I le fait que l'énergie d'un signal normalisable $|Z\rangle \in \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ est donnée par le carré de sa norme $\langle Z | Z \rangle = \|Z\|^2$. Le même signal, tronqué dans l'intervalle de temps $[-T, +T]$, est exprimé par la projection $P_T |Z\rangle$, où P_T est le projecteur décrit par (3a) au paragraphe II, dont la valeur propre en représentation-temps est la fonction projectrice $\Pi_T(t)$ définie par (5): $P_T |t\rangle = \Pi_T |t\rangle$. Comme $P_T^\dagger P_T = P_T^2 = P_T$ (voir plus loin paragraphe IX.3), il en résulte que l'énergie de $P_T |Z\rangle$ vaut $\langle Z | P_T |Z\rangle$; par suite la puissance moyenne de $|Z\rangle$ dans l'intervalle de temps $[-T, +T]$ est égale à $(1/2T) \langle Z | P_T |Z\rangle$.

Les propriétés évoquées de la représentation-temps $Y(t)$ de la transformée de tout signal certain $|X\rangle \in \mathcal{E}$ dans un filtre passe-bande idéal permettent d'exprimer la puissance moyenne de $|Y\rangle$ dans l'intervalle de temps $[-T, +T]$ par une expression similaire. En passant à la limite $T \rightarrow \infty$, nous obtenons la *puissance moyenne* de $|Y\rangle$ sous la forme:

$$(50a) \quad W_B(\nu_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle Y | P_T | Y \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle \Pi_T Y, Y \rangle \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |Y(t)|^2 dt.$$

En utilisant la relation de Parseval sur la forme linéaire, jointe au théorème de Plancherel, nous obtenons pour cette puissance moyenne $W_B(\nu_0)$ l'expression équivalente

$$(50b) \quad W_B(\nu_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle (\pi_T * y), y \rangle,$$

où $\pi_T(\nu)$ est la transformée de Fourier de la projectrice $\Pi_T(t)$ soit:

$$(51) \quad \pi_T(\nu) = 2T \frac{\sin 2\pi\nu t}{2\pi\nu t} \rightleftharpoons \Pi_T(t),$$

avec

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \pi_T(\nu) = \delta(\nu),$$

laquelle est également l'élément de matrice- ν , $\pi_T(\nu) = \langle \nu | \mathbf{P}_T | 0 \rangle$, du projecteur.

Nous voyons que $\frac{1}{2T} \pi_T(\nu)$ n'est sensible que dans un intervalle de l'ordre de quelques multiples de $1/T$; ce qui fait que, lorsque $T \rightarrow \infty$, le produit de convolution $\frac{1}{2T} (\pi_T * y)_{(\nu)}$ tend à avoir le même support que celui de $y(\nu)$, soit d'après (49) le même que celui de $\Pi_B(\nu - \nu_0)$. Cette remarque permet de simplifier l'expression du produit scalaire (50b) lorsqu'on y remplace $y(\nu)$ par sa valeur (49), en l'écrivant

$$W_B(\nu_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle (\pi_T * x)_{(\nu_0)}, \Pi_B(\nu - \nu_0) x(\nu) \rangle, \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle \Pi_B(\nu - \nu_0), (\pi_T * x^*)_{(\nu)} x(\nu) \rangle.$$

Alors, la comparaison avec l'expression (43a) relative aux processus aléatoires incite à écrire cette puissance moyenne sous la même forme :

$$(43a) \quad W_B(\nu_0) = (\Pi_B * \gamma_X)_{(\nu_0)},$$

ce que nous obtenons en posant

$$(52) \quad \gamma_X(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\pi_T * x^*)_{(\nu)} x(\nu).$$

Cette distribution $\gamma_X(\nu)$ joue ainsi, dans ce cadre déterministe, exactement le même rôle qu'une *distribution spectrale énergétique*, et il est aisé de voir qu'elle possède la même propriété d'être une *distribution positive*. De plus, les propriétés d'orthogonalité que nous avons rencontrées à la sortie de deux filtres disjoints, voir (48), montrent que, dans ce cas encore, la puissance moyenne est *localisable sur l'axe des fréquences*. Remarquons enfin que la quantité $W_B(\nu_0)$, qui représente la fraction de puissance moyenne du signal certain $|X \rangle$ affectée à la bande de fréquences $[\nu_0 - B, \nu_0 + B]$, existe toujours quel que soit $|X \rangle \in \mathcal{E}$, même si la puissance moyenne globale de $|X \rangle$ n'a pas de sens.

d) Il est aisé d'introduire une quantité jouant un rôle similaire à celui d'une *distribution spectrale d'interaction* relativement à deux signaux déterministes $|X_1 \rangle$ et $|X_2 \rangle$. On a évoqué au paragraphe III.1 le fait que l'énergie d'interaction est liée au produit scalaire et l'on prendra pour *puissance moyenne d'interaction* la quantité

$$W_B^{\#}(\nu_0) = 2\text{Re} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle Y_1 | \mathbf{P}_T | Y_2 \rangle = \\ 2\text{Re} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \langle \Pi_T Y_1, Y_2 \rangle,$$

relative aux transformées $|Y_1 \rangle$ et $|Y_2 \rangle$ des signaux dans deux filtres. En utilisant alors les propriétés des filtres passe-bande idéaux, un raisonnement similaire au précédent nous conduit à une formulation identique à celle ayant trait aux processus aléatoires, à savoir

$$(43b) \quad W_B^{\#}(\nu_0) = 2\text{Re}(\Pi_B * \gamma_{12}^{\#})_{(\nu_0)},$$

pour la puissance moyenne d'interaction $W_B^{\#}(\nu_0)$ affectée à la bande $[\nu_0 - B, \nu_0 + B]$, grandeur localisable sur l'axe des fréquences. Pour cela on prend comme *distribution spectrale d'interaction* la quantité

$$(53) \quad \gamma_{12}^{\#}(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\pi_T * x_2^*)_{(\nu)} x_1(\nu),$$

qui possède bien la propriété $\gamma_{21}^{\#} = \gamma_{12}^{\#}$.

IX.2. Fonction de corrélation.

Par analogie avec le théorème de Wiener-Khintchine et son prolongement aux processus-distributions (cf paragraphe VII.2c), nous sommes conduits tout naturellement à rechercher la transformée de Fourier de la distribution spectrale $\gamma_X(\nu)$, telle qu'elle est exprimée par (52). Ce qui donne, en utilisant le théorème de Plancherel et le fait que $\pi_t \rightleftharpoons \Pi_T$:

$$(54) \quad \Gamma_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\Pi_T X^{\#} * X)_{(\tau)} \equiv \\ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\Pi_T X * X^{\#})_{(\tau)},$$

relation dans laquelle, rappelons-le,

$$X^{\#}(t) = X^*(-t) = \langle X | -t \rangle,$$

est le signal-temps adjoint de $X(t)$. Exprimée dans l'écriture (en général impropre) d'une intégrale, cette expression devient celle de N. Wiener [6] :

$$(54a) \quad \Gamma_X(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} X(t) X^*(t - \tau) dt.$$

a) Du fait que sa transformée de Fourier est une distribution positive, $\Gamma_X(\tau)$ est *définie positive* et possède les mêmes propriétés qu'une covariance. Par convention, nous nommerons la distribution $\Gamma_X(\tau)$ décrite par (54) *fonction de corrélation* (généralisée) du signal certain $|X \rangle$: il semblerait préférable de réserver cette dénomination aux signaux déterministes, la notion analogue de covariance appartenant aux signaux aléatoires stationnaires.

Remarquons bien que la manière dont la fonction de corrélation a été introduite ici découle logiquement de considérations énergétiques et évite ainsi tout *a priori*.

b) Lorsqu'il s'agit de traduire l'interaction de deux signaux déterministes $|X_1 \rangle$ et $|X_2 \rangle$ la transformation inverse de Fourier de la distribution spectrale (53) conduit à la *fonction d'intercorrélation* (généralisée)

$$(55) \quad \Gamma_{X_1 X_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\Pi_T X_1 * X_2^{\#})_{(\tau)}.$$

IX.3. Opérateur de corrélation.

a) Opérateur de projection.

Reprenons la définition de l'opérateur de projection ou projecteur :

$$3a) \quad \mathbf{P}_T = \int_{-T}^{+T} |t \rangle dt \langle t| \Rightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_T = 1.$$



Il en résulte immédiatement, compte tenu de la relation (4), l'élément de matrice- t

$$(56) \quad \langle t | \mathbf{P}_T | t' \rangle = \Pi_T(t) \delta(t - t'),$$

qui montre que le projecteur est *diagonal en représentation-temps*, ayant pour valeur propre la projectrice $\Pi_T(t)$; par suite $\mathbf{P}_T = \mathbf{P}_T^\dagger$ est hermitique et l'on a $\mathbf{P}_T^n = \mathbf{P}_T$ pour tout entier n positif. On déduit de (56) la représentation- t de l'action de \mathbf{P}_T sur un signal $|X\rangle$ ce qui donne

$$(57) \quad \langle t | \mathbf{P}_T | X \rangle = \Pi_T(t) X(t),$$

[= $X(t)$ si $t \in [-T, +T]$; = 0 si non].

De son côté, l'élément de matrice- ν se déduit de la définition (3a), en tenant compte de la propriété (14), soit

$$(58) \quad \langle \nu | \mathbf{P}_T | \nu' \rangle = \pi_T(\nu - \nu'),$$

où $\pi_T(\nu)$ est décrit par (51). Il en résulte la représentation- ν de $\mathbf{P}_T | X \rangle$, transformée de Fourier de (57),

$$(59) \quad \langle \nu | \mathbf{P}_T | X \rangle = (\pi_T * x)_{(\nu)}.$$

b) Opérateur de corrélation.

Il résulte de (59) que la distribution spectrale d'interaction (53) de deux signaux certains $|X_1\rangle$ et $|X_2\rangle$ peut être considérée comme l'élément *diagonal* de la matrice de représentation- ν ,

$$(60) \quad \bullet \quad \gamma_{12}^X(\nu) = \langle \nu | \Omega_{12}^X | \nu \rangle,$$

d'un certain opérateur Ω_{12}^X que nous nommerons *opérateur de corrélation* et qui est décrit par :

$$(61) \quad \bullet \quad \Omega_{12}^X = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbf{P}_T | X_1 \rangle \langle X_2 | \mathbf{P}_T.$$

Nous avons en effet :

$$\langle \nu | \Omega_{12}^X | \nu \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\pi_T * x_1)_{(\nu)} (\pi_T * x_2)_{(\nu)} \equiv$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} x_1(\nu) (\pi_T * x_2)_{(\nu)},$$

si nous tenons compte de ce que $\lim_{T \rightarrow \infty} \pi_T(\nu) = \delta(\nu)$.

L'élément de matrice en représentation- t de cet opérateur de corrélation s'exprime alors, compte tenu de (57), par

$$\langle t | \Omega_{12}^X | t' \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \Pi_T(t) X_1(t) \otimes X_2^*(t'),$$

si l'on tient compte de ce que $\lim_{T \rightarrow \infty} \Pi_T(t) = 1, \forall t$.

Par suite, la « fonction d'intercorrélation » (55) apparaît comme étant la trace

$$(62) \quad \bullet \quad \Gamma_{12}^X(\tau) = \text{Tr} \Omega_{12}^X \mathbf{T}_\tau^\dagger,$$

de l'opérateur composé $\Omega_{12}^X \mathbf{T}_\tau^\dagger$ dont l'élément diagonal de matrice est, suivant (10a)

$$\langle t | \Omega_{12}^X \mathbf{T}_\tau^\dagger | t \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \Pi_T(t) X_1(t) \otimes X_2^*(t - \tau).$$

On obtient par le même raisonnement des formulations similaires pour la fonction d'autocorrélation et la distribution spectrale énergétique d'un signal déterministe unique.

c) Formule des interférences.

Si $|Y_1\rangle$ et $|Y_2\rangle$ sont les transformées dans deux filtres linéaires *stables* \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 de deux signaux certains $|X_1\rangle$ et $|X_2\rangle$ d'opérateur de corrélation Ω_{12}^X , nous avons

$$(63) \quad |Y_1\rangle = \mathbf{F}_1 |X_1\rangle \quad \text{et} \quad \langle Y_2 | = \langle X_2 | \mathbf{F}_2^\dagger.$$

Or, du fait que $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbf{P}_T = 1$ en vertu de la relation de fermeture (3), nous avons la relation de commutation $\lim_{T \rightarrow \infty} [\mathbf{F}, \mathbf{P}_T] = \mathbf{0}$. Il en résulte que l'opérateur de corrélation des transformées s'exprime, étant donné la définition (61) et l'écriture (63), sous la forme :

$$\Omega_{12}^Y = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbf{P}_T \mathbf{F}_1 |X_1\rangle \langle X_2 | \mathbf{F}_2^\dagger \mathbf{P}_T =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \mathbf{F}_1 \mathbf{P}_T |X_1\rangle \langle X_2 | \mathbf{P}_T \mathbf{F}_2^\dagger,$$

$$(64) \quad \bullet \quad \Rightarrow \quad \Omega_{12}^Y = \mathbf{F}_1 \Omega_{12}^X \mathbf{F}_2^\dagger,$$

ce qui, en comparant avec (36), est l'expression exacte de la *formule des interférences* prolongée dans le domaine déterministe. L'intérêt fondamental de ce résultat est qu'il permet de faire entrer dans un cadre unique la doctrine du traitement linéaire des signaux, que ceux-ci soient déterministes ou aléatoires stationnaires. Ainsi, on déduit de (64), pour la distribution spectrale d'interaction, compte tenu de (21) et de (60) :

$$(65a) \quad \gamma_{12}^Y(\nu) = h_1(\nu) h_2^*(\nu) \gamma_{12}^X(\nu),$$

et pour la fonction d'intercorrélation, par transformation de Fourier :

$$(65b) \quad \Gamma_{12}^Y(\tau) = (H_1 * H_2^\# * \Gamma_{12}^X)_{(\tau)},$$

résultats entièrement identiques à leurs correspondants (41a) et (41b) relatifs aux processus aléatoires stationnaires. Bien entendu, ces formules recouvrent tous les cas représentés par la figure 1 du paragraphe VIII.

X. FORMALISME UNITAIRE : FONCTION DE CORRÉLATION ET COVARIANCE RÉDUITES.

Les calculs du paragraphe IX précédent ont été conduits à partir de la notion de *puissance moyenne* et tombent en défaut lorsqu'on traite des signaux normalisables qui possèdent une *énergie finie* et par suite une puissance moyenne nulle : c'est le cas de tous les éléments de l'espace-signal de Hilbert $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}$ représentés par des fonctions de \mathbf{L}^2 et en particulier des signaux fondamentaux de $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1$.

Il convient donc de reprendre toute l'étude du paragraphe IX en considérant la répartition spectrale de l'énergie $\langle X|X \rangle$ des signaux de \mathcal{E}_1 , donc en supprimant l'intervention du projecteur \mathbf{P}_T ; ce qui conduit à

— un opérateur de corrélation

$$\Omega = |X \rangle \langle X|,$$

— une distribution spectrale

$$\gamma(\nu) = \langle \nu | \Omega | \nu \rangle = x(\nu) x^*(\nu),$$

— une fonction de corrélation

$$\Gamma(\tau) = (X * X^\#)_{(\tau)}.$$

Il est cependant possible d'éviter que cette dualité énergie/puissance apporte un dédoublement aussi dommageable dans nos définitions. Nous y parviendrons en nous tournant vers des *grandeurs sans dimension*, donc en considérant des fonctions de corrélation ou des covariances réduites. Cette étude sera conduite dans un but pratique en nous limitant à une classe réduite de signaux, ceux qui sont représentés par des fonctions : fonctions localement sommables à croissance lente pour le cas déterministe (ce qui inclut les fonctions de \mathcal{W}_2 , \mathbf{L}^2 ou \mathcal{S}), fonctions de second ordre pour le cas aléatoire.

a) Ainsi, nous pouvons, d'après (54), introduire une *fonction de corrélation réduite* au moyen de

$$(66) \quad C(\tau) = \frac{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\Pi_T X * X^\#)_{(\tau)}}{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\Pi_T X * X^\#)_{(0)}}.$$

Dans cette expression $1/2T$ va disparaître du numérateur et du dénominateur, ce qui donne

$$(67a) \quad C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(\Pi_T X * X^\#)_{(\tau)}}{(\Pi_T X * X^\#)_{(0)}} \Rightarrow C(0) = 1,$$

(remarquons que le dénominateur a un sens pour les fonctions de croissance lente) ou encore, exprimé dans une écriture intégrale, valable ici,

$$(67b) \quad C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{-T}^{+T} X(t) X^*(t - \tau) dt}{\int_{-T}^{+T} |X(t)|^2 dt}.$$

L'usage de (67) supprime alors toute difficulté de formulation pour la grandeur de sortie d'un corrélateur.

b) La distribution $C(\tau)$ possède une transformée de Fourier $c(\nu)$ qui est proportionnelle à la distribution spectrale énergétique $\gamma(\nu)$ décrite en (53) :

$$(68) \quad c(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{x(\nu) (\pi_T x * x^*)_{(\nu)}}{(\Pi_T X * X^\#)_{(0)}} \Rightarrow \langle c, 1 \rangle = 1.$$

C'est une grandeur normalisée qu'on pourrait appeler simplement *distribution spectrale* puisque, étant sans dimension, elle correspond suivant les cas à la répartition d'une énergie ou d'une puissance moyenne.

Dans le cas où $\langle \nu | X \rangle = x(\nu)$ est une fonction de \mathbf{L}^2 , la distribution spectrale $c(\nu)$ devient

$$(69) \quad c(\nu) = \frac{|x(\nu)|^2}{\|X\|^2};$$

(on a utilisé le fait que $\lim_{T \rightarrow \infty} \pi_T(\nu) = \delta(\nu)$,

et la distribution spectrale de l'énergie

$$\langle X|X \rangle = \|X\|^2$$

est donnée par $|x(\nu)|^2$: ce qui rejoint les considérations développées dans un article antérieur [12].

c) Si le signal $|X \rangle$ est aléatoire stationnaire de second ordre, le théorème ergodique montre que, sur une réalisation particulière (qui est une fonction de \mathcal{W}_2), la fonction de corrélation

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} (\Pi_T X * X^\#)_{(\tau)},$$

vient se confondre avec la covariance

$$E \{ X(t) X^*(t - \tau) \}.$$

Le fait que la puissance moyenne soit bornée rend possible la considération d'une *covariance réduite*, que nous écrirons :

$$(70) \quad C(\tau) = \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(0)} = \frac{E \{ X(t) X^*(t - \tau) \}}{E \{ |X|^2 \}}.$$

Cette grandeur statistique vient alors se confondre avec la fonction de corrélation réduite d'une réalisation particulière, grandeur de nature déterministe.

d) Il reste enfin à vérifier l'homogénéité des notions de fonction de corrélation réduite et de covariance réduite, lorsque $\langle t | X \rangle = X(t)$ est une fonction de \mathbf{L}^2 , de même alors la représentation $\langle \nu | X \rangle = x(\nu)$. Nous pouvons pour ce faire considérer $X(t)$ comme la réalisation particulière d'une fonction aléatoire *stationnaire* au moyen de l'artifice suivant : nous construisons la fonction stationnaire

$$(71) \quad \mathfrak{X}(t) = \sum_j X(t - t_j),$$

fonction de couverture associée à la suite des instants t_j d'un processus de Poisson stationnaire de densité ρ . Il est toujours possible de faire en sorte que la réalisation particulière observée soit telle que l'un des points, disons t_k , coïncide avec la date choisie arbitrairement pour origine. Le théorème de Carson donne alors la distribution spectrale énergétique (au sens statistique) :

$$\gamma(\nu) = \rho |x(\nu)|^2,$$

et la puissance moyenne vaut

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} |x(\nu)|^2 d\nu = \rho \|X\|^2.$$

D'où résulte par division la distribution spectrale normée

$$(72) \quad c(\nu) = \frac{|x(\nu)|^2}{\|X\|^2}.$$

Si $\rho \rightarrow 0$, le point t_{k-1} est repoussé vers $-\infty$ et t_{k+1} vers $+\infty$. Par suite la réalisation observée



s'identifie, d'après (71), avec la fonction déterministe $X(t)$. Or, la grandeur *statistique* $c(v)$ ne dépend pas de ρ et conserve la valeur (72) lors du passage à la limite : c'est exactement la valeur donnée par la définition *déterministe* (69).

Il est bien évident que, par transformation de Fourier, nous verrions venir se confondre covariance réduite et fonction de corrélation réduite pour ce signal *normalisable*. Le fait remarquable est que cette identification se produise en dehors de toute intervention de propriétés ergodiques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] HUGGINS (W. H.). The design of pure systems. (Conception de systèmes abstraits.) (1962), John Hopkins Univ. Rept. N° AFCRL-62-909.
- [2] LAI (D. C.). Signal space concepts and Dirac's notation. (Concepts d'espace-signal et écriture de Dirac.) (1960), John Hopkins Univ. Rept. N° AFCRC-TN-60-167.
- [3] DIRAC (P. A. M.). Quantum Mechanics. (Mécanique Quantique.) Clarendon, Oxford (1958).
- [4] MESSIAH (A.). Mécanique Quantique, *Dunod*, Paris (1959), 430 p.
- [5] RIESZ (F.), NAGY (B.). Leçons d'analyse fonctionnelle. *Acad. Sci., Hongrie* (1953).
- [6] WIENER (N.). Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series. (Extrapolation, interpolation et lissage de processus stationnaires.) *M. I. T.*, Cambridge (1949), 160 p.
- [7] SCHWARTZ (L.). Théorie des distributions, *Hermann* (1951), 141 p.
- [8] MOURIER (E.). Éléments aléatoires dans un espace de Banach, *Thèse*, Paris (1952), 84 p, bibl. (24 réf.).
- [9] GELFAND (I. M.). Processus aléatoires généralisés. *Dokl. Akad. Nauk.*, U. R. S. S. (1955), **100**, pp. 853-856 (en russe).
- [10] BLANC-LAPIERRE (A.), FORTET (R.). Théorie des fonctions aléatoires, *Masson*, Paris (1953), 693 p.
- [11] ARSAC (J.). Transformation de Fourier et théorie des distributions, *Dunod*, Paris (1961), 347 p.
- [12] BONNET (G.). Phénomènes aléatoires et traitement du signal. *Bull. Inf. Sci. Techn. Fr.* (1965)-**96**, pp. 1-12.